

Rapport de stage 2024

BOUAZIZ-BLED François

May 13, 2025

1 Introduction

1.1 Motivation

Je tiens tout d'abord à remercier Didier Lesesvre qui a encadré mon stage à l'université de Lille. Dans ce document, je vais aborder une partie de mon stage, le but de ce rapport est de présenter certaines méthodes et certains résultats liés à mon stage en essayant de motiver les énoncés pas à pas.

2 Sommaire

- (3) Notation
- (4) Présentation du sujet: Problème de Dirichlet et de Gauss, p1-p3
- (5) Une preuve sur $r_2(n)$, p3-p6
- (6) Un résultat de Hardy, p6-p8
- (7) Somme exponentielle : une introduction, p9-p15
- (8) Conclusion, p15
- (9) Source, p15

3 Notation

Je ne vais pas introduire toutes les notations utilisées dans le rapport dans cette partie, seulement celles qui sont utiles à la présentation du sujet.

-On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$

-On note $d(n) := \text{Card}\{d \in \llbracket 1, n \rrbracket, d|n\}$

-On définit $r_2(n) := \text{Card}\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x^2 + y^2 = n\}$ et $r_2(0) = 1$

On utilisera aussi parfois $D(x) := \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} d(i)$ et $R(x) := \sum_{0 \leq i \leq x} r_2(i) = \text{Card}\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x^2 + y^2 \leq n\}$

-On note $\gamma := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} - \log\left(1 + \frac{1}{i}\right)$

4 Présentation du sujet

On va s'intéresser au problème du comptage de Gauss et au problème des diviseurs de Dirichlet. Le problème de Dirichlet consiste en l'estimation asymptotique de la quantité $D(n)$ et le problème de Gauss plus souvent appelé problème du comptage de Gauss consiste lui en l'estimation asymptotique de $R(n)$. Nous allons tout d'abord voir les premières estimations asymptotiques qui ont été trouvées pour ces deux problèmes, ensuite nous verrons une méthode qui a permis à Dirichlet d'améliorer le résultat sur $D(n)$.

4.1 Deux premiers résultats

Pour donner une première estimation asymptotique de $R(x)$ et $D(x)$ on va mettre les problèmes sous une forme ensembliste et on va procéder à des partitionnement d'ensemble puis estimer leurs cardinaux.

4.1.1 pour $R(x)$

On écrit que $Y = \{(x, y) \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \leq n^2\} = \bigcup_{u=-n}^n \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2, u^2 + v^2 \leq n^2\}$ et donc

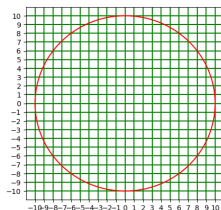
$$R(n^2) = \sum_{-n \leq i \leq n} 2 \lfloor \sqrt{n^2 - i^2} \rfloor - 1. \quad \text{On écrit alors } \sum_{n \leq i \leq n} \sqrt{n^2 - i^2} = n \sum_{n \leq i \leq n} \sqrt{1 - (\frac{i}{n})^2}, \text{ vu que}$$

$t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ est monotone sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ on a par somme de Riemann que

$$\frac{1}{n} \sum_{n \leq i \leq n} \sqrt{1 - (\frac{i}{n})^2} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - t^2} dt + \mathcal{O}(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n}). \quad \text{On obtient que } R(n^2) = \pi n^2 + \mathcal{O}(n) \text{ et}$$

donc par encadrement avec des parties entières, vu que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq x \leq (\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1)^2$, on a que $R(x) = \pi x + \mathcal{O}(\sqrt{x})$.

Ce qui constitue le résultat de Gauss. Nous verrons plus tard que Hardy va prouver que l'on ne peut pas faire mieux que $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{4}})$ en terme de précision. Le problème de Gauss consiste à compter les points de coordonnées entières dans un cercle de rayon donné.

