

EMPILEMENT OPTIMAL DES SPHÈRES EN DIMENSION 8

MARISSAËL Alexis

Stage d'initiation à la recherche encadré par Didier LESESVRE

au sein du laboratoire Paul Painlevé de l'Université de Lille

Mai 2022

Depuis plusieurs siècles, de nombreux mathématiciens se sont intéressés à un problème mathématique concret au départ : il s'agit de trouver un empilement optimal des sphères, c'est-à-dire déterminer les positions que doivent occuper des sphères de même rayon dans un volume de façon à ce qu'elles ne se coupent pas et qu'elles occupent la plus grande part possible de l'espace. Ce problème a été résolu en petites dimensions (inférieures à 3) même si justifier l'optimalité n'est pas évident en dimension 3, pour laquelle le problème est le plus concret. Cependant, jusqu'à 2016, aucune solution n'était connue en dimensions supérieures pour lesquelles les empilements sont plus difficilement imaginables.

L'objectif de ce stage est de présenter ce problème d'empilements de sphères et d'étudier le travail de la mathématicienne ukrainienne Viazovska qui, dans [8], a résolu le problème en dimension 8 (ce qui mena rapidement à la résolution en dimension 24 ensuite).

Pour cela, nous commençons par énoncer précisément le problème, définir les empilements en réseaux et évoquer les résultats en petites dimensions. Ensuite, nous présentons le théorème de Cohn-Elkies puis une introduction aux formes modulaires, outils fondamentaux pour la résolution faite par Viazovska. Enfin, nous pourrions énoncer le résultat en dimension 8 et évoquer la démonstration de ce dernier. Pour ce travail, on considère comme acquis les résultats des cours de troisième année de licence de mathématiques.

Table des matières

I	Introduction et résultats en petites dimensions	4
I.1	Présentation du problème et empilements en réseaux	4
I.2	Résultat en dimension 1	7
I.3	Résultat en dimension 2	7
I.4	Résultat en dimension 3	8
II	Le théorème de Cohn-Elkies	10
II.1	Formule de sommation de Poisson	11
II.2	Le théorème de Cohn-Elkies	13
III	Introduction aux formes modulaires	15
III.1	Définitions et développement de Fourier	15
III.2	Séries d'Eisenstein	18
III.3	Fonctions thêta	20
IV	Résultat en dimension 8 : la démonstration de Viazovska	22
IV.1	L'empilement selon un réseau particulier en dimension 8	23
IV.2	Construction d'une bonne fonction	24
IV.3	La fonction de valeur propre 1	27
IV.4	La fonction de valeur propre -1	30
IV.5	Bilan	32

Notations :

- $d \in \mathbb{N}^*$ est la dimension (finie) de l'espace \mathbb{R}^d dans lequel on se place.
- $x \cdot y$ désigne le produit scalaire canonique de deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^d .
- $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d .
- Pour cette norme, $\mathcal{B}_d(x, r)$ est la boule ouverte de \mathbb{R}^d pour $\|\cdot\|$ centrée en $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$.
- On note $\text{Vol}(D)$ le volume dans \mathbb{R}^d de la partie $D \subset \mathbb{R}^d$.
- Γ désigne la fonction définie sur \mathbb{R} par $\Gamma : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
- On note ζ la fonction de Riemann définie par $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, \hat{f} désigne la transformée de Fourier de f .
- La fonction identiquement nulle sur \mathbb{R}^d est notée $\tilde{0}$.
- De même, $\tilde{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur \mathbb{R}^d .
- La fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} est notée $\mathbb{1}_{[a,b]}$.
- $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ désigne le demi-plan de Poincaré.
- $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels et de déterminant 1.
- I_2 est la matrice identité en dimension 2.
- On écrira $a \equiv b[n]$ le fait que $a - b$ divise n , où a , b et n sont des entiers.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs positifs de n .

Les autres notations apparaissant dans ce rapport seront précisées au fur et à mesure du document.

I Introduction et résultats en petites dimensions

I.1 Présentation du problème et empilements en réseaux

Commençons par introduire le problème de l'empilement des sphères de manière générale dans \mathbb{R}^d muni de la norme euclidienne.

Définition I.1

On appelle empilement de sphères dans \mathbb{R}^d une union disjointe de boules de même rayon r (souvent égal à 1) de la forme $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_d(x, r)$ où X est une partie de \mathbb{R}^d (telle que : $\forall x \neq y \in X, \|x - y\| \geq 2r$).

On parle historiquement de *sphères* mais on pourrait très bien parler de boules d'après cette définition.

Définition I.2

Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ un empilement de sphères.

Pour $r > 0$, on pose $\Delta_{\mathcal{P}}(r) := \frac{\text{Vol}(\mathcal{P} \cap \mathcal{B}_d(0, r))}{\text{Vol}(\mathcal{B}_d(0, r))}$ la proportion occupée de la boule $\mathcal{B}_d(0, r)$.

On appelle alors densité de l'empilement \mathcal{P} la quantité $\Delta_{\mathcal{P}} := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \Delta_{\mathcal{P}}(r)$.

Donnons dès maintenant l'expression générale du volume d'une boule en dimension d , ce qui sera utile pour les calculs de densités dans la suite de ce rapport :

Proposition I.3

Pour $r > 0$, le volume d'une boule de rayon r en dimension d vaut $\text{Vol}(\mathcal{B}_d(0, r)) = \frac{\pi^{d/2} r^d}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})}$.

Démonstration : Pour alléger les notations, on note $V_d(r) := \text{Vol}(\mathcal{B}_d(0, r))$ dans cette preuve.

On rappelle que $V_1(r) = 2r$, $V_2(r) = 4\pi r^2$ et $V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Montrons alors par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$ que le volume de la boule de rayon r en dimension d prend la forme $V_d(r) = a_d r^d$ où $a_d \in \mathbb{R}$ est indépendant du rayon r de la boule, ce qui est déjà vérifié pour $d \leq 3$.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $V_{d+1}(r) = \int_{-r}^r \int_{-r_1}^{r_1} \cdots \int_{-r_{d+1}}^{r_{d+1}} dx_{d+1} dx_d \cdots dx_1$ où $r_i := \sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{i-1}^2}$

pour chaque $i \in \llbracket 2, d+1 \rrbracket$. Posons alors $k > 0$ tel que $k^2 = r^2 - x_1^2$, pour que $r_i = \sqrt{k^2 - x_2^2 - \cdots - x_{i-1}^2}$

puis $\int_{-r_2}^{r_2} \cdots \int_{-r_{d+1}}^{r_{d+1}} dx_{d+1} \cdots dx_2 = V_d(k)$ donc $V_{d+1}(r) = \int_{-r}^r V_d(\sqrt{r^2 - x_1^2}) dx_1$.

Par hypothèse de récurrence, on obtient : $V_{d+1}(r) = a_d \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x_1^2})^d dx_1$.

En effectuant le changement de variable $x_1 = r \cos(\theta)$, on se ramène à une intégrale de Wallis en obtenant

$V_{d+1}(r) = a_d \int_0^\pi \sin(\theta)^{d+1} d\theta r^{d+1}$. Cela achève la récurrence et on obtient $a_{d+1} = 2a_d \int_0^\pi \sin(\theta)^{d+1} d\theta$. Avec l'expression usuelle de cette intégrale de Wallis, on en déduit que si $d = 2p$ alors $a_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}$ et que si $d = 2p + 1$ alors $a_{2p+1} = \frac{2^{2p-1}(p-1)!\pi^{p-1}}{(2p-1)!}$. Par propriété sur la fonction Γ , on a finalement $a_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ de manière générale, d'où $V_d(r) = \frac{\pi^{d/2}r^d}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$. \square

Définition I.4

On appelle densité optimale des empilements de sphères sur \mathbb{R}^d la quantité $\Delta_d := \sup_{\substack{\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d \\ \mathcal{P} \text{ empilement}}} \Delta_{\mathcal{P}}$.

Le problème de l'empilement optimal des sphères consiste alors à déterminer cette quantité Δ_d (qui est bien définie puisque les $\Delta_{\mathcal{P}}$ sont tous majorés par 1) et à trouver les empilements admettant cette densité optimale.

Avant de donner les premiers résultats de ce problème en petites dimensions, introduisons la notion de réseau qui sera utile pour la construction d'empilements de sphères par la suite.

Définition I.5

On dit que $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un réseau de rang $n \in \llbracket 1, d \rrbracket$ dans \mathbb{R}^d si Λ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}^d, +)$. Ce réseau est formé des combinaisons linéaires entières de n vecteurs (u_1, \dots, u_n) formant une famille libre dans \mathbb{R}^d : $\Lambda = \mathbb{Z}u_1 + \dots + \mathbb{Z}u_n$. On dit alors que (u_1, \dots, u_n) est une base du réseau Λ .

On peut alors associer à un tel réseau un empilement de sphères en prenant pour centres de celles-ci les points du réseau. Le rayon des sphères est pris égal à la moitié de la plus petite distance entre deux points du réseau. Lorsque sera évoqué par la suite un empilement construit à partir d'un réseau, c'est cette construction particulière qui sera utilisée.

Définition I.6

Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^d . Le covolume du réseau Λ , noté $|\Lambda|$, est défini comme étant le déterminant de la famille des vecteurs de \mathbb{R}^d qui engendrent Λ (en rajoutant des vecteurs de coordonnées nulles si $n < d$). On peut également définir cette quantité comme étant le volume (dans \mathbb{R}^d) du plus petit paralléloétope (c'est-à-dire l'élément de volume qui généralise la notion de parallélogramme en dimension d , c'est le domaine fondamental du réseau) délimité par des points de Λ , ce qui s'écrit $|\Lambda| := \text{Vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda)$.

Dans le cas du problème d'empilement des sphères, on s'appuiera plutôt sur des réseaux de rang d . Ajoutons la définition d'un réseau dual et deux propriétés sur les réseaux qui seront importantes pour obtenir un empilement associé intéressant :

Définition I.7

Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^d .

On appelle réseau dual de Λ l'ensemble $\Lambda^* := \{x \in \mathbb{R}^d, \forall y \in \Lambda, x \cdot y \in \mathbb{Z}\}$.

Si $\Lambda^* = \Lambda$, on dit alors que Λ est un réseau unimodulaire.

Un réseau est pair si pour tout point x du réseau, le réel $x \cdot x$ est un entier pair.

On peut donner un lien entre les covolumes d'un réseau et de son dual :

Lemme I.8

Pour tout réseau Λ de \mathbb{R}^d , on a : $|\Lambda| \times |\Lambda^*| = 1$.

En particulier, un réseau unimodulaire est de covolume égal à 1.

Démonstration : Soit (u_1, \dots, u_n) une base du réseau Λ de \mathbb{R}^d et soit (u_1^*, \dots, u_n^*) la base duale. On observe alors que $u_i \cdot u_j^* = 1$ si $i = j$ et $u_i \cdot u_j^* = 0$ sinon. On pose M la matrice formée des vecteurs u_i et M^* la matrice des vecteurs u_i^* qui forment une base du réseau dual Λ^* . On peut vérifier que $M^* = (M^T)^{-1}$, d'où $|\Lambda| \times |\Lambda^*| = \det(M) \times \det(M^*) = \det(M^T \times (M^T)^{-1}) = 1$. De plus, pour un réseau unimodulaire, $\Lambda = \Lambda^*$ donc $|\Lambda| = 1$. □

Revenons maintenant aux empilements construits à partir de réseaux. Il existe une autre expression de la densité pour de tels empilements :

Proposition I.9

Un empilement \mathcal{P} associé au réseau Λ admet pour densité $\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{\text{Vol}(\mathcal{B}_d(0,R))}{|\Lambda|}$ où R est le rayon des sphères de l'empilement.

Démonstration : Pour montrer cela, considérons une base (u_1, \dots, u_n) du réseau Λ . Le paralléloépe fondamental correspondant est donc $\left\{ \sum_{k=1}^n x_k u_k, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in [0, 1[\right\}$. Le volume de ce dernier vaut $|\Lambda|$ d'après la définition qui précède. Un empilement de sphères en réseaux consistant à placer des sphères aux sommets de ce réseau, on en déduit que le volume occupé par ces sphères dans le paralléloépe est égal à $\text{Vol}(\mathcal{B}_d(0, R))$. On observe alors qu'en translatant ce paralléloépe fondamental par des éléments de Λ , on

recouvre \mathbb{R}^d tout entier : par périodicité, il suffit de déterminer la densité dans ce volume restreint de \mathbb{R}^d .

Ainsi, on obtient la densité $\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{\text{Vol}(\mathcal{B}_d(0,R))}{|\Lambda|}$. □

Ces définitions et énoncés nous seront particulièrement utiles pour la résolution du problème d'empilement optimal en dimension 8. Avant de développer les outils la permettant, présentons assez brièvement les résultats de ce problème en dimensions 1 à 3.

I.2 Résultat en dimension 1

Lorsque $d = 1$, l'espace considéré est une droite et les sphères ne sont que de simples segments. On observe sans difficulté que joindre par exemple des segments disjoints de la forme $]k, k + 1[$ où k parcourt \mathbb{Z} permet de recouvrir toute la droite. La densité correspondante de cet empilement est clairement égale à 1. Cette densité étant bien sûr maximale, on a donc $\Delta_1 = 1$. Pour cette dimension, on peut remarquer qu'à des translations près, il n'y a que cet empilement qui donne la densité optimale et que c'est le réseau \mathbb{Z} de \mathbb{R} qui détermine cet empilement optimal.

I.3 Résultat en dimension 2

En dimension $d = 2$, il ne semble pas y avoir d'empilement recouvrant tout l'espace... Le problème est donc plus intéressant et la solution a été justifiée il y a seulement un peu plus d'un siècle.

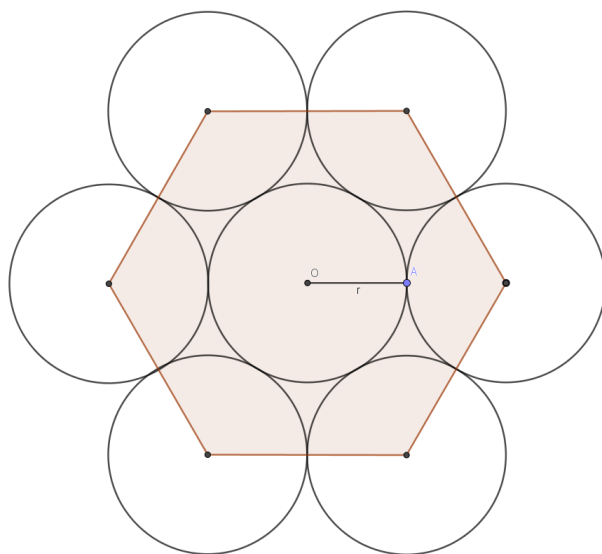


FIGURE 1 – Empilement hexagonal en dimension 2

Théorème I.10

En dimension 2, la densité optimale est atteinte pour l'empilement hexagonal présenté en figure 1 et vérifie : $\Delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,91$.

Démonstration : On note \mathcal{P} l'empilement hexagonal défini par la figure 1 : les sphères de rayon r sont placées de sorte que leurs centres soient celui de l'hexagone et ses sommets. La densité de l'empilement correspondant est égale au quotient de l'aire occupée par les disques au sein de l'hexagone par l'aire totale de l'hexagone, puisque cette figure géométrique forme clairement un pavage du plan.

Or, l'aire A_{disques} occupée par les disques dans l'hexagone vaut : $A_{\text{disques}} = \pi r^2 + 6 \times \frac{2\pi/3}{2\pi} \pi r^2 = 3\pi$ et l'aire de l'hexagone vaut $A_{\text{H}} = 6 \times \frac{2r\sqrt{(2r)^2 - r^2}}{2} = 6\sqrt{3}$. Ainsi, $\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{A_{\text{disques}}}{A_{\text{H}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Il reste à établir le fait que cette densité est optimale, par exemple en introduisant un paramètre θ donnant l'angle entre les centres des sphères de l'empilement. En faisant varier ce paramètre entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, on voit sur la figure 2 différents empilements et il est clair par un argument de tangence que l'empilement optimal est celui pour lequel $\theta = \frac{\pi}{3}$. Ce résultat assez récent (du début du siècle dernier) est justifié plus rigoureusement dans [7].

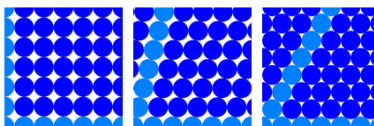


FIGURE 2 – Empilements en dimension 2

Il y a même unicité de cet empilement optimal (à des translations près) en dimension 2. □

On peut aussi interpréter cet empilement comme étant construit à partir du réseau hexagonal de vecteurs de base $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ (les sphères sont alors de rayon $\frac{1}{2}$).

I.4 Résultat en dimension 3

Lorsque $d = 3$, l'espace est celui de la vie quotidienne. C'est dans cette dimension que le problème est le plus concret : on peut par exemple se demander comment empiler des oranges (sphériques) ou des balles de même taille pour qu'elles occupent le volume le plus faible possible. Le mathématicien américain Hales s'est notamment intéressé à la conjecture de Kepler qui énonce que l'empilement optimal est atteint

par une généralisation de l'empilement hexagonal en dimension 3. Le résultat était déjà obtenu par Gauss mais uniquement pour des empilements selon des réseaux. Énonçons cette conjecture, devenue un théorème depuis la preuve complète faite par Hales dans [4] :

Théorème I.11

En dimension 3, la densité optimale est atteinte pour l'empilement cubique à faces centrées présenté en figure 3 et vérifie : $\Delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74$.

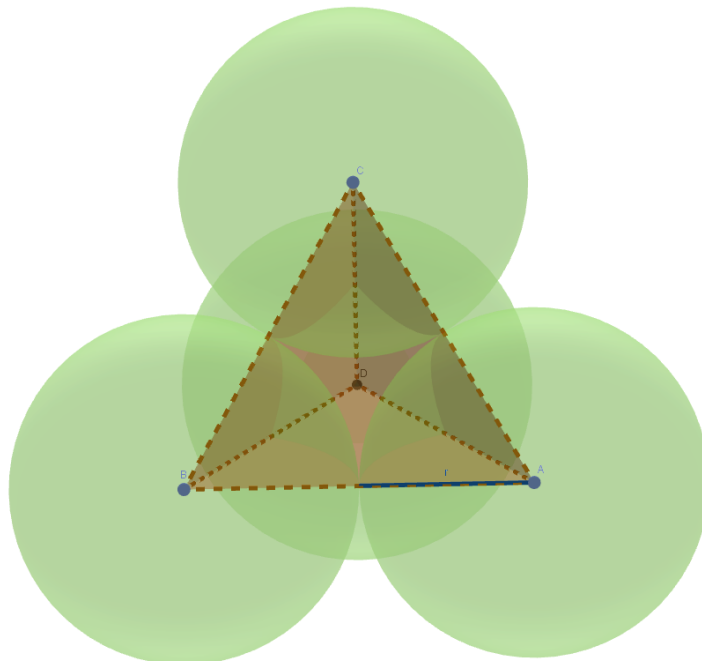


FIGURE 3 – Empilement cubique à faces centrées en dimension 3

On parle de configuration cubique à faces centrées comme en cristallographie : les sphères de l'empilement associé admettent pour centres les sommets d'un cube et les centres de ses faces. Cela revient à prendre ces centres comme étant les sommets d'un tétraèdre comme on peut le voir sur la figure 3. Montrons que cet empilement admet pour densité la valeur Δ_3 énoncée ci-dessus.

Démonstration : Comme les tétraèdres réalisent un pavage de l'espace, de même que l'hexagone pour le plan, la densité de l'empilement est égale au quotient du volume occupé par les sphères (de même rayon r que l'on peut prendre égal à 1) au sein de ce tétraèdre par le volume total du tétraèdre.

D'une part, pour calculer le volume v de la partie d'une sphère incluse dans le tétraèdre, on raisonne comme pour celui d'une sphère entière avec les coordonnées cylindriques sauf qu'ici, θ et φ varient entre 0 et $\frac{\pi}{3}$:

$v = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} r \times r \sin(\theta) d\varphi d\theta dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \left[-\cos(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \times \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18}$. Comme le tétraèdre possède quatre sommets, le volume total occupé par les sphères au sein du tétraèdre vaut $4v = \frac{2\pi}{9}$.

D'autre part, le tétraèdre a pour côté 2 fois le rayon d'une sphère (donc 2 en prenant $r = 1$) donc sa hauteur vaut $\sqrt{4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ d'après le théorème de Pythagore et sa base admet pour aire $\sqrt{3}$. Le volume total de cette pyramide étant égal au tiers du produit de son aire de base par sa hauteur, on en déduit que le volume total du tétraèdre est égal à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

En faisant le rapport de ces deux volumes, on obtient finalement que la densité de l'empilement cubique à faces centrées vaut $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

On admet cependant le fait que cette densité est optimale (la conjecture de Kepler) : dans [4], Hales en a fait une démonstration très calculatoire et assistée par ordinateur. On peut néanmoins remarquer qu'il n'y a ici pas unicité de l'empilement optimal : on peut par exemple changer la direction des décalages des sphères entre chaque couche de l'empilement sans modifier la densité globale de l'empilement. Dans ce cas, un empilement de densité optimal peut ne pas être obtenu qu'à partir d'un réseau. \square

L'empilement cubique à faces centrées peut également être interprété à partir d'un réseau. En effet, on peut le voir comme étant associé à $\Lambda_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3, x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0[2]\}$ dont une base de réseaux est donnée par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nous avons ainsi vu que le problème d'empilement des sphères est résolu pour $d \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ (difficilement déjà en dimension 3) mais il ne l'est pas encore pour $d \geq 4$: dans ces dimensions supérieures, seules des conjectures ont été obtenues (voir dans [2]), sauf pour les cas où $d = 8$, que nous allons traiter dans la suite du rapport, et $d = 24$, résolus depuis 2016 seulement.

II Le théorème de Cohn-Elkies

Dans cette partie, nous allons énoncer puis démontrer le théorème de Cohn-Elkies qui a un rôle central pour la résolution en dimensions 8 (et 24) du problème d'empilement des sphères énoncé précédemment. Pour cela, nous aurons besoin de la formule de sommation de Poisson.

II.1 Formule de sommation de Poisson

Commençons par rappeler les définitions de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur \mathbb{R}^d et de la classe de Schwartz.

Définition II.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

La transformée de Fourier \hat{f} de f est définie sur \mathbb{R}^d par : $\forall y \in \mathbb{R}^d, \hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x \cdot y} dx$.

Définition II.2

On appelle classe de Schwartz (en dimension d) l'ensemble des fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ défini par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}), \forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^k \partial^i f(x)| < +\infty \right\}.$$

Ajoutons une définition particulière de fonctions pour énoncer ensuite la formule de sommation de Poisson :

Définition II.3

On dit que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est admissible s'il existe des constantes $\delta > 0, C > 0$ et $C' > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, |f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\delta+d}} \text{ et } |\hat{f}(x)| \leq \frac{C'}{(1+|x|)^{\delta+d}}.$$

Le terme "admissible" pour une fonction peut avoir plusieurs sens de manière générale mais c'est cette définition ci-dessus que nous utiliserons par la suite.

Voici alors la formule de sommation de Poisson, que l'on commence par énoncer en dimension 1 :

Proposition II.4

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est admissible alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$.

Les hypothèses sont un peu fortes ici car la formule de sommation de Poisson peut être valable pour d'autres fonctions vérifiant moins de contraintes, mais cet énoncé permet une démonstration assez simple et est suffisant pour l'utilisation que l'on fera plus tard de cette formule.

Démonstration : Posons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$. Cette fonction est bien définie sur \mathbb{R} car la série de fonctions ainsi définie converge uniformément sur tout segment. En effet, pour $A > 0$ et $x \in [-A, A]$, on a : $\forall n \geq 2A, |x+n| \geq n - |x| \geq n - A$ donc $|x+n| \geq \frac{n}{2}$ et $|f(x+n)| \leq \frac{C}{(1+\frac{n}{2})^{\delta+1}}$ par hypothèse. F est clairement 1-périodique par construction et on peut exprimer sa transformée de Fourier sur \mathbb{Z} :

$\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{F}(n) := \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx} dx = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)e^{-2i\pi nx} dx$. Or, d'après l'hypothèse sur f , il y a convergence normale sur le compact $[0, 1]$ donc on peut intervertir somme et intégrale, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{F}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u)e^{-2i\pi nu} e^{2i\pi nk} du \text{ par changement de variable}$$

affine et 1-périodicité de F , d'où : $\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{F}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2i\pi nu} du := \hat{f}(n)$.

Enfin, d'après l'hypothèse de convergence, $\sum \hat{F}(n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement sur \mathbb{R} donc F est égale à sa série de Fourier : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)e^{2i\pi nx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$ et, en évaluant en $x = 0$, on obtient finalement que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$. \square

Cette formule est en fait plus générale et s'écrit en dimension d quelconque en utilisant essentiellement la même démonstration. Il existe même une version de cette formule de sommation de Poisson sur un réseau de \mathbb{R}^d qui sera essentielle pour la suite :

Proposition II.5

Si Λ est un réseau de \mathbb{R}^d et f est une fonction admissible alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{m \in \Lambda} f(x+m) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{m' \in \Lambda^*} \hat{f}(m')e^{2i\pi m' \cdot x} \text{ où } \Lambda^* := \{a \in \mathbb{R}^d, \forall y \in \Lambda, a \cdot y \in \mathbb{Z}\} \text{ est le réseau dual de } \Lambda.$$

Démonstration : Quitte à changer d'échelle (ce qui ne modifie pas le réseau) et à changer de représentants de la base, on peut supposer que $|\Lambda| = 1$ et que les bases de Λ et Λ^* sont communes. On est alors ramené à montrer que $\sum_{m \in \Lambda} f(x+m) = \sum_{m' \in \Lambda^*} \hat{f}(m')e^{2i\pi m' \cdot x}$. Pour cela, on définit le cube fondamental (de côté 1) $Q_n := \{x \in \mathbb{R}^d, \forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, x_j \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ et les translatés de ce cube $Q_n - m$ (où les $m \in \Lambda$) qui sont deux à deux disjoints (car $|\Lambda| = 1$) et d'union \mathbb{R}^d tout entier. On commence par observer que, comme f est admissible, la série $\sum_{m' \in \Lambda^*} \hat{f}(m')e^{2i\pi m' \cdot x}$ converge absolument sur \mathbb{R}^d . De plus, on a :

$$\int_{Q_n} \left| \sum_{m \in \Lambda} f(x+m) \right| dx \leq \sum_{m \in \Lambda} \int_{Q_n} |f(x+m)| dx = \sum_{m \in \Lambda} \int_{Q_n - m} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < +\infty$$

en supposant que le réseau est un pavage de \mathbb{R}^d et d'après l'hypothèse faite sur f . On peut alors en déduire les coefficients de Fourier de la somme $\sum_{m \in \Lambda} f(x+m)$ puisque, pour $m \in \Lambda$, on a :

$$\int_{Q_n} \left(\sum_{m' \in \Lambda^*} \hat{f}(m')e^{2i\pi m' \cdot x} \right) dx = \sum_{m' \in \Lambda^*} \int_{Q_n - m'} \hat{f}(m')e^{2i\pi m' \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(m')e^{2i\pi m' \cdot x} dx = \hat{f}(m').$$

Ainsi, $\sum_{m \in \Lambda} f(x+m) = \sum_{m' \in \Lambda^*} \hat{f}(m')e^{2i\pi m' \cdot x}$ en écrivant le développement en série de Fourier de cette somme, ce qui permet de conclure. \square

II.2 Le théorème de Cohn-Elkies

Nous pouvons maintenant énoncer puis démontrer le théorème de Cohn-Elkies (ne datant que de 2003 et issu de [2]) qui donne une majoration de la densité optimale Δ_d en dimension d à partir de fonctions suffisamment régulières :

Théorème II.6

Si f est une fonction admissible sur \mathbb{R}^d , à valeurs réelles, non nulle et est telle que :

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } \|x\| \geq 1, \\ \hat{f}(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1)$$

alors la densité optimale vérifie $\Delta_d \leq \frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \text{Vol}(\mathcal{B}_d(0, 1))$.

On remarque que pour une telle fonction, comme $\hat{f} \geq 0$ et $\hat{f} \neq \tilde{0}$ (sinon $f = \tilde{0}$), $f(0) > 0$ car $f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) dx$ d'après le théorème d'inversion de Fourier : le résultat reste donc valable si $\hat{f}(0) = 0$ par convention car la quantité $\frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$ vaut alors $+\infty$.

Démonstration : On commence par se restreindre aux empilements périodiques. Un tel empilement peut-être vu comme étant construit à partir d'un réseau Λ que l'on translate une infinité de fois dans des directions données par des vecteurs u_1, \dots, u_N , qui sont choisis tels que la différence de deux de ces vecteurs n'est pas dans Λ . On peut remarquer que ces vecteurs unitaires forment un paralléloétope fondamental si on les prend avec la même origine. L'empilement ainsi construit est donc périodique.

Par commodité pour la suite de la démonstration, on effectue un changement d'échelle global de sorte que les sphères de l'empilement \mathcal{P} associé au réseau soient de rayon $1/2$ au lieu de 1 , ce qui ne change pas la densité globale de cet empilement.

On observe alors que le nombre de centres de sphères (c'est-à-dire le nombre de points du réseau Λ) par unité de volume est égal à $\frac{N}{2^d |\Lambda|}$. En effet, par construction, ce nombre est, sans changement d'échelle, égal à $\frac{N}{|\Lambda|}$ puisque $|\Lambda|$ est le volume du paralléloétope fondamental qui contient N points du réseau. Le changement d'échelle d'un facteur $1/2$ entraîne alors une modification de ce nombre d'un facteur $(1/2)^d$ puisque l'espace considéré est de dimension d .

Par conséquent, la densité de l'empilement vaut : $\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{\pi^{d/2} N}{2^d \Gamma(1 + \frac{d}{2}) |\Lambda|}$ d'après la proposition (I.9).

Il reste alors à majorer la quantité $\frac{N}{|\Lambda|}$.

Pour cela, on considère f une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé. En particulier, elle vérifie celles de la formule de sommation de Poisson établie précédemment, ce qui donne :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \sum_{x \in \Lambda} f(x + u) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda^*} e^{2i\pi x \cdot u} \hat{f}(x).$$

En particulier, on applique cette égalité aux $u := u_j - u_k$ puis on somme les égalités obtenues pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ pour en déduire que :

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2} \sum_{x \in \Lambda} f(x + u_j - u_k) &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda^*} \sum_{(j,k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2} e^{-2i\pi x \cdot u_j} e^{2i\pi x \cdot u_k} \hat{f}(x) \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda^*} \sum_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} e^{-2i\pi x \cdot u_j} \sum_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} e^{2i\pi x \cdot u_j} \hat{f}(x) \\ \text{donc } \sum_{(j,k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2} \sum_{x \in \Lambda} f(x + u_j - u_k) &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda^*} \left| \sum_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} e^{2i\pi x \cdot u_j} \right|^2 \hat{f}(x). \end{aligned}$$

Or, pour chaque terme du membre de gauche, $\|x + u_j - u_k\| < 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $j = k$ car les sphères sont prises de rayon $1/2$ ici. Comme $f(x) \leq 0$ si $\|x\| \geq 1$ et $f(0) > 0$ par hypothèses, ce qui donne que

$$Nf(0) \geq \sum_{(j,k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2} \sum_{x \in \Lambda} f(x + u_j - u_k).$$

De plus, chaque terme du membre de droite de l'égalité précédente est positif d'après l'hypothèse sur \hat{f} donc, pour tout $x \in \Lambda^*$, $\left| \sum_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} e^{-2i\pi x \cdot u_j} \right|^2 \hat{f}(x) \geq \hat{f}(0)$, d'où : $\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda^*} \left| \sum_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} e^{2i\pi x \cdot u_j} \right|^2 \hat{f}(x) \geq \frac{N^2 \hat{f}(0)}{|\Lambda|}$.

On en déduit alors que $Nf(0) \geq \frac{N^2 \hat{f}(0)}{|\Lambda|}$ donc que $\frac{N}{|\Lambda|} \leq \frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$.

Finalement, $\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{\pi^{d/2} N}{2^d \Gamma(1 + \frac{d}{2}) |\Lambda|} \leq \frac{\pi^{d/2} f(0)}{2^d \Gamma(1 + \frac{d}{2}) \hat{f}(0)}$ pour tout empilement \mathcal{P} basé sur un réseau périodique.

Enfin, il n'est pas nécessaire de faire un raisonnement supplémentaire pour les empilements non périodiques car on peut voir dans [2] que les empilements périodiques peuvent être construits de sorte que leurs densités se rapprochent arbitrairement de la densité Δ_d . On en déduit donc la majoration souhaitée :

$$\Delta_d \leq \frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \text{Vol}(\mathcal{B}_d(0, 1)). \quad \square$$

Ce résultat de Cohn et Elkies du début des années 2000 est très puissant pour résoudre le problème d'empilement des sphères en dimension d quelconque : si on connaît un empilement admettant une densité qui semble optimale alors, si on trouve une bonne fonction f à laquelle appliquer ce théorème et que la quantité $\frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \text{Vol}(\mathcal{B}_d(0, 1))$ est égale à la densité de l'empilement précédent, le problème est résolu.

Cependant, trouver une telle fonction est très difficile (une telle fonction n'est *a priori* pas triviale) et n'a été fait à ce jour qu'en dimensions 1, 8 et 24... On peut par exemple présenter le cas où $d = 1$ qui est

une application élémentaire du théorème de Cohn-Elkies. Considérons pour cela la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Un simple calcul d'intégrales donne que sa transformée de Fourier est $\hat{f}_1(x) = \frac{\sin(\pi x)^2}{\pi^2 x^2}$ et on vérifie facilement que f_1 est admissible avec $f_1(0) = \hat{f}_1(0) = 1$, $f_1(x) \leq 0$ si $|x| \geq 1$ et $\hat{f}_1(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de Cohn-Elkies, $\Delta_1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \times \frac{1}{2} \times \frac{f_1(0)}{\hat{f}_1(0)} = 1$.

Mais en dimensions 2 et 3 pour lesquelles le problème est résolu, on ne connaît pour le moment pas de bonne fonction pour conclure en utilisant ce théorème...

III Introduction aux formes modulaires

Pour construire une fonction qui convient pour appliquer le théorème de Cohn-Elkies en dimension 8 et obtenir une bonne majoration de la densité, nous allons avoir besoin d'introduire au préalable les formes modulaires qui ont des propriétés de symétrie intéressantes. Plus généralement, ces fonctions particulières ont des applications dans de nombreux domaines des mathématiques (elles ont notamment servi à Wiles pour sa démonstration du grand théorème de Fermat).

III.1 Définitions et développement de Fourier

Dans cette partie, nous noterons le groupe modulaire $\Gamma_1 := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: il s'agit de l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 (matrices inversibles dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).

À une matrice $\gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on associe la fonction, aussi notée γ , définie par sur le demi-plan de Poincaré par $\gamma : z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$ (γ est à valeurs dans \mathbb{H} car $\mathrm{Im}(\gamma(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$ si $z \in \mathbb{H}$). On peut remarquer que les matrices γ et $-\gamma$ agissent exactement de la même manière sur \mathbb{H} : il peut alors être pratique de travailler avec le groupe quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, défini par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{-1, 1\}$ afin que deux matrices dans ce quotient ne puissent pas agir de la même façon sur \mathbb{H} .

Une fois ces premières notations introduites, définissons la notion de *forme modulaire* :

Définition III.1

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et Γ un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$.

Une forme modulaire de poids k sur Γ est une fonction f holomorphe sur l'espace \mathbb{H} telle que :

$$\textcircled{1} \forall \gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \frac{1}{(cz+d)^k} f(\gamma(z)) \text{ et}$$

$$\textcircled{2} \forall C > 0, f(x+iy) = O(e^{Cy}) \text{ et } f(x+iy) = O(e^{C/y}) \text{ sur } y \rightarrow i\infty.$$

On note $M_k(\Gamma)$ l'ensemble des formes modulaires de poids k sur Γ .

On pourrait également poser une définition semblable en n'imposant aux fonctions que d'être méromorphes sur \mathbb{H} et en retirant les contraintes asymptotiques (et parler plus généralement de *fonctions faiblement modulaires*) mais cela ne sera pas nécessaire pour la définition de la fonction à laquelle on appliquera le théorème de Cohn-Elkies.

On observe aussi que si le poids k d'une forme modulaire f est impair et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ alors la relation de la définition ci-dessus donne que f est égale à son opposée sur \mathbb{H} donc que $f = \tilde{0}$, ce qui n'est pas intéressant : on considérera donc des formes modulaires de poids pairs dans la suite.

De cette définition d'une forme modulaire, on peut facilement obtenir les propriétés suivantes :

Proposition III.2

Si f est une forme modulaire de poids k sur Γ et g est une forme modulaire de poids k' sur Γ alors fg est une forme modulaire de poids $k+k'$ sur Γ et $\frac{1}{f}$ est une forme modulaire de poids $-k$ sur Γ si f ne s'annule de plus pas sur \mathbb{H} .

Démonstration : Pour le produit, les propriétés d'holomorphic et de comportement asymptotique sont clairement vérifiées. Il suffit alors d'observer que pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$(fg)(z) = f(z)g(z) = \frac{1}{(cz+d)^k} f(\gamma(z)) \frac{1}{(cz+d)^{k'}} g(\gamma(z)) = \frac{1}{(cz+d)^{k+k'}} (fg)(\gamma(z)) \text{ donc } fg \text{ est une forme modulaire de poids } k+k' \text{ sur } \Gamma.$$

Pour le passage à l'inverse, les propriétés asymptotiques restent valides et le fait que $\frac{1}{f}$ soit holomorphe sur \mathbb{H} est clair puisque f ne s'y annule pas. Puis, pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)(z) = \frac{1}{f(z)} = (cz+d)^k \frac{1}{f(\gamma(z))} = \frac{1}{(cz+d)^{-k}} \frac{1}{f}(\gamma(z)) \text{ donc } \frac{1}{f} \text{ est une forme modulaire de poids } -k \text{ sur } \Gamma. \square$$

Le fait que f ne s'annule pas est assez contraignant et on peut s'en affranchir en définissant les formes *faiblement* modulaires qui ont exactement les mêmes propriétés à vérifier sauf qu'il suffit que ces fonctions soient méromorphes sur \mathbb{H} .

Définition III.3

On appelle sous-groupe de congruence un sous-groupe Γ de Γ_1 contenant, pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$, le groupe $\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [N] \right\}$.

Par exemple, $\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1, c \equiv 0[N] \right\}$ est un sous-groupe de congruence.

Proposition III.4

Si f est une forme modulaire de poids k sur Γ_1 alors f admet un développement de la forme :
 $\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$ où $q := e^{2i\pi n z}$, appelé développement de Fourier de la forme modulaire f .

Démonstration : En effet, on observe que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans Γ_1 donc, comme f est une forme modulaire de poids k sur Γ_1 , on a : $\forall z \in \mathbb{H}, f\left(\frac{1+z}{1}\right) = (1)^k f(z)$ donc $f(z+1) = f(z)$. La fonction f est 1-périodique donc c'est une fonction de $q := e^{2i\pi n z}$. La fonction étant holomorphe, on peut donc écrire son développement en série entière par rapport à la variable q , d'où l'existence de ce développement de Fourier pour une forme modulaire sur Γ_1 . \square

On peut remarquer (voir [10]) que $M_k(\Gamma_1)$ (l'ensemble des formes modulaires de poids k sur Γ_1) est de dimension finie pour tout entier k grâce à la condition d'holomorphicité des formes modulaires (la dimension est même nulle si k est impair d'après une remarque précédente) mais on ne développe pas ce résultat ici.

On peut également remarquer que la théorie des formes modulaires se base implicitement sur une action de groupe sur $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ de manière générale. Pour $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, k un entier et f une fonction holomorphe sur \mathbb{H} , on pose l'application $f_{\gamma,k} : z \in \mathbb{H} \mapsto \det(\gamma)^{k-1} \frac{f(\gamma(z))}{(cz+d)^k}$. L'application $f \mapsto f_{\gamma,k}$ définit en effet une action de groupe sur $\text{SL}_2(\mathbb{R})$: pour $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $z \in \mathbb{H}$, on a $f_{\gamma_1 \times I_2, k}(z) = f_{\gamma_1, k}(z)$ clairement et $f_{\gamma_1 \times \gamma_2, k}(z) = \det(\gamma_1)^{k-1} \det(\gamma_2)^{k-1} \frac{f(\gamma_1(\gamma_2(z)))}{((a'c+dc')z+cb'+dd')^k} = \det(\gamma_2)^{k-1} \frac{1}{(c'z+d')^k} \det(\gamma_1)^{k-1} \frac{f(\gamma_1(\gamma_2(z)))}{(c\gamma_2(z)+d)^k}$ donc $f_{\gamma_1 \times \gamma_2, k} = (f_{\gamma_1, k})_{\gamma_2, k}$.

De plus, une forme modulaire de poids k sur Γ vérifie : $\forall \gamma \in \Gamma, f_{\gamma, k} = f$ (ce qui permet d'alléger l'écriture dans la suite).

III.2 Séries d'Eisenstein

Présentons maintenant un exemple important de formes modulaires. La remarque concernant l'action de groupe évoquée dans la sous-partie précédente permet de présenter l'origine des séries d'Eisenstein. Dans le cas où $\Gamma = \Gamma_1$, le stabilisateur de l'infini est l'ensemble des matrices de la forme $\pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{Z}$ puisque si $k \neq 0$, $\frac{1}{(cz+d)^k} = \pm\infty \Leftrightarrow c = 0$ (en regardant l'application $\tilde{\Gamma}_{\gamma,k}$) et les coefficients matriciels sont entiers. En se plaçant sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, on observe que ce stabilisateur est donc le groupe engendré par la matrice $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut alors voir que $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$: la ligne du bas est invariante par multiplication à gauche par T^n et réciproquement, si deux matrices γ_1 et γ_2 de Γ_1 ont la même ligne inférieure alors, en gardant les notations utilisées précédemment, $a'd - b'c = ad - bc = 1$ donc $(a' - a)d - (b' - b)c = 0$ mais c et d sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $b' - b = nd$ et $a' - a = nc$, d'où $\gamma_2 = T^n \times \gamma_1$. Ainsi, γ_1 et γ_2 ont la même ligne inférieure si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma_1 = T^n \gamma_2$. En faisant la somme des fonctions $\tilde{\Gamma}_{\gamma,k}$ pour $\gamma \in \Gamma_1/\Gamma_\infty$ (le quotient par le stabilisateur de l'infini), on définit alors une série d'Eisenstein :

Définition III.5

Soit $k \in 2\mathbb{N}$ tel que $k \geq 4$. On appelle série d'Eisenstein de poids k la fonction définie sur \mathbb{H} par :

$$\forall z \in \mathbb{H}, E_k(z) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{PGCD}(m,n)=1}} \frac{1}{(mz+n)^k}.$$

On observe que cette fonction est bien définie sur \mathbb{H} puisque les dénominateurs sont non nuls (étant donné que chaque $\frac{-n}{m} \notin \mathbb{H}$ pour $m \neq 0$) et la somme converge par convergence absolue (par comparaison usuelle avec les séries de Riemann puisque $k \geq 4$).

De plus, on peut donner une autre expression de cette somme faisant intervenir la fonction zêta de Riemann : $\forall z \in \mathbb{H}, E_k(z) := \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k}$. En effet, comme pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)$, il existe un couple d'entiers $(m',n') \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)$ premiers entre eux tels que $\mathrm{PGCD}(m,n) \times (m',n') = (m,n)$.

Les sommes précédentes sont donc proportionnelles et, en prenant des valeurs particulières de z , on peut remarquer que le coefficient de proportionnalité est bien égal à $\zeta(k)$.

Faisons maintenant le lien entre ces séries et les formes modulaires :

Proposition III.6

La série d'Eisenstein de poids k (≥ 4) est une forme modulaire de poids k sur Γ_1 .

Démonstration : On commence par vérifier que E_k est bien holomorphe sur \mathbb{H} puisque les seuls pôles qu'elle admet sont réels donc n'appartiennent pas à \mathbb{H} .

Ensuite, on écrit que, pour tous $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1$ et $z \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} \frac{E_k(\gamma(z))}{(cz+d)^k} &= \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(cz+d)^k (m\gamma(z) + n)^k} = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(n(cz+d) + m(az+b))^k} \\ &= \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(m'z + n')^k} \end{aligned}$$

où $(m' \ n') = (m \ n) \times \gamma$ parcourt aussi $\mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)$, donc $\frac{E_k(\gamma(z))}{(cz+d)^k} = E_k(z)$. Les propriétés asymptotiques étant faciles à vérifier, on en déduit bien que E_k est une forme modulaire de poids k sur Γ_1 . \square

Ainsi, ces séries d'Eisenstein admettent chacune un développement de Fourier :

Proposition III.7

Pour $k \in 2\mathbb{N}$ tel que $k \geq 4$, la série d'Eisenstein E_k admet le développement de Fourier suivant :

$$\forall z \in \mathbb{H}, E_k(z) = \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \left(\frac{-B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n \right) \text{ où les } B_k \text{ sont les nombres de Bernoulli (définis par l'identité : } \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \text{) et } \sigma_{k-1}(n) := \sum_{d \in \mathcal{D}(n)} d^{k-1}.$$

Démonstration : On commence par rappeler une formule d'Euler : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+n} = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$

(la série n'est pas absolument convergente mais ce n'est pas gênant car cette égalité justifie la convergence).

On observe ensuite que le second terme se réécrit, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}$ donc

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \pi i \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1} = \pi i \frac{q+1}{q-1} = -i\pi(1+q)(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} q^r) = -i\pi(1 + 2 \sum_{r=1}^{+\infty} q^r) = -2i\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{+\infty} q^r \right).$$

Ainsi, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+n} = -2i\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{+\infty} q^r \right)$ et on dérive $k-1$ fois pour obtenir :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (k-1)! \frac{(-1)^{k-1}}{(z+n)^k} = -2i\pi \sum_{r=1}^{+\infty} (2\pi i r)^{k-1} q^r \text{ puis } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{+\infty} r^{k-1} q^r.$$

On en déduit que $E_k(z) = \frac{1}{\zeta(k)} \left(\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^k} + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^k} \right) = 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^k}$ donc

$$E_k(z) = 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} r^{k-1} q^{rm}. \text{ Enfin, on peut voir dans dans [6] que } \zeta(k) = -\frac{(2i\pi)^k}{2k!} B_k \text{ et on}$$

en déduit le développement de Fourier de E_k en factorisant : $E_k(z) = \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \left(\frac{-B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n \right)$. \square

Par exemple, les séries d'Eisenstein de poids 4 et 6 admettent des développements de Fourier de la forme : $E_4(z) = 1 + 240q + 2160q^2 + \dots$ et $E_6(z) = 1 - 504q - 16632q^2 + \dots$.

Dans le cas où $k = 2$, on ne peut pas définir de série d'Eisenstein comme précédemment car la série n'est alors pas absolument convergente. En revanche, on peut définir E_2 directement à partir de son développement de Fourier, en prenant formellement $k = 2$ ci-dessus (astuce de Hecke) :

Définition III.8

La série d'Eisenstein de poids 2 est définie par : $\forall z \in \mathbb{H}, E_2(z) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n)q^n$.

Cependant, E_2 n'est pas une forme modulaire sur Γ_1 mais elle l'est presque puisqu'elle est holomorphe sur \mathbb{H} et vérifie : $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1, \forall z \in \mathbb{H}, E_2(\gamma(z)) = (cz + d)^2 E_2(z) - \frac{\pi ic(cz+d)}{\zeta(2)}$. On peut trouver une démonstration assez élémentaire de cette identité dans [10].

C'est ce dernier terme (non nul) qui fait que E_2 n'est qu'une forme *quasi-modulaire* et on peut rendre cette forme modulaire en corrigeant ce terme supplémentaire.

III.3 Fonctions thêta

D'autres formes modulaires, également utiles pour la démonstration de Viazovska du problème d'em-
pilement des sphères en dimension 8 (et plus généralement pour d'autres problèmes mathématiques), sont les fonctions thêta. Ces fonctions sont de manière théoriques construites à partir de formes quadratiques mais nous ne développerons pas cette théorie ici pour nous concentrer sur les fonctions thêta utiles pour le problème de ce stage.

Définition III.9

On appelle fonction thêta de Jacobi la fonction θ_{00} définie sur \mathbb{H} par :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \theta_{00}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}, \text{ en conservant la notation } q := e^{2i\pi z}.$$

On peut remarquer que cette fonction θ_{00} est définie par son développement de Fourier, de la forme $\theta_{00}(z) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$ et qu'elle a des propriétés de modularité :

Proposition III.10

La fonction θ_{00} vérifie : $\forall z \in \mathbb{H}, \theta_{00}(z + 1) = \theta_{00}(z)$ et $\theta_{00}\left(\frac{-1}{4z}\right) = \left(\frac{2z}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_{00}(z)$: c'est une forme modulaire de poids $\frac{1}{2}$ (ce qui signifie que θ_{00}^2 est une forme modulaire de poids 1, pour le groupe $\Gamma_0(4)$).

Démonstration : La 1-périodicité est claire puisque $\theta_{00}(z)$ ne dépend que de q qui est une fonction 1-périodique de z . Ensuite, pour obtenir l'autre égalité, on applique la formule de sommation de Poisson sur \mathbb{R} à la fonction f définie par $f(x) = e^{-\pi tx^2}$ où $t > 0$ est fixé (les hypothèses d'application de cette formule étant clairement vérifiées par cette fonction gaussienne) : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$. Calculons alors la transformée de Fourier de f : pour $y \in \mathbb{R}$, on a $\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi tx^2} e^{-2i\pi xy} dx$ et on effectue le changement de variable affine $u = \sqrt{t}(x - \frac{y}{t}i)$ pour obtenir $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi y(\frac{u}{\sqrt{t}} + \frac{y}{t}i)} e^{-\pi t(\frac{u^2}{t} + \frac{2uyi}{t\sqrt{t}} - \frac{y^2}{t^2})} \frac{du}{\sqrt{t}}$ puis $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi y \frac{u}{\sqrt{t}}} e^{-2\pi \frac{y^2}{t}} e^{-\pi u^2} e^{\frac{2\pi uy}{\sqrt{t}}} e^{\frac{\pi y^2}{t}} \frac{du}{\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{\pi y^2}{t}}}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du = \frac{e^{-\frac{\pi y^2}{t}}}{\sqrt{t}}$. Par conséquent, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi tn^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\frac{\pi n^2}{t}}}{\sqrt{t}}$. Nous pouvons alors faire le lien avec la fonction θ_{00} puisque $\theta_{00}(\frac{-2}{4it}) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-2 \times 2i\pi n^2}{4it}}$ donc $\theta_{00}(\frac{-2}{4it}) = \sqrt{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi tn^2}$. De même, on en déduit que $\theta_{00}(\frac{it}{2}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi \frac{it}{2} n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi tn^2}$. Ainsi, $\sqrt{t}\theta_{00}(\frac{it}{2}) = \theta_{00}(\frac{-2}{4it})$: le résultat est vérifié pour $z = \frac{it}{2}$. t étant un réel strictement positif quelconque, on en déduit que le résultat est vrai sur $i\mathbb{R}_+^*$ donc sur l'ouvert connexe \mathbb{H} tout entier d'après le théorème du prolongement analytique. L'identité $\theta_{00}(\frac{-1}{4z}) = (\frac{2z}{i})^{\frac{1}{2}} \theta_{00}(z)$ valable pour tout $z \in \mathbb{H}$ indique alors que θ_{00}^2 est une forme modulaire de poids 1 puisque cette fonction est également holomorphe sur \mathbb{H} et puisque les matrices $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$ et $(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix})$ engendrent le groupe modulaire $\Gamma_0(4)$. \square

On peut ensuite définir d'autres fonctions thêta qui sont également utilisées dans la preuve de Viazovska.

Définition III.11

On définit les fonctions thêta θ_{01} et θ_{10} sur \mathbb{H} par :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \theta_{01}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \text{ et } \theta_{10}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \text{ toujours avec } q := e^{2i\pi z}.$$

Les matrices $T := (\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ et $S := (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix})$, qui engendrent le groupe modulaire Γ_1 , agissent sur ces fonctions à la puissance 4 selon les relations :

Proposition III.12

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a : $\theta_{00}^4(z+1) = \theta_{01}^4(z)$; $\theta_{01}^4(z+1) = \theta_{00}^4(z)$; $\theta_{10}^4(z+1) = -\theta_{10}^4(z)$;

$$\theta_{00}^4(\frac{-1}{4z}) = -z^2 \theta_{00}^4(z) ; \theta_{01}^4(\frac{-1}{4z}) = -z^2 \theta_{10}^4(z) \text{ et } \theta_{10}^4(\frac{-1}{4z}) = -z^2 \theta_{01}^4(z).$$

Démonstration : Les 3 premières identités s'obtiennent de façon élémentaire en revenant à la définition de $q := e^{2i\pi z}$: par exemple, $e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})^2(z+1)} = e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})^2 z} e^{2i\pi(n^2+n+\frac{1}{4})z} = e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})^2 z} e^{i\frac{\pi}{2}z}$ donc

$e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})^2(z+1)} = -e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})^2z}$ et en sommant pour $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit la troisième identité.

Pour les 3 autres, comme nous l'avons vu à la proposition précédente concernant la fonction thêta de Jacobi, l'idée est simplement d'appliquer la formule de sommation de Poisson. \square

Enfin, on peut également définir la fonction thêta associée à un réseau :

Définition III.13

Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^d . La fonction thêta du réseau, notée θ_Λ , est définie sur \mathbb{H} par :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \theta_\Lambda(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} N_\Lambda(n)q^n \text{ où } N_\Lambda(n) := \text{Card}(\{x \in \Lambda, x \cdot x = 2n\}).$$

Il s'agit donc de la série génératrice du nombre de points du réseau de longueur $\sqrt{2n}$.

Introduire cette fonction n'est pas fondamental dans la résolution du problème d'empilement des sphères en dimension 8 mais permet de prendre un peu de recul. En effet, en s'inspirant des fonctions thêta précédentes, on peut montrer, à nouveau grâce à la formule de sommation de Poisson, que la fonction θ_Λ d'un réseau Λ vérifie : $\forall z \in \mathbb{H}, \theta_\Lambda(\frac{-1}{4z}) = (-iz)^{\frac{d}{2}} \frac{\theta_{\Lambda^*}(z)}{|\Lambda|}$ (voir [3]). On en déduit qu'il s'agit d'une forme modulaire de poids $\frac{d}{2}$. Or, en pratique, Cohn (dans [1] notamment) s'est rendu compte que les réseaux donnant les empilements les plus denses sont unimodulaires et pairs. Pour que cela puisse être le cas, l'identité précédente impose donc que d soit divisible par 8 : si le réseau Λ vérifie $\Lambda = \Lambda^*$ alors pour tout $z \in \mathbb{H}, \theta_\Lambda(\frac{-1}{4z}) = (-iz)^{\frac{d}{2}} \theta_\Lambda(z)$ avec θ_Λ holomorphe sur \mathbb{H} . Ceci donne ainsi un début d'explication du fait que ce sont les dimensions 8 et 24 (divisibles par 8 et admettant effectivement des réseaux unimodulaires pairs) qui ont été récemment résolues...

IV Résultat en dimension 8 : la démonstration de Viazovska

Maintenant que nous avons introduit les principaux outils nécessaires à la résolution du problème d'empilement des sphères en dimension $d = 8$, nous pouvons énoncer le résultat dans cette dimension particulière et donner les arguments de la preuve de Viazovska.

IV.1 L'empilement selon un réseau particulier en dimension 8

Commençons par présenter le réseau Λ_8 et l'empilement associé E_8 .

Définition IV.1

On appelle réseau Λ_8 la partie de \mathbb{R}^8 donnée par :

$$\Lambda_8 := \left\{ (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8, \sum_{n=1}^8 x_n \equiv 0[2] \right\}.$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'un réseau, en exhibant par exemple une base de réseau :

Proposition IV.2

Λ_8 admet pour base $(a_1, \dots, a_8) \in \mathbb{R}^8 \times \dots \times \mathbb{R}^8$, donnée par :

$$a_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, a_7 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } a_8 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Commençons par montrer que (a_1, \dots, a_8) forme une famille libre en considérant $(\alpha_1, \dots, \alpha_8) \in \mathbb{R}^8$ tel que $\sum_{n=1}^8 \alpha_n a_n = 0$. En observant ce que cette égalité de vecteurs donne coordonnée par coordonnée, on obtient directement $\alpha_8 = 0$ puis, en remontant les coordonnées, $\alpha_7 = 0$ jusqu'à $\alpha_1 = 0$, ce qui donne le résultat. Ensuite, on peut vérifier que Λ_8 est un sous-groupe de \mathbb{R}^8 puisque la somme de deux éléments de Λ_8 est clairement dans Λ_8 . Il reste à justifier que $\Lambda_8 = \mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_8$. L'inclusion $\mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_8 \subset \Lambda_8$ est claire car les a_n sont dans le sous-groupe Λ_8 . Pour l'inclusion réciproque, considérons $(x_1, \dots, x_8) \in \Lambda_8$. Si $(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{Z}^8$ alors la première coordonnée s'exprime en fonction de a_1 et a_8 et on en déduit une combinaison linéaire des a_n pour ce vecteur à coordonnées entières puisque $\sum_{n=1}^8 x_n \equiv 0[2]$. Si $(x_1, \dots, x_8) \in (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8$ alors la relation $\sum_{n=1}^8 x_n \equiv 0[2]$ n'est pas modifiée puisque $8 \times \frac{1}{2} = 4 \equiv 0[2]$ et on obtient un résultat similaire. Ainsi, Λ_8 est bien un réseau de \mathbb{R}^8 de rang 8, de base (a_1, \dots, a_8) . \square

On peut également remarquer que ce réseau est unimodulaire car le covolume associé est égal au déterminant de la matrice formée en accolant les vecteurs colonnes a_n , qui est égal à 1. Ce réseau est aussi pair car si $(x_1, \dots, x_8) \in \Lambda_8$ alors $\sum_{n=1}^8 x_n \equiv 0[2]$ donc $x \cdot x := \sum_{n=1}^8 x_n^2 \equiv 0[2]$ car $a \equiv 0[2] \Leftrightarrow a^2 \equiv 0[2]$ pour tout a entier, de façon élémentaire. Ces propriétés font de Λ_8 un réseau intéressant de \mathbb{R}^8 . On va donc étudier l'empilement associé à ce réseau. Toutefois, comme la distance minimale entre deux points du

réseau est de $\sqrt{2}$ (à cause de la contrainte de parité de la somme des coordonnées), ce n'est pas directement ce réseau que l'on va considérer :

Définition IV.3

On note E_8 l'empilement des sphères selon le réseau $\frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_8$.

Ce facteur multiplicatif $\frac{1}{\sqrt{2}}$ permet d'obtenir un empilement avec des sphères unitaires.

À titre culturel (en lien avec le problème du nombre de contacts), on peut remarquer qu'il y a 240 sphères tangentes à la sphère de centre 0 dans cet empilement : en effet, les points du réseau Λ_8 à distance $\sqrt{2}$ de l'origine sont ceux de coordonnées toutes entières avec nécessairement deux ± 1 et six zéros (il y en a $4 \times 8 \times 7 / (2 \times 1) = 112$) et ceux de coordonnées demi-entières soit toutes positives ou négatives (il y en a 2) soit avec 4 coordonnées positives et 4 négatives (il y en a $8 \times 7 \times 6 \times 5 / (4!) = 70$) soit avec 2 d'un signe et 6 du signe opposé (il y en a $2 \times 8 \times 7 / (2 \times 1) = 56$), ce qui fait $112 + 2 + 70 + 56 = 240$ points en tout.

Revenons maintenant au problème d'empilement en calculant la densité de cet empilement E_8 :

Proposition IV.4

L'empilement E_8 admet la densité $\Delta_{E_8} = \frac{\pi^4}{384} \approx 0,25$.

Démonstration : On applique simplement la proposition (I.9) à cet empilement en faisant attention au fait que le rayon à considérer dans le résultat de cette proposition est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et non 1 à cause du facteur multiplicatif dans la définition de l'empilement E_8 , ce qui donne : $\Delta_{E_8} = \frac{\pi^4}{4!|\Lambda_8|} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = \frac{\pi^4}{384}$ car $|\Lambda_8| = 1$. \square

IV.2 Construction d'une bonne fonction

Montrons maintenant que cette densité ne peut pas être dépassée pour un empilement de sphères en dimension 8, en donnant la démonstration réalisée par Viazovska dans [8] et les idées autour de celle-ci. Nous avons déjà vu dans la deuxième partie que l'objectif majeur de cette démonstration est de trouver une bonne fonction à laquelle appliquer le théorème de Cohn-Elkies et telle que la majoration soit égale à la densité de l'empilement E_8 .

La mathématicienne ukrainienne commence par reformuler le théorème de Cohn-Elkies de la façon suivante pour l'adapter au cas de la dimension 8 et de cet empilement :

Théorème IV.5

S'il existe une fonction radiale $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$ à valeurs réelles telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^8 \text{ tel que } \|x\| \geq \sqrt{2}, \\ \hat{g}(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^8, \\ g(0) = \hat{g}(0) = 1 \end{array} \right. \quad (2)$$

alors la densité optimale vérifie $\Delta_8 \leq \text{Vol}(\mathcal{B}_8(0, \frac{1}{\sqrt{2}})) = \Delta_{E_8}$.

Démonstration : Il s'agit simplement du théorème de Cohn-Elkies appliqué à la fonction f vérifiant $f(x) = g(\frac{x}{\sqrt{2}})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^8$. □

Le fait de se restreindre à une fonction radiale (c'est-à-dire telle que les valeurs qu'elle prend ne dépendent que de la norme des éléments de \mathbb{R}^8) est restrictif mais semble naturel si l'on veut montrer que c'est l'empilement E_8 qui est optimal, étant donné ses propriétés de symétrie. Par abus de notation, pour f une fonction radiale, on notera $f(r)$ pour $r \geq 0$ la valeur commune des $f(x)$ tels que $\|x\| = r$ ($x \in \mathbb{R}^8$).

Avant de donner la construction explicite de cette fonction s'appuyant notamment sur les formes modulaires, détaillons au préalable les idées de recherche d'une telle fonction "magique" (terme employé par Viazovska elle-même).

Pour cela, une observation fondamentale vient de la formule de sommation de Poisson : si g_Λ est une telle fonction "magique" en dimension 8 alors cette formule donne, pour un réseau unimodulaire Λ (tel que $\Lambda^* = \Lambda$), $\sum_{l \in \Lambda} g_\Lambda(l) = \sum_{m \in \Lambda^*} \hat{g}_\Lambda(m)$. Or, g_Λ ne prend que des valeurs négatives sauf en 0 et sa transformée de Fourier \hat{g}_Λ ne prend que des valeurs positives donc : $1 = g_\Lambda(0) \geq \sum_{l \in \Lambda} g_\Lambda(l) = \sum_{m \in \Lambda^*} \hat{g}_\Lambda(m) \geq \hat{g}_\Lambda(0) = 1$. On en déduit que les inégalités précédentes sont des égalités donc que g_Λ doit s'annuler sur tous les points non nuls du réseau et même que : $\forall l \in \Lambda \setminus \{0\}, g_\Lambda(l) = 0$ et $\forall m \in \Lambda^* \setminus \{0\}, \hat{g}_\Lambda(m) = 0$.

Dans le cas du réseau Λ_8 , les points sont de normes de la forme $\sqrt{2n}$ où $n \in \mathbb{N}$ (en effet, si $x \in \Lambda_8$ alors il existe des entiers m_1, \dots, m_8 tels que $x = \sum_{n=1}^8 m_n a_n$ donc $\|x\|^2 = 2 \sum_{n=1}^8 m_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 8} m_i m_j a_i \cdot a_j$ est un entier pair). La fonction que l'on recherche doit donc vérifier les conditions $g_\Lambda(\sqrt{2n}) = \hat{g}_\Lambda(\sqrt{2n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $g_\Lambda(0) = \hat{g}_\Lambda(0) = 1$. On peut même souhaiter imposer de plus que $g'_\Lambda(\sqrt{2n}) = \hat{g}'_\Lambda(\sqrt{2n}) = 0$ pour tout entier n supérieur à 2. Cela est très restrictif et peut permettre d'avoir de premières idées de

fonctions (ce type de conditions sur l'interpolation de Fourier fait l'objet de recherches et l'existence de ce type de fonctions n'a été démontrée qu'en 2019 à la suite de la résolution de l'empilement des sphères en dimension 24). Des conditions similaires peuvent être obtenues en d'autres dimensions et cela mène à des résolutions par restrictions linéaires, qui ont notamment été étudiées par Cohn et Elkies dans [2].

En dimension 8 toujours, Viazovska a alors eu une double idée qui permet de construire une fonction qui vérifie à la fois les conditions énoncées ci-dessus, et qui est radiale tout en respectant le fait que g_Λ doit être négative et de signe opposé à celui de sa transformée de Fourier (au moins sur $[\sqrt{2}, +\infty[$). Pour respecter les conditions d'annulation, l'idée est de forcer cela en utilisant un terme en sinus carré admettant ces zéros : il est de la forme $\sin^2(\frac{\pi r^2}{2})$. Puis on peut chercher une fonction vérifiant $\hat{g}_\Lambda = -g_\Lambda$ pouvant par exemple être construite à partir d'une transformée de Laplace d'une bonne fonction. En effet, on peut définir la transformée de Laplace d'une fonction holomorphe ψ sur \mathbb{R}_+ par : $\forall r > 0, f(r) = \int_0^{+\infty} \psi(it)e^{-t\pi r^2} dt$ et, en calculant sa transformée de Fourier, on obtient facilement que $\hat{f} = \frac{1}{i^2}f = -f$ si ψ vérifie les bonnes hypothèses, c'est-à-dire si ψ est une forme modulaire de poids -2 d'après une autre idée de Viazovska. Le produit du terme en sinus carré et d'une telle transformée de Laplace pourrait alors convenir.

Une idée supplémentaire de la chercheuse est alors de séparer cette fonction "magique" en une somme de deux fonctions selon leurs comportements par rapport à la transformée de Fourier. De manière générale, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$ radiale, on peut décomposer f de la forme $f = f_+ + f_-$ où $f_+ := \frac{f+\hat{f}}{2}$ et $f_- := \frac{f-\hat{f}}{2}$ avec f_+ de valeur propre 1 pour la transformée de Fourier et f_- de valeur propre -1 (en effet, $\hat{f}_+ = \frac{\hat{f}+\hat{\hat{f}}}{2} = \frac{\hat{f}+f}{2} = f_+$ puisque f est une fonction radiale : $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^8$ et $\hat{f}_- = \frac{\hat{f}-\hat{\hat{f}}}{2} = \frac{\hat{f}-f}{2} = -f_-$ de même). En effectuant cette séparation en deux termes, il reste à trouver les deux fonctions ψ_+ et ψ_- qui vont convenir. Cela est assez difficile et calculatoire. Nous en exposerons les grandes idées mais on pourra trouver une justification détaillée de la construction de Viazovska dans [5].

Présentons alors la construction de la fonction "magique" de Viazovska en la décomposant sous la forme d'une fonction f_+ de valeur propre 1 pour la transformée de Fourier et f_- de valeur propre -1 pour cette même transformation. Dans la suite, nous donnons les idées principales des preuves des résultats vérifiés par les fonctions introduites sans trop donner de détails moins importants, sur les calculs notamment.

IV.3 La fonction de valeur propre 1

Nous avons vu dans la sous-partie précédente que cette fonction f_+ peut prendre la forme du produit d'un sinus carré par une transformée de Laplace d'une bonne forme modulaire. Introduisons alors la forme modulaire choisie par Viazovska faisant intervenir les séries d'Eisenstein pour cela :

Définition IV.6

On note Φ_0 la fonction définie sur \mathbb{H} par :

$$\Phi_0 := \varphi_{-4}E_2^2 + 2\varphi_{-2}E_2 + j - 1728 \text{ où } \varphi_{-4} := \frac{1728E_4^2}{E_4^3 - E_6^2}, \varphi_{-2} := \frac{-1728E_4E_6}{E_4^3 - E_6^2} \text{ et } j := \frac{1728E_4^3}{E_4^3 - E_6^2}.$$

On peut directement observer qu'il ne s'agit en fait pas tout à fait d'une forme modulaire puisque E_2 n'est qu'une forme quasi-modulaire comme nous l'avons vu dans la troisième partie. Cette fonction paraît ici parachutée mais est en fait le fruit de calculs et raisonnements assez longs sur les formes modulaires. C'est le coeur de la thèse de Slipper (voir la partie 4.2 de [5]) : pour obtenir Φ_0 , l'étudiant d'Elkies part de l'expression théorique de f_+ de la forme $\forall r > 0, f_+(r) := \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} g(it)e^{\pi ir^2 z} dz$ où $g : u \mapsto \Phi_0\left(\frac{-1}{u}\right)u^2$, et il découpe l'intégrale en modifiant l'expression du sinus carré (ce que l'on fait ensuite pour montrer la proposition IV.8) pour en déduire des équations fonctionnelles sur g et notamment la 1-périodicité de la fonction $g : u \mapsto \Phi_0\left(\frac{-1}{u}\right)u^2$. Cela donne l'idée que cette fonction doit admettre un développement de Fourier et qu'elle pourrait être une forme modulaire. L'astuce est alors d'essayer d'écrire la forme modulaire g de poids 1 comme un polynôme en E_4 et E_6 tout en faisant intervenir la forme quasi-modulaire E_2 (puisque ces séries vérifient des équations fonctionnelles similaires à celles vérifiées par g d'après les calculs de Slipper). En connaissant le poids que doit avoir la forme quasi-modulaire et ceux de ces séries d'Eisenstein ainsi qu'en écrivant le début de leurs développements de Fourier, on peut avoir une idée de comment les articuler et des coefficients à utiliser... Nous nous contentons dans la suite de vérifier que cette fonction convient pour résoudre notre problème.

Une fois Φ_0 définie, nous pouvons donner la définition de la fonction f_+ (on rappelle qu'on construit une fonction radiale sur \mathbb{R}^8 donc on peut l'écrire comme fonction sur \mathbb{R}_+) :

Définition IV.7

Pour $r > \sqrt{2}$, on définit f_+ par $f_+(r) := -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right)z^2 e^{\pi ir^2 z} dz$.

Dans son article [8], la mathématicienne n'introduit pas cette fonction directement sous cette forme mais donne une forme valable sur \mathbb{R}_+ permettant de vérifier plus facilement que f_+ est de valeur propre 1 pour la transformée de Fourier. On redéfinit ici la fonction f_+ différemment et on vérifie ensuite que les deux définitions coïncident sur $]\sqrt{2}, +\infty[$:

Proposition IV.8

La fonction f_+ définie pour $r \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f_+(r) := \int_{-1}^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz + 2 \int_i^{i\infty} \Phi_0(z) e^{\pi i r^2 z} dz \text{ vérifie } f_+ \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+) \text{ avec } \hat{f}_+ = f_+.$$

Démonstration : On commence par vérifier que la fonction f_+ ainsi introduite est bien définie puisque, par construction, $\Phi_0(z) = O(e^{-2\pi iz})$ donc les intégrales sont bien convergentes.

$\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$

Ensuite, pour montrer que la fonction est dans la classe de Schwartz, l'idée est d'utiliser les coefficients de Fourier de Φ_0 et de les encadrer pour en déduire une bonne majoration de $|f_+(r)|$ et pour ses dérivées successives (voir [8] pour plus de détails). Calculons maintenant la transformée de Fourier de f_+ , toujours à partir de cette définition en somme de quatre intégrales. Pour cela, il faut se rappeler que la transformée de Fourier \mathcal{F} d'une fonction gaussienne est une fonction gaussienne : $\mathcal{F}(r \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{\pi i r^2 z})(t) = z^{-4} e^{\pi i t^2 \frac{-1}{z}}$ pour t un réel positif et z un complexe non nul. On en déduit alors que, pour $t > 0$:

$$\hat{f}_+(t) = \int_{-1}^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right)(z+1)^2 z^{-4} e^{\pi i t^2 \frac{-1}{z}} dz + \int_1^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 z^{-4} e^{\pi i t^2 \frac{-1}{z}} dz - 2 \int_0^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^{-2} e^{\pi i t^2 \frac{-1}{z}} dz + 2 \int_i^{i\infty} \Phi_0(z) z^{-4} e^{\pi i t^2 \frac{-1}{z}} dz.$$

Afin de nous ramener à l'expression de $f_+(t)$, on effectue le changement de variable $w = \frac{-1}{z}$ et on utilise le fait que Φ_0 soit 1-périodique (car toutes les formes (quasi-)modulaires qui définissent cette fonction le sont) : f_+ est bien invariante par transformée de Fourier.

Enfin, il faut vérifier que l'expression de f_+ donnée par cette proposition correspond à celle de la définition précédente pour $r > \sqrt{2}$. Pour cela, on pose $a(r) := -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz$ pour $r > \sqrt{2}$ (cette intégrale est bien définie grâce au bon comportement de $t \mapsto \Phi_0\left(\frac{-1}{it}\right)$ en 0 et en $+\infty$ par construction de Φ_0). On écrit alors que $-4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = 2 \cos(\pi r^2) - 2 = e^{i\pi r^2} + e^{-i\pi r^2} - 2$ et on insère cela dans l'intégrale intervenant dans l'expression de a pour obtenir par linéarité :

$$a(r) = \int_0^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} e^{i\pi r^2} dz + \int_0^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} e^{-i\pi r^2} dz - 2 \int_0^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz.$$

Pour terminer cette transformation d'expressions, Viazovska fait un changement de variable de translation ± 1

dans les deux premières intégrales pour enlever les nouveaux termes exponentiels et découpe les trois intégrales en insérant le complexe i (ce qui est légitime car $\Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) \rightarrow (e^{i\pi r^2 z})$ si $r > \sqrt{2}$, notamment d'après $\lim_{\text{Im}(z) \rightarrow +\infty}$ l'identité énoncée après la définition de la série d'Eisenstein E_2) :

$$a(r) = \int_{-1}^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz.$$

Il reste alors à vérifier que $\Phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 + \Phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 - 2\Phi_0\left(\frac{-1}{z}\right)z^2 = 2\Phi_0(z)$, ce qui s'obtient essentiellement avec la même identité que précédemment vérifiée par E_2 . Cela donne alors exactement $f_+(r)$, d'où le résultat :

$$a(r) = f_+(r) \text{ pour } r > \sqrt{2}. \quad \square$$

On peut terminer cette étude de la fonction f_+ en lui donnant une expression similaire mais cette fois valable sur \mathbb{R}_+ tout entier ce qui sera utile pour déterminer les valeurs prises en 0 et $\sqrt{2}$ notamment : cela est fondamental pour l'application du théorème de Cohn-Elkies.

Proposition IV.9

Pour $r \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_+(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left(\frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} + \int_0^{+\infty} \left(t^2 \Phi_0\left(\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \right).$$

Démonstration : Cette expression s'obtient pour $r > \sqrt{2}$ en remarquant que la définition précédente donne, par le changement de variable $t = iz$, $f_+(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} t^2 \Phi_0\left(\frac{i}{t}\right) e^{-\pi r^2 t} dt$ et en remarquant que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt = \frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2}$ (il y a une erreur de signe dans la preuve écrite par Viazovska mais le résultat final reste bon). Le résultat s'en déduit sur \mathbb{R}_+ par prolongement puisque la fonction f_+ est développable en série entière comme on peut le voir avec l'expression de la proposition précédente (on voit ici la limite de convergence lorsque $r = \sqrt{2}$). \square

De cette dernière proposition, on en déduit que f_+ est à valeurs imaginaires pures sur \mathbb{R}_+ avec les valeurs particulières : $f_+(0) = \frac{-8640i}{\pi}$, $f_+(\sqrt{2}) = 0$ et $f_+'(0) = \frac{72\sqrt{2}i}{2}$ (on peut les obtenir en effectuant des développements limités par exemple).

IV.4 La fonction de valeur propre -1

Passons maintenant à la construction de la fonction f_- qui doit être égale à l'opposé de sa série de Fourier et qui peut aussi prendre la forme d'un produit d'un sinus carré et d'une transformée de Laplace d'une bonne forme modulaire. Viazovska utilise cette fois les fonctions thêta. De nouveau, on ne donne que la définition de la forme modulaire qui fonctionne. L'idée de faire intervenir ces fonctions thêta pour parvenir à une bonne fonction est aussi développée par Slipper qui, dans la partie 4.3 de [5], procède globalement de la même manière que pour f_+ : après avoir judicieusement découpé le domaine d'intégration, il obtient des équations fonctionnelles pour g (en gardant les mêmes notations) qui sont un peu plus simples que dans le cas précédent. Il en déduit qu'il doit s'agir d'une forme modulaire de poids -2 : la fonction dont on va prendre la transformée de Laplace peut s'écrire comme quotient de deux formes modulaires. De plus, les formes modulaires pour $\Gamma(2)$ sont engendrées par θ_{00}^4 et θ_{01}^4 (admis ici). Des calculs supplémentaires permettent d'aboutir (par une résolution d'un système linéaire) à une expression de g donc de f_- , dont on se contentera de vérifier qu'elle fonctionne. On rappelle que $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que la notation $f_{\gamma,k}$ pour une forme modulaire f a été introduite dans la troisième partie.

Définition IV.10

On note h la forme faiblement modulaire de poids -2 définie sur \mathbb{H} par $h := 128 \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^8}$. À partir de h , on construit trois autres fonctions : $\psi_I := h - h_{ST,-2}$; $\psi_T := (\psi_I)_{T,-2}$ et $\psi_S := (\psi_I)_{S,-2}$.

On peut exprimer ces fonctions uniquement à partir des fonctions thêta étudiées précédemment en utilisant la proposition (III.12) : par exemple, $\psi_I = 128 \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^8} + 128 \frac{\theta_{01}^4 - \theta_{10}^4}{\theta_{00}^8}$. Il est alors clair qu'elles admettent des développements de Fourier et qu'elles sont des formes modulaires.

On peut alors définir la fonction f_- :

Définition IV.11

Pour $r > \sqrt{2}$, on définit f_- par $f_-(r) := -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz$.

Cette fois aussi, dans son article [8], la mathématicienne n'introduit pas cette fonction directement sous cette forme mais donne une forme valable sur \mathbb{R}_+ permettant de vérifier plus facilement que f_- est de valeur propre -1 pour la transformée de Fourier. Comme nous l'avons fait pour f_+ , on redéfinit ici la fonction f_- différemment et on vérifie ensuite que les deux définitions coïncident sur $]\sqrt{2}, +\infty[$:

Proposition IV.12

La fonction f_- définie pour $r \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f_-(r) := \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{\pi i r^2 z} dz$$

vérifie $f_- \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ avec $\hat{f}_- = -f_-$.

Démonstration : On commence par voir que la fonction f_- n'a pas de problème de définition puis on justifie qu'elle est bien dans la classe de Schwartz en raisonnant comme pour la fonction f_+ à partir de ses coefficients de Fourier et par manipulation des intégrales, donc des fonctions ψ_I , ψ_T et ψ_S . Des détails supplémentaires de justification de cela sont donnés dans [8]. Calculons maintenant la transformée de Fourier de f_- , toujours à partir de cette définition en somme de quatre intégrales en réutilisant le résultat de la transformée de Fourier d'une gaussienne. Pour $t \geq 0$, on obtient :

$$\hat{f}_-(t) = \int_{-1}^i \psi_T(z) z^{-4} e^{\pi i t^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) z^{-4} e^{\pi i t^2 z} dz - 2 \int_0^i \psi_I(z) z^{-4} e^{\pi i t^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) z^{-4} e^{\pi i t^2 z} dz.$$

Comme pour f_+ , on effectue le changement de variable $w = \frac{-1}{z}$ et on observe qu'à partir des définitions de ces fonctions, on a $(\psi_T)_{S,-2} = -\psi_T$, $(\psi_I)_{S,-2} = \psi_S$ et $(\psi_S)_{S,-2} = \psi_I$ avec $S(z) = \frac{-1}{z}$, ce qui permet de conclure que $\hat{f}_- = -f_-$.

Enfin, il faut vérifier que l'expression de f_- donnée par cette proposition correspond à celle de la définition précédente pour $r > \sqrt{2}$. Pour cela, on pose $b(r) := -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \psi_I(z) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz$ pour $r > \sqrt{2}$ (cette intégrale est bien définie grâce au bon comportement de $t \mapsto \psi_T(it)$ en 0 et en $+\infty$ par construction de ψ_I). On se rappelle alors que $-4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = e^{i\pi r^2} + e^{-i\pi r^2} - 2$ et on insère cela dans l'intégrale intervenant dans l'expression de b pour obtenir par linéarité :

$$b(r) = \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} e^{i\pi r^2} dz + \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} e^{-i\pi r^2} dz - 2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz.$$

Pour poursuivre cette réécriture, on effectue un changement de variable de translation ± 1 dans les deux premières intégrales afin d'enlever les nouveaux termes exponentiels et on observe que, comme $\psi_I(z) = e^{-2i\pi z} + O(1)$ (ce qui s'obtient à partir de son développement de Fourier par exemple) et $\psi_I(z+1) = \psi_T(z)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} e^{i\pi r^2} dz &= \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz \text{ et} \\ \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} e^{-i\pi r^2} dz &= \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz. \end{aligned}$$

Cela donne donc que :

$$b(r) = \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \psi_I(z) \pi i r^2 z dz + 2 \int_i^{i\infty} (\psi_T(z) - \psi_I(z)) e^{\pi i r^2 z} dz.$$

L'idée est alors de remarquer que $\psi_T + \psi_S = \psi_I$: par définition et d'après la remarque vue dans la sous-partie (III.1), $\psi_T + \psi_S = (h - h_{ST,-2})_{T,-2} + (h - h_{ST,-2})_{S,-2} = h_{T,-2} - h_{ST^2,-2} + h_{S,-2} - h_{STS,-2}$. Or,

$ST^2S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ donc $ST^2S \in \Gamma_0(2)$ et généralement une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donc $A^{-1} \in \Gamma_0(2)$ et $h_{A,-2} = h_{A^{-1},-2}$ car h est une forme faiblement modulaire de poids -2 sur Γ_1 . En particulier, on obtient que $-h_{ST^2,-2} + h_{S,-2} = 0$. De même, on vérifie que $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ et $STS(ST)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ donc il reste $\psi_T + \psi_S = h_{T,-2} - h_{STS,-2} = h - h_{ST,-2} := \psi_I$.

En revenant à la dernière expression obtenue pour b , on en déduit que :

$$b(r) = \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \psi_I(z) \pi i r^2 z dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{\pi i r^2 z} dz, \text{ ce qui est bien la définition annoncée pour } f_-(r). \quad \square$$

De même que pour f_+ , on préfère donner à f_- une expression similaire valable sur \mathbb{R}_+ tout entier afin de déterminer les valeurs prises en 0 et $\sqrt{2}$ notamment.

Proposition IV.13

Pour $r \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_-(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left(\frac{144}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} + \int_0^{+\infty} (\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi r^2 t} dt \right).$$

Démonstration : Cette expression s'obtient facilement pour $r > \sqrt{2}$ en remarquant que la définition précédente donne, par le changement de variable $t = iz$, $f_-(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} \psi_I(it) e^{-\pi r^2 t} dt$ et en remarquant que $\int_0^{+\infty} (e^{2\pi t} + 144) e^{-\pi r^2 t} dt = \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} + \frac{144}{\pi r^2}$. Le résultat s'en déduit sur \mathbb{R}_+ par prolongement puisque la fonction f_- est développable en série entière comme on peut le voir avec l'expression de la proposition précédente. □

Par conséquent, f_- est à valeurs imaginaires pures sur \mathbb{R}_+ avec les valeurs particulières : $f_-(0) = 0$, $f_-(\sqrt{2}) = 0$ et $f_-'(0) = 2\sqrt{2}i$.

IV.5 Bilan

Finalement, une fois les fonctions f_+ et f_- construites, nous pouvons définir la fonction "magique" de Viazovska qui vérifie les hypothèses du théorème de Cohn-Elkies énoncé sous la forme (2), en ajoutant des coefficients multiplicateurs pour avoir les bonnes valeurs de cette fonction et de sa transformée de Fourier en 0, tout en ayant une fonction à valeurs réelles :

Théorème IV.14

La fonction $f := \frac{\pi i}{8640} f_+ + \frac{i}{240\pi} f_-$ vérifie les hypothèses (2) du théorème de Cohn-Elkies reformulé.

Démonstration : Le fait que f est radiale et dans la classe de Schwartz est immédiat puisque f_+ et f_- le sont. De plus, f est à valeurs réelles car f_+ et f_- sont à valeurs imaginaires pures comme nous l'avons vu précédemment. Il reste alors à vérifier que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$ vérifie les conditions :

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^8 \text{ tel que } \|x\| \geq \sqrt{2}, \\ \hat{f}(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^8, \\ f(0) = \hat{f}(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Commençons par justifier que $f(x) \leq 0$ si $\|x\| \geq \sqrt{2}$. Reprenons pour cela les expressions de f_+ et f_- valables pour $r > \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} f(r) &= -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{8640} \Phi_0\left(\frac{i}{t}\right) t^2 + \frac{1}{240\pi} \psi_I(it)\right) e^{-\pi r^2 t} dz \\ &= -\pi \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2160} \Phi_0\left(\frac{i}{t}\right) t^2 + \frac{1}{60\pi^2} \psi_I(it)\right) e^{-\pi r^2 t} dz \\ &= \frac{\pi}{2160} \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} \left(-t^2 \Phi_0\left(\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it)\right) e^{-\pi r^2 t} dz. \end{aligned}$$

Cela invite alors à étudier la fonction A définie par : $A(t) := -t^2 \Phi_0\left(\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Pour montrer que A est à valeurs strictement négatives sur $]0, +\infty[$, Viazovska écrit des développements asymptotiques de cette fonction de la forme $A(t) = A_0^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi \frac{n}{t}})$ et $A(t) = A_\infty^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi n t})$ où n est un entier naturel fixé et $A_0^{(n)}$ et $A_\infty^{(n)}$ sont des fonctions ainsi définies. On peut pour chacune d'entre elles en écrire un développement de Fourier puisque l'on connaît ceux de Φ_0 et ψ_I . La mathématicienne se rend compte que prendre $n = 6$ pour ces fonctions permet d'obtenir le résultat souhaité en encadrant l'écart entre A et ces fonctions $A_0^{(6)}$ et $A_\infty^{(6)}$ aux voisinages de 0 et de $+\infty$ respectivement (voir [8] pour les détails de calculs). De plus, comme $A_0^{(6)}(t) < 0$ pour $t \in]0, 1]$ et $A_\infty^{(6)}(t) < 0$ pour $t \in [1, +\infty[$, on en déduit que $A(t) < 0$ pour tout $t > 0$ donc clairement que f est négative sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

Montrons maintenant que $\hat{f}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^8$. Exprimons pour cela la transformée de Fourier de f : comme $\hat{f}_+ = f_+$ et $\hat{f}_- = -f_-$, on a $\hat{f} := \frac{\pi i}{8640} f_+ - \frac{i}{240\pi} f_-$ par linéarité de la transformée de Fourier. On peut donc écrire \hat{f} sous la forme : pour tout $r > 0$, $\hat{f}(r) = \frac{\pi}{2160} \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} B(t) e^{-\pi r^2 t} dz$ comme précédemment avec cette fois $B(t) := -t^2 \Phi_0\left(\frac{i}{t}\right) + \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it)$ pour tout $t > 0$. On raisonne alors exactement de la même façon que pour la fonction A en écrivant les mêmes types de développements asymptotiques

pour B , toujours avec $n = 6$, on encadre les écarts et on observe que $B_0^{(6)}(t) > 0$ pour $t \in]0, 1]$ et $A_\infty^{(6)}(t) > 0$ pour $t \geq 1$. Finalement, B est positive sur \mathbb{R}_+ donc \hat{f} l'est aussi.

Il reste enfin à vérifier que $f(0) = \hat{f}(0) = 1$, ce qui se fait facilement compte tenu de la définition de f et des valeurs prises par f_+ et f_- en 0 : $f(0) = \frac{\pi i}{8640} f_+(0) + \frac{i}{240\pi} f_-(0) = \frac{\pi i}{8640} \times \frac{-8640i}{\pi} + 0 = 1$ et $\hat{f}(0) = \frac{\pi i}{8640} \hat{f}_+(0) + \frac{i}{240\pi} \hat{f}_-(0) = \frac{\pi i}{8640} f_+(0) - \frac{i}{240\pi} f_-(0) = \frac{\pi i}{8640} \times \frac{-8640i}{\pi} + 0 = 1$. \square

Ainsi, la fonction f étant radiale et à valeurs réelles, on peut lui appliquer le théorème de Cohn-Elkies pour en déduire le résultat final :

Théorème IV.15

En dimension 8, la densité optimale de l'empilement des sphères est atteinte par l'empilement E_8 et est égale à $\Delta_8 = \frac{\pi^4}{384}$.

Cela achève l'étude centrale de ce stage. On peut ajouter une remarque supplémentaire concernant l'unicité d'une telle fonction vérifiant le théorème de Cohn-Elkies puisque la fonction "magique" f ne s'annule pas pour tous les points x de \mathbb{R}^8 vérifiant $\|x\|^2 \notin 2\mathbb{N}^*$ en appliquant un autre résultat obtenu par Cohn et Elkies (ce résultat est admis ici : voir [2]).

De façon très similaire à cette résolution de l'empilement optimal des sphères en dimension 8, Viazovska s'est associée peu de temps après à Radchenko, Cohn, Kumar et Miller pour résoudre en une petite semaine le problème en dimension 24 également, dont la densité optimale est obtenue pour un réseau plus difficile à définir, le réseau de Leech (avec $\Delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.002$). La démonstration de ce résultat est aussi basée sur les formes modulaires pour construire la bonne fonction à laquelle appliquer le théorème de Cohn-Elkies (voir [9]).

Cependant, ces méthodes de résolution assez révolutionnaires sont rapidement limitées à cause des contraintes fortes que doit vérifier la fonction à laquelle appliquer le théorème central de Cohn et Elkies. Bien que cela donne des bornes pour les densités dans toutes les dimensions, seules les dimensions 8 et 24 ont ainsi été complètement résolues. Il semble même qu'il n'existe pas de telle fonction "magique" en dimensions supérieures à 3 autres que 8 et 24 mais cela n'a pas encore été démontré et peut faire l'objet de recherches.

Je tiens enfin à remercier Didier Lesesvre pour son accueil et son encadrement au sein du laboratoire Paul Painlevé de l'Université de Lille. Ce sujet transversal très actuel autour de la théorie des nombres m'a permis de faire mes premiers pas dans le monde de la recherche et de découvrir de nouveaux résultats mathématiques concernant notamment les formes modulaires, un peu d'analyse harmonique et de la géométrie. J'ai même eu la chance d'assister à une conférence de Maryna Viazovska sur la transformée de Fourier et son application au problème d'empilement des sphères au sein du laboratoire. Quelques semaines plus tard, elle obtenait la prestigieuse médaille Fields pour récompenser l'ensemble de son travail dont la résolution de l'empilement des sphères en dimension 8 est l'apogée.

Références

- [1] Henry COHN : *A conceptual breakthrough in sphere packing*. American Mathematical Society, 2016.
- [2] Henry COHN et Noam ELKIES : *New upper bounds on sphere packings I*. Annals of Mathematics, 2003.
- [3] David de LAAT et Frank VALLENTIN : *A Breakthrough in Sphere Packing : The Search for Magic Functions*. ArXiv, 2016.
- [4] Thomas HALES : *A proof of the Kepler conjecture*. Annals of Mathematics, 2005.
- [5] Aaron SLIPPER : *Modular magic*. Harvard University, 2018.
- [6] William STEIN : *Modular Forms, a Computational Approach*. American Mathematical Society, 2007.
- [7] Axel THUE : *Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene*. J.Dybwad, 1910.
- [8] Maryna VIAZOVSKA : *The sphere packing problem in dimension 8*. Annals of Mathematics, 2016.
- [9] Maryna VIAZOVSKA, Danylo RADCHENKO, Henry COHN, Abhinav KUMAR et Stephen MILLER : *The sphere packing problem in dimension 24*. Annals of Mathematics, 2017.
- [10] Don ZAGIER : *Elliptic Modular Forms and Their Applications*. Springer, 2004.