par Didier Lesesvre

Une petite histoire mathématique du jeu de go

Jeu et science tous deux millénaires, le go et les mathématiques sont deux mondes d'une phénoménale profondeur qui s'entrelacent, s'enrichissent et s'éclairent l'un l'autre. Le go n'a de cesse d'utiliser diverses formes de mathématiques, au point d'en devenir un sujet de recherche en soi.

©123RF / maxuser

S'il n'est pas possible d'explorer tous les royaumes où se rencontrent go et mathématiques, cet article s'efforcera d'en donner un panorama élémentaire mais représentatif, de s'aventurer jusque quelques sommets, puis d'inviter le lecteur à voyager plus loin dans chaque direction.

Le go est un jeu de stratégie chinois déjà répandu avant notre ère. Sa place dans l'élite intellectuelle chinoise en a fait un jeu hautement considéré, l'érigeant comme l'un des quatre aboutissements de la société cultivée, au même rang que la musique, la calligraphie et la peinture. Il se joue sur un plateau quadrillé, appelé *goban*, dont la taille la plus répandue est 19×19 (on compte le nombre de points d'intersection). Le goban, vide au début du jeu, sera le lieu d'affrontement des deux adversaires – Noirs et Blancs – pour conquérir le plus grand territoire (voir encadré).

L'éclairage de la combinatoire

Le jeu de go est par essence fini : il n'y a que 361 intersections sur un goban, donc un nombre fini de coups et de parties possibles. C'est naturellement le domaine de la combinatoire qui s'attaque le premier à ce jeu.

La situation est déjà loin d'être facile pour un jeu plus simple comme le morpion (où l'on dénombre 5 478 parties possibles, avec un décompte plus délicat si on ne veut pas compter plusieurs fois des parties « équivalentes »). Plus simple

est l'étude de la longueur maximale d'une partie de morpion, qui est de neuf coups. Que dire de celle d'une partie de go ? Trois cent soixante et un coups n'est pas une borne absolue, même si elle est souvent constatée en pratique. En effet, des pierres peuvent être faites prisonnières et retirées du goban, ouvrant la voie à de nouveaux coups.
On peut simplifier encore le problème en regardant plutôt le nombre de positions possibles. Une borne pour ce nombre sur un goban de taille $n \times n$ est d'au plus 3^{n^2} positions autorisées. En effet, chacune des n^2 intersection peut être dans l'une des trois situations suivantes : abriter une pierre blanche, une noire ou aucune. Une telle borne est toutefois incroyablement grande, de l'ordre de 10^{172} pour un goban de taille 19×19, à comparer au nombre de particules de l'univers estimé à un « minuscule » 10^{80}.
Pour réussir à comprendre certaines questions, une stratégie consiste à prendre de la distance et à les plonger dans des cadres plus élaborés, plus riches, permettant de déceler plus de structure. Certains chercheurs ont ainsi étudié plus généralement le nombre $\mathrm{L}(m, n)$ de positions légales sur un goban de taille $m \times n$. Une manière astucieuse de modéliser et d'explorer cette question est d'introduire, comme vu dans ce dossier, le graphe du jeu $\mathrm{G}(m, n)$, représentant tous les états possibles du goban et reliant les états pouvant être atteints en un coup, de sorte que les parties de go sur un goban $m \times n$ correspondent aux chemins (simples) partant du goban vide.

Ainsi, la question du dénombrement des positions possibles se réduit à un dénombrement de certains chemins sur un graphe, problème pour lequel beaucoup d'outils théoriques ont été développés, mais qui reste au cœur des défis de la recherche actuelle. Le nombre $\mathrm{L}(m, n)$ peut alors être décrit grâce à une récurrence l'exprimant à partir du cas de base $\mathrm{L}(1, 0)$, réduisant le problème à déterminer les valeurs propres de la matrice sous-jacente, un problème d'algèbre linéaire. Les algorithmes obtenus par cette méthode sont très lourds pour les ordinateurs (avec une complexité doublement exponentielle), mais permettent de déterminer pour $\mathrm{L}(m, n)$ un comportement asymptotique précis, de l'ordre de $3^{\alpha mn\left(1-\frac{2}{81}\right)^{\frac{2}{5}(m+n)}}$ où α appartient à l'intervalle $[4/5, 1]$.

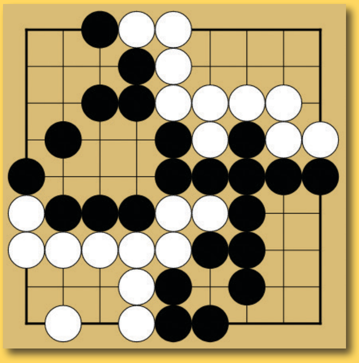
Les règles du go

Les règles du go, particulièrement simples, peuvent être synthétisées en deux points fondamentaux.

• La *règle de position* : à tour de rôle, chaque joueur pose une « pierre » de sa couleur sur une intersection vide. Dans une partie absolument paisible, cette règle suffirait, et le vainqueur serait celui ayant encerclé le plus grand territoire.

• La *règle de capture* : toutefois, la vie n'est pas si paisible et il existe une règle de combat. Une pierre (ou un groupe de pierres) perdant toutes ses libertés est capturée, et retirée du plateau. Cela ouvre la porte à de nombreuses possibilités de combats ou d'invasions, une partie de go étant souvent un ballet de vie et de mort.

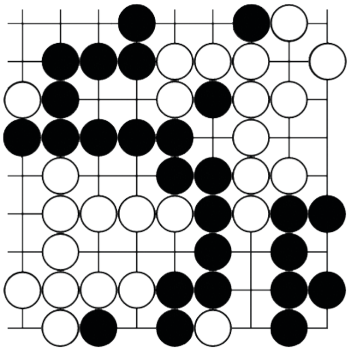
Ces règles, déjà fort riches, vont permettre d'explorer de belles mathématiques.



Exemple d'une partie paisible sur 9×9. Noir a 23 points de territoire et Blanc, 14.

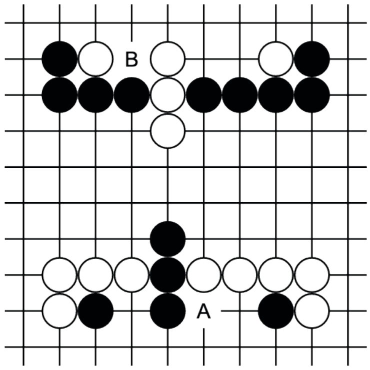
Les fins de parties

En fin de partie, les questions de stratégie et de tactique disparaissent grandement pour laisser place à une situation stable où seules les frontières restent à clôturer précisément. C'est le *yose*, où le souci du détail est capital pour trouver le coup le plus intéressant à jouer (pas forcément en termes de nombre de points seulement, mais aussi en prenant en compte l'initiative, le champ des possibles ouvert…). Un exemple typique pourrait être la situation suivante.



Problème de *yose* : quel coup jouer en priorité ?

John Conway a développé des techniques nouvelles et mathématiquement puissantes pour analyser une grande classe de jeux combinatoires. La comparaison de positions peut, par exemple, se faire par la notion de *différence de jeux*, qui, sans l'introduire formellement, s'illustre très bien sur un exemple représentatif du go et des situations de *yose*. Le *jeu de la différence* est une duplication du jeu en inversant les couleurs, comme dans le dessin ci-dessous.



Noir joue le coup A puis Blanc joue en B. Si le même vainqueur se dégage quel que soit le joueur ayant le trait, alors le coup

La combinatoire du go, enfin des réponses… partielles

Sur un goban de taille 19 × 19, il a fallu attendre des années pour que John Tromp détermine en 2016 le nombre exact de positions légales possibles. Mais que dire du nombre de parties possibles ? Sur un goban 2 × 2 (avec *ko*, voir page 22), il est déjà de… 386 356 909 593 ! Le nombre de positions possibles est également étonnamment élevé (57), de sorte que cette explosion, typique de la combinatoire, n'est que le résultat de l'exploration d'un graphe particulièrement dense.

Tromp et Gunnar Farnebäck ont donné une borne inférieure de $10^{10^{48}}$ au nombre de parties possibles, améliorée récemment à $10^{10^{100}}$ par Matthieu Walraet, mais demeurant encore loin d'une valeur exacte. Beaucoup de chemin reste à parcourir avant de comprendre profondément la fine combinatoire du go, mais une partie de sa richesse mathématique commence à s'entrevoir.

© Hoge Rielen, Belgium

Vue plongeante sur un goban.

qu'il a joué en premier est le meilleur coup des deux. Dans l'exemple ci-dessus, le coup A est le meilleur, surprenant possiblement déjà de nombreux joueurs, qui auraient sauté sur le sauvetage de la pierre avec B.

David Wolfe a travaillé à la mathématisation des fins de parties au go et raffiné, avec le mathématicien Elwyn Ralph Berlekamp, la théorie des jeux de Conway pour l'adapter au cadre du *yose*.

Cela a introduit un niveau d'abstraction qui a permis deux révolutions :

- considérer comme identiques des situations en apparence différentes ;
- rendre calculatoires des situations qui semblent d'un autre ordre.

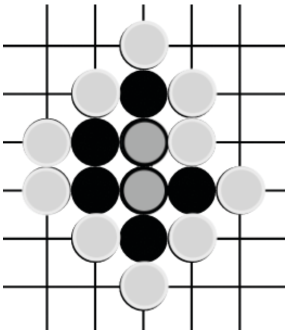
Cette mathématisation permet de considérer les parties de go comme des *nombres surréels* (voir *Tangente* 194), objets mathématiques munis d'une addition, une soustraction, un zéro, un ordre, en tous points similaires à celui des nombres réels usuels, mais qui contiennent bien plus : les ordinaux transfinis de Cantor, leurs inverses infinitésimaux, parfois positifs et négatifs à la fois.

On voit ici déjà ce que les mathématiques peuvent apporter en suggérant de dépasser la notion, fugace sinon maladroite, d'initiative, qui ne peut pas se réduire aux seules notions de *sente* (conservant l'initiative) et de *gote* (perdant l'initiative).

L'éclairage de la topologie

Les deux facettes des règles du jeu de go – position et combat – se traduisent au niveau stratégique par deux concepts : le *territoire* (constitué de points « sûrs ») et l'*influence* (une notion intuitive de force), évoluant sans cesse au cours d'une partie. L'utilisation de la topologie, avec ses concepts de voisinages et de connexité, permet d'en approcher la compréhension. Considérons un ensemble E (les points du goban) et une famille d'éléments structurant $(V_x)_{x \in E}$ associés à chaque point (en quelque sorte : son potentiel d'influence). La dépendance en x recouvre le fait que, par exemple, un *hoshi*, point de coordonnées (4, 4) a plus de potentiel d'influence qu'un point situé sur un bord. Deux notions centrales sont alors introduites : le *dilaté* d'un ensemble de pierres A est défini par $D(A) = \{x \in E, V_x \cap A \neq \varnothing\}$, qui peut être pensé comme les points du goban dans une certaine aire d'influence autour de A ; et l'*érodé* $E(A) = \{x \in E, V_x \subset A\}$, qui peut être imaginé comme les points du goban profondément ancrés dans la zone délimitée par A.

On définit alors la *fermeture* F(A) comme E(D(A)), opérateur qui a un effet « convexifiant » et érodant à la fois. Ces notions sont importées des théories de la morphologie mathématique et du traitement d'image (voir Bibliothèque Tangente 77, 2022), où elles sont utilisées pour le lissage et la correction d'erreurs.



Groupe de pierres noires, sa dilatation (en deux teintes de gris) et sa fermeture (en gris foncé) pour $V_x = B(x, 1)$.

De ces concepts topologiques, dans une thèse publiée en 1995, Bruno Bouzy propose de définir l'influence (mathématisée) I(A) d'un ensemble de pierres A comme D(A) \ A (les pierres en deux teintes de gris ci-dessus), et le territoire T(A) délimité par A comme F(A) \ A (les pierres en gris foncé).

Une autre approche topologique de

la notion d'influence est celle des *ensembles flous*. Les fonctions d'évaluation de chaque intersection sont désormais floues : au lieu d'être « noires ou blanches » (ou dans leur zone d'influence), elles sont « plutôt noires ou plutôt blanches ».

L'arrivée des machines

S'attaquer aux activités humaines par ordinateur, notamment à ses jeux discrets et stratégiques, a ouvert un nouvel univers des possibles, s'appuyant sur leur mémoire, leur puissance et leur précision. Si des jeux tels que les dames, les échecs ou le backgammon ont vu leurs meilleurs champions surpassés par des programmes fondés sur l'exploration d'arbres, le go a exigé de pousser les méthodes plus loin encore.

Une première approche, entièrement fondée sur la puissance d'apparence phénoménale des ordinateurs, celle de la recherche arborescente exhaustive, a été vue dans les précédents articles. En définissant une fonction d'évaluation v^*, donnant une « valeur » à chaque position, il suffit d'observer les valeurs de v^* aux feuilles, états finaux du jeu, sélectionner une valeur optimale et remonter le long de la branche jusqu'à la situation actuelle pour choisir le meilleur coup. Les joueurs agissant ainsi alternativement, cela donne lieu à l'*algorithme du minimax*.

Si une telle approche fonctionne à merveille avec des jeux combinatoires de « petites tailles » comme le morpion, il est déjà plus difficile de l'utiliser aux échecs, et encore moins au go. L'arbre d'un jeu, qui a une taille monumentale, ne peut pas être exhaustivement exploré en pratique.

Deux parades ont été imaginées pour contourner cette explosion combinatoire. La première consiste à limiter la profondeur d'exploration, remplaçant tout le sous-arbre partant d'un nœud s par une fonction d'évaluation partielle $v(s)$ « proche » de $v^*(s)$. Utilisée au jeu d'échecs et venue à bout des plus grands champions, cette approche se heurte à deux difficultés au go :

- une pierre jouée en début de partie peut avoir un effet une centaine de coups plus tard, rendant la troncature potentiellement aveugle à des mécaniques fondamentales ;
- aucune fonction d'évaluation v pertinente et rapide à calculer n'est connue tant que la partie n'est pas finie, contrairement aux échecs, où une valeur peut être associée à chaque pièce, donnant une idée de l'équilibre des forces.

La seconde méthode consiste à choisir les branches à explorer, en sélectionnant les coups aléatoirement à partir du nœud s selon une probabilité qui définit la stratégie d'exploration. Pour réussir à définir une fonction d'évaluation v approchant « raisonnablement » la fonction optimale v^*, une option est d'introduire une stratégie (rapide à mettre en œuvre) et d'essayer quelques coups possibles avant de poursuivre la partie en suivant cette stratégie, et en moyennant les résultats obtenus : il s'agit d'une approche par simulations. Cela donne souvent des évaluations raisonnables, même avec des stratégies assez élémentaires, mais peut mener à des erreurs de jugement dans certains cas.

L'Allemand Bernd Brügmann a écrit en 1993 le premier programme de go fondé sur cette seconde méthode. Bruno Bouzy, Tristan Cazenave et Bernard Helmstetter, au cours de leurs thèses respectives, ont poursuivi l'exploration de cette approche, qui s'est révélée la clé pour aborder le jeu de go avec une efficacité révolutionnaire : c'est la méthode de Monte-Carlo (voir Bibliothèque Tangente 50, 52 et 72).

Une méthode raffinée, mariant l'efficacité de la méthode Monte-Carlo et l'exhaustivité de l'exploration d'arbres, est la *recherche arborescente de Monte-Carlo* (ou MCTS pour *Monte-Carlo Tree Search*), développée par Rémi Coulom. Il s'agit de suivre l'approche d'exploration des arbres, non plus avec une fonction d'évaluation définie *a priori* ou par exploration exhaustive, mais donnée par des simulations de type Monte-Carlo. Un arbre des situations du jeu sera donc itérativement construit, raffinant au fur et à mesure la fonction d'évaluation.
Si le go est resté jusque très récemment l'archétype du jeu inaccessible aux ordinateurs, le programme AlphaGo, développé par Google et sa filiale DeepMind, a finalement battu le champion du monde de go en 2017, révolutionnant le domaine de l'intelligence artificielle comme le monde du go, amenant les algorithmes à un niveau de maturité que beaucoup estimaient ne pas voir de leur vivant. Cette nouvelle approche, s'appuyant sur les réseaux de neurones et l'apprentissage profond, est vastement documentée (voir le numéro 68 de la Bibliothèque Tangente sur l'intelligence artificielle).

Au cours de ce petit voyage, nous nous sommes arrêtés sur plusieurs planètes, chacune habitée de ses espèces singulières, apportant ses richesses et s'enrichissant d'une approche, tantôt de joueur de go, tantôt de mathématicien. Nous espérons avoir ainsi suscité l'envie d'en découvrir plus et de se prendre au jeu… de go comme des mathématiques !

D.L.

Références

• *Le calcul intégral.* Bibliothèque Tangente 50, 2014.
• *Mathématiques et informatique.* Bibliothèque Tangente 52, 2014.
• *L'intelligence artificielle.* Bibliothèque Tangente 68, 2019.
• *Maximum, minimum, optimum.* Bibliothèque Tangente 72, 2020.