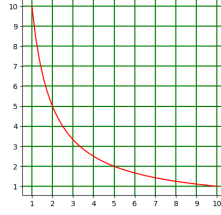


4.1.2 pour $D(x)$

On peut écrire $D(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(j|n)$ ce qui donne, en inversant les sommes que $D(n) = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$

et donc on obtient alors que $D(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n * \log(n)$. Le résultat de Dirichlet consiste à remplacer l'équivalent précédent (qui est un grand tau de n en réalité) par un développement plus précis dont la précision est un grand tau de $\sqrt{n}$. Le problème des diviseurs Dirichlet consiste alors à savoir jusqu'où on peut descendre en terme de précision. Un terme de précision en $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{7}})$ est-il possible? Nous verrons plus tard que Hardy va prouver qu'on ne peut pas faire mieux que $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{4}})$.

L'apport de Dirichlet repose sur la méthode dite de l'Hyperbole, il s'agit d'un partitionnement de l'ensemble, le partitionnement consiste à séparer les couples en deux catégories : ceux qui ont un abscisse plus petit que $\sqrt{x}$ et les autres. On note $H := \{(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2, uv \leq x\}$ On peut écrire que $H = \{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \in [1, \sqrt{x}], b \in [1, \frac{x}{a}]\} \cup \{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, b \in [1, \sqrt{x}], a \in]\sqrt{x}, \frac{x}{b}]\}$ et donc vu que $D(x) = \sum_{(u,v) \in H} 1$ (au passage le problème de Dirichlet revient à compter les points à coordonnées entières sous l'hyperbole),



par le partitionnement que l'on applique à la somme on trouve que $D(x) = 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \lfloor \frac{x}{i} \rfloor - \lfloor x \rfloor^2$. On utilise alors que $\sum_{1 \leq i \leq x} \frac{1}{i} = \log x + \gamma + \mathcal{O}(\frac{1}{x})$. Pour obtenir le résultat de Dirichlet $D(x) = x(\log x + 2\gamma - 1) + \mathcal{O}(\sqrt{x})$.

5 Une preuve sur $r_2(n)$

Le but de l'exposé de cette preuve n'est pas de rentrer dans tous les détails techniques de cette dernière mais seulement les points importants qui m'ont marqués dans la réalisation de la preuve. On va noter $d_1(n) = \text{Card}\{d \in [1, n], d|n, d \equiv 1[4]\}$ et $d_3(n) = \text{Card}\{d \in [1, n], d|n, d \equiv 3[4]\}$ et nous allons montrer que $r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$ pour cela on va utiliser la fonction théta.

5.1 fonction théta

On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ on a alors que la fonction $\nu : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i\pi z n^2)$ est Holomorphe, 2-périodique.

on va montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{H}$ on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(iz\pi(n+x)^2) = \sqrt{\frac{i}{z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\frac{i\pi}{z}n^2) \exp(2i\pi x n)$

On a choisi pour détermination de la racine carré la détermination sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{R}_-$ Pour cela on peut à x fixé constater que les deux termes de l'égalité sont Holomorphes sur $\mathbb{H}$ on va donc le montrer sur $i\mathbb{R}_+$ et le principe des zéros isolés permettra de conclure. Pour cela on utilise la formule sommatoire de Poisson, la fonction $\exp(-(\cdot)^2)$ se prêtant bien à son application car elle est à décroissance rapide et est régulière. On utilise alors que notant $g_\sigma : y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2})$ pour $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ on a que la transformée de Fourier de cette fonction n'est d'autre que $\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} g_{\frac{1}{\sigma}}(\cdot)$ Ce qui permet de conclure ! On notera par la suite θ la fonction thêta réelle définie par $\theta(x) := \nu(ix)$ pour $x > 0$.

5.2 Série de Eisenstein

On va très rapidement introduire les fonctions de Eisenstein sans entrer dans les détails de la théorie des formes modulaires. On va poser pour q pair plus grand que 4, $G_q : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 / (0,0)} \frac{1}{(mz + n)^q}$,

on constate que G_q vérifie l'identité $G_q(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^q G_q(z)$ pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $ad-bc=1$, (car on a que $\mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2, (n,m) \mapsto (an+bm, cn+dm)$ est une bijection) qu'elle est holomorphe et converge uniformément (sur la partie réelle) vers $2\zeta(q)$ quand le module de son argument diverge. On pose alors $E_q := \frac{G_q}{2\zeta(q)}$ que l'on appelle série de Eisenstein.

En utilisant la formule valable pour $z \in \mathbb{C}$ non entier $\pi \cot(\pi z) = \sum_{|n| \rightarrow \infty} \sum_{|k| < n} \frac{1}{k+z}$ qui donne que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^q} = \frac{(2i\pi)^q}{(q-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} n^{q-1} \exp(2i\pi n z)$$

on obtient après un théorème de sommation par pa-

$$\text{quet que } G_q(z) = 2\zeta(q) + \frac{(2i\pi)^q}{(q-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{q-1}(n) \exp(2i\pi n z) \text{ ou on a posé } \sigma_{q-1}(n) = \sum_{d|n} d^{q-1}$$

5.3 Forme cuspidale

Pour q pair on dit que f est une forme modulaire cuspidale de poids q sur H si elle est holomorphe, que pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4, ad-bc=1$ et $z \in \mathbb{H}$ on a que $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^q f(z)$ et enfin que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ existe, on note l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de ces fonctions S_q on va admettre en tant que boîte noire que l'on connaît la dimensions de S_q et qu'en particulier la dimension de S_{12} est 1, et cet espace est engendré par $E_4^3 - E_6^2$; enfin la formule sur G_q permet de dire que $(E_4^3 - E_6^2)(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \exp(2i\pi z)$

5.3.1 Détermination des fonctions 1-périodiques Holomorphes de $\mathbb{H}$

On note $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$, $K = \{f \in H(\mathbb{H}), f \text{ est 1-périodique}\}$ et $e(\cdot) = \exp(2i\pi(\cdot))$ On a alors une bijection $T : H(\mathbb{D}^*) \mapsto K, j \mapsto j(e)$.

On peut montrer que les fonctions de $H(\mathbb{D}^*)$ sont de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\cdot)^n$ et donc on en déduit par le théorème d'élimination des singularités de Riemann que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(e(z))$ existe si et seulement si $a_n = 0$ si n est un entier strictement négatif. Dans ce cas on a que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(e(z)) = a_0$ et que $f(e(z)) \underset{|z| \rightarrow \infty}{=} a_0 + \mathcal{O}(e(z))$.

5.4 La Preuve

On va combiner les résultats précédant en introduisant un espace vectoriel puis on motivera l'utilisation d'une nouvelle fonction On fixe $z \in \mathbb{H}$

On introduit l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, X composé des fonctions f holomorphes dans $\mathbb{H}$ qui vérifient $f(-\frac{1}{z}) = z^4 f(z)^*$, sont 2-périodiques et vérifient que les limites $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) =: a(f)$ et $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-4} f(1 - \frac{1}{z}) =: b(f)$, existent.

On va montrer que l'application linéaire $k : X \mapsto \mathbb{C}^2$, $f \mapsto (a(f), b(f))$ est un isomorphisme et que notant $E_4^*(z) = E_4(\frac{z+1}{2})$, (E_4, E_4^*) est une base de X . Tout d'abord on vérifie que ces deux fonction sont bien dans X pour E_4 . Le résultat découle de la 1-périodicité de cette dernière et on a $(a(E_4), b(E_4)) = (1, 1)$ pour E_4^* c'est un petit peu plus compliqué elle est bien holomorphe 2 périodique, maintenant notant $x = \frac{z+1}{2}$ on a que $E_4^*(-\frac{1}{z}) = E_4(\frac{x-1}{2x-1})$ mais grâce au quadruplet $(1, -1, 2-1)$ on a que $E_4^*(-\frac{1}{z}) = (2x-1)^4 E_4(x) = z^4 E_4(\frac{z+1}{2}) = z^4 E_4^*(z)$ et on obtient à partir de E_4 que $((a(E_4^*), b(E_4^*))) = (1, 16)$

Retour à la preuve. On va montrer que l'application est injective: pour cela fixant f dans son noyau on va poser $g(z) = z^{-4}f(1 - \frac{1}{z})$, on a que $g(z+1) = (z+1)^{-4}f(-\frac{1}{1+\frac{1}{z}})$ d'où en appliquant (*) on a que $g(z+1) = z^{-4}f(1 - \frac{1}{z}) = g(z)$ ainsi g est 1-périodique et est holomorphe dans $\mathbb{H}$ on en déduit que la fonction $w(z) = z^{-4}f(1 - \frac{1}{z})f(z)f(z+1)$ est dans S_{12} , en effet W est 1-periodique par ce qui précède et tout est fait pour que w vérifie $w(-\frac{1}{z}) = z^{12}w(z)$ de plus par hypothèse sur f on a que g est 1 périodique, que $f(\cdot)f(\cdot+1)$ l'est aussi et sont toutes deux de limites nulles de sortes que la sous section de cette partie permet de dire que $w(z) = \mathcal{O}(e(2z))$. Or $f(e)$ est colinéaire à $E_4^3 - E_6^2$ qui est équivalent à $e(z)$ quand $|z| \rightarrow \infty$ ceci permet de dire que le coefficient de proportionnalité est nul donc $f=0$. L'application est injective et $((1,1), (1,16))$ est une famille libre d'où le résultat final.

5.4.1 Une nouvelle fonction

On va introduire une fonction qui permettra de prouver notre résultat. Comment motiver une telle fonction, et bien si on admet que se résultat est vrai on a que

$$\nu^2(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} r_2(p) e^{i\pi z p} = 1 + 4 \sum_{p=1}^{\infty} (d_1(p) - d_3(p)) e^{i\pi z p} \text{ mais on écrivant que } d_1(p) - d_3(p) = \sum_{d|n, d \equiv 1[2]} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

on peut remonter au fait que $\nu^2(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cos(i\pi p z)}$ réciproquement si on montre cette formule, on

aura le résultat sur $r_2(n)$ par unicité du developpement en série entière. Posons donc pour $z \in \mathbb{H}$, $T(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cos(i\pi p z)}$ et on va alors montrer que $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cos(i\pi z(p+x))} = \frac{i}{z} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi n x}}{\cos(\frac{i\pi p}{z})}$

pour cela on peut remarquer que à x fixé les termes sont holomorphes dans $\mathbb{H}$ donc par le principe des zéros isolés il suffit de démontrer cette identité sur $i\mathbb{R}_+^*$. Pour cela on applique la formule sommatoire de Poisson à $\frac{1}{\cosh}$ qui est dans l'espace de Schwarz. Un théorème des résidus permet de calculer la transformée de Fourier de cette fonction, ceci prouve le résultat. Récapitulons: on a les

deux identités suivantes en prenant $x = \frac{1}{2}$ et en évaluant en $1 - \frac{1}{z}$; $\nu(1 - \frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{i\pi z(n + \frac{1}{2})^2}$

$$\text{et } T(1 - \frac{1}{z}) = \frac{z}{i} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cos(i\pi z(n + \frac{1}{2}))}.$$

5.4.2 Fin de la Preuve

On remarque que ν^8 et T^4 sont toutes deux dans X , en effet elles sont bien 2-périodiques, holomorphes et vérifient $f(-\frac{1}{z}) = z^4 f(z)$ de plus on a que $(a(\nu^8), a(T^4)) = (1, 1)$ et les deux identités précédentes permettent de dire que $(b(\nu^8), b(T^4)) = (0, 0)$ mais donc par propriété de X on a que $T^4 = \nu^8$. Vu que $\mathbb{H}$ est connexe, $H(\mathbb{H})$ est intègre donc $\nu^2 = \alpha T$ où α est une racine quatrième de

l'unité vu que les limites de ν^2 et T sont les mêmes en $+\infty$ on a que $\alpha = 1$ ainsi $T = \nu^2$! Donc $r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$.

6 Un résultat de Hardy

Nous allons montrer qu'on ne peut pas obtenir un résultat meilleur que $\mathcal{O}(x^{\frac{1}{4}})$ pour nos deux problèmes. Je vais le faire pour $R(x)$ uniquement car la démonstration que je vais présenter est plus simple que celle pour $D(x)$, elle est moins calculatoire dans sa première partie et ne requiert pas de résultat sur la fonction β d' Euler.

On va s'intéresser à la fonction $f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} r_2(i) \exp(-x\sqrt{i})$, pourquoi cette fonction ? Eh bien!

parce qu'on dispose de l'identité suivante $\exp(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp-(t^2 + \frac{x^2}{4t^2})dt$, cette identité peut se démontrer en utilisant un théorème de Polya, pour f une fonction continue par morceaux positive on a que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \frac{x}{t})dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et on applique cela à l'intégrale de Gauss.

On applique cette identité au terme exponentiel et on intervertit somme et intégrale par un théorème de convergence dominée, la majoration est facile en majorant $r_2(n)$ par la majoration immédiate $\mathcal{O}(n)$. On utilise ensuite l'identité principale pour la fonction thêta $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\theta(x)$, en remarquant que celle-ci apparaît au carré dans l'intégrale qui résulte de l'interversion. Finalement on procède au changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ et à un théorème de sommation par paquet

On obtient alors que $f(x) = \frac{2\pi}{x^2} + 2\pi x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_2(n)}{(x^2 + 4\pi^2 n)^{\frac{3}{2}}}$ cette formule nous donne les pôles f .

6.1 Transformation de Melin

Cette sous section n'a pas pour but d'aborder le tout en profondeur. On fixe une fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{C}$ et on s'intéresse à $M(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt$ pour s dans $\mathbb{C}$ que l'on appelle transformée de Melin de f , sous certaines hypothèses sur f on peut montrer que $M(f)$ est bien définie, holomorphe sur une bande verticale de $\mathbb{C}$, disons de la forme $W := \{s \in \mathbb{C}, \alpha < \text{Re}(s) < \beta\}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Et que fixant $\alpha < c < \beta$ (c quelconque), on a la formule dite d'inversion de Melin $f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(f)(v)x^{-v}dv$. C'est essentiellement un inversion de Fourier après avoir fait une changement de variable en $t \mapsto \exp(t)$ dans la définition de $M(f)$. On va ici appliquer ceci à la fonction Γ d' Euler, on a pour $c \in \mathbb{R}^*$, $e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(v)x^{-v}dv$

6.2 De nouvelles fonctions

On fixe $z \in \mathbb{C}^*$ On va s'intéresser à $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-x\sqrt{j})$, $\psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{1}{4}} \exp(-x\sqrt{j})$, On utilise

la formule d'inversion de Melin en prenant $c=3$ pour performer une interversion série intégrale, l'interversion est justifiée par la formule de Stirling pour Γ et par le fait que les sommes partielles de $\zeta(\frac{c}{2})$ (pour g) et $\zeta(\frac{c}{2} + \frac{1}{4})$ (pour ψ) sont bornées uniformément sur la bande complexe de partie réelle $c=3$. On trouve alors que $g(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \zeta(\frac{h}{2})x^{-h}\Gamma(h)dh$ et $\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \zeta(\frac{h}{2} + \frac{1}{4})x^{-h}\Gamma(h)dh$. Ensuite on applique un théorème des résidus pour échanger le domaine d'intégration en échangeant

le domaine d'intégration pour passer d'une intégration sur la bande de partie réelle 3 à la bande de partie réelle $-n-\frac{1}{2}$. Pour cela on considère le rectangle dont deux des cotés sont les bandes précédentes et dont les deux dernières bandes sont reliées à l'infini, l'intégrale sur les bandes à l'infini est nulle par la formule de Stirling et le contrôle que l'on a sur ζ . On a alors en utilisant que $\text{Res}_1(\zeta) = 1$ et

$$\text{Res}_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!} \text{ que } g(x) = \frac{2}{x^2} + \sum_{p=0}^n \frac{(-x)^p}{p!} \zeta\left(-\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2i\pi} \int_{-n-\frac{1}{2}-i\infty}^{-n-\frac{1}{2}+i\infty} \zeta\left(\frac{h}{2}\right) x^{-h} \Gamma(h) dh$$

$$\text{et } \psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}} + \sum_{p=0}^n \frac{(-x)^p}{p!} \zeta\left(-\frac{p}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2i\pi} \int_{-n-\frac{1}{2}-i\infty}^{-n-\frac{1}{2}+i\infty} \zeta\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{4}\right) x^{-h} \Gamma(h) dh. \text{ On peut alors remar-}$$

quer que les deux morceaux intégraux convergent vers 0 en passant à la limite sur n pour cela on utilise la formule de réflexion de ζ et de Γ .

$$\text{Finalement } g(x) = \frac{2}{x^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{p!} \zeta\left(\frac{-p}{2}\right) \text{ et } \psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{p!} \zeta\left(\frac{-p}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

On peut donc écrire $g(x) = \frac{2}{x^2} + a(x)$ et $\psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}} + b(x)$ où $a()$ et $b()$ sont des fonctions entières. Maintenant nous avons tous les ingrédients possibles pour commencer la preuve.

6.3 Liste des outils utilisés dans la preuve

On fixe m de sorte que $r_2(m)$ ne soit pas nul. Ceci est vrai si et seulement si m ne contient pas de nombre premiers congru à 3 modulo 4 dont la valuation dans la décomposition de m est

impaire. Tout d'abord nous allons poser $\delta(n) := r_2(n) - \pi$ et $\Delta(n) = \sum_{k=1}^n \delta(k)$ et on va observer

que par les résultat précédents notant $\mathbb{Y} = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \text{Re}(z)\}$ la fonction $F := f - \pi g$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{Y}$ qui n'a pas de pôle en 0 mais dont les pôles sont situés en les points $(2i\pi\sqrt{m})_{(m \in \mathbb{N}^*, r_2(m)=0)}$ et que $F(x + 2i\pi\sqrt{m}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e(\frac{1}{8})r_2(m)\pi^{\frac{3}{2}}}{2m^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{2}}}(1)$, car g est holomorphe au voisinage des pôles de f donc il n'y a que f qui contribue aux pôles de F pour obtenir l'équivalent on utilise la formule que l'on a obtenu sur f . (1) est le premier outil de la preuve.

6.3.1 Motivation

Ici on compare $r_2(n)$ avec sa valeur moyenne que Gauss a trouvé, π . On va maintenant procéder à une sommation d'Abel pour faire apparaître le terme $\Delta(n)$ qui représente la précision du résultat

de Gauss. Ici on a $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(k) e^{-z\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(k) (e^{-z\sqrt{k}} - e^{-z\sqrt{k+1}})$. Nous sommes sur la bonne voie pour exploiter le résultat sur les pôles de f .

Ensuite on fixe $z \in \mathbb{Y}$ et on écrit que $e^{-z\sqrt{n}} - e^{-z\sqrt{n+1}} = \frac{ze^{-z\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{z^2 e^{-z\sqrt{n}}}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{ze^{-z\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Maintenant on introduit la fonction holomorphe G définie pour un nombre complexe z de partie

réelle strictement positive par $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(k)}{\sqrt{k}} e^{-z\sqrt{k}}$. En utilisant les deux grand tau que l'on a

mis dans le développement limité précédent ont obtient en 0 que $F(x) = \frac{x}{2}G(x) + \mathcal{O}(x)$ et donc vu que F est bornée en 0 on a que $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$. Ceci est l'outil numéro (2) et en les pôles de F on

a que $F(x + 2i\pi\sqrt{m}) = \frac{x+2i\pi\sqrt{m}}{2}G(x + 2i\pi\sqrt{m}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$

et donc en utilisant (1) que $G(x + 2i\pi\sqrt{m}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e(-\frac{3}{8})r_2(m)\sqrt{\pi}}{2m^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{2}}}$. Ceci est l'outil numéro (3).

6.3.2 Listing des outils

Récapitulons: nous avons que $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(k)}{\sqrt{k}} e^{-z\sqrt{k}}$, vérifie $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\frac{1}{x})$, (2)

$G(x + 2i\pi\sqrt{m}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e(-\frac{3}{8})r_2(m)\sqrt{\pi}}{2m^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{2}}}$, (3) de plus on a que $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{4}} e^{-x\sqrt{k}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}}$, (4) et que

$\psi(x + 2i\pi\sqrt{m}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(1)$, (5) On va maintenant pouvoir démontrer un résultat plus fort que celui que nous avons annoncé, On ne peut pas obtenir un résultat avec une précision meilleure que $\mathcal{O}(x^{\frac{1}{4}})$ certes mais on peut démontrer plus fort que cela: il existe une constante $K > 0$ telle que les inégalités $R(n) - \pi n > Kn^{\frac{1}{4}}$ et $R(n) - \pi n < -Kn^{\frac{1}{4}}$ sont vraies pour une infinité d'entiers naturels n .

6.4 Conclusion

Soit $K > 0$ si à partir d'un certain rang on a que l'inégalité $R(n) - \pi n \leq Kn^{\frac{1}{4}}$ est toujours vrai alors

on a que $G(z) - K\psi(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Delta(p) - Kp^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-z\sqrt{p}}$ donc par (2) et (4) on a que $G(x) - K\psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{K\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}}$

mais donc par notre hypothèse vu que $R(n) - \pi n \leq Kn^{\frac{1}{4}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang on a $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\Delta(p) - Kp^{\frac{1}{4}}|}{\sqrt{p}} e^{-x\sqrt{p}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{K\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}}$.

On a aussi par (3) et (4) que $|G(x + 2i\pi\sqrt{m}) - K\psi(x + 2i\pi\sqrt{m})| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{r_2(m)\sqrt{\pi}}{2m^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{2}}}$. Finalement en utilisant la représentation sous forme de série de $G - K\psi$ on a que

$|G(x + 2i\pi\sqrt{m}) - K\psi(x + 2i\pi\sqrt{m})| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\Delta(p) - Kp^{\frac{1}{4}}|}{\sqrt{p}} e^{-x\sqrt{p}}$. Finalement par les deux équivalents

précédents on doit avoir que $\frac{r_2(m)}{2m^{\frac{1}{4}}} \leq K$, on peut prendre $m=1$ puis constater que si $K < \frac{1}{2}$ on obtient une contradiction. Ainsi pour $K=0.25$ on a que l'inégalité $R(n) - \pi n > Kn^{\frac{1}{4}}$ est vraie une infinité de fois. On procède de la même manière pour montrer que $R(n) - \pi n < -Kn^{\frac{1}{4}}$ est vraie une infinité de fois. Ceci constitue le résultat de Hardy qu'il a prouvé en 1915, on peut prouver le même résultat pour $D(x)$ la démonstration repose sur exactement les mêmes idées et outils mais la difficulté

provient de l'obtention d'une expression analogue à $\sum_{k=1}^{\infty} r_2(k) e^{-x\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{x^2} + 2\pi x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_2(k)}{(x^2 + 4\pi^2 k)^{\frac{3}{2}}}$

pour $\sum_{k=1}^{\infty} d(k) e^{-x\sqrt{k}}$, ce qui fait que la preuve de Hardy ne viendra qu'en 1919.

7 Somme Exponentielle

Dans cette partie nous allons parler de méthode qui permette d'estimer des sommes de la forme $S := \sum_{p \in I} e(f(p))$ ou f est une fonction réelle et I est un intervalle d'entiers fini, on rappelle que pour

$z \in \mathbb{C}$ on a défini $e(z) := \exp(2i\pi z)$. Ce type de sommes apparaît dans de nombreux problèmes d'estimation asymptotique il est donc plus qu'utile de savoir en donner une estimation. Nous verrons plus tard comment retranscrire le problème des diviseurs de Dirichlet et du comptage de Gauss en des problèmes d'estimation de sommes exponentielles.

7.1 Notation pour cette partie

On va noter pour un réel x , $N(x) := \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ (Remarque, on a toujours $N(x) \leq \frac{1}{2}$) on se permettra aussi d'employer la même notation pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ fini, $N(f)$ désignant alors $\inf_{x \in [a, b]} N(f(x))$. I désigne dorénavant un intervalle d'entier fini de la forme $\llbracket a + 1, b \rrbracket$ et lorsque l'on dira qu'une fonction f est définie sur I cela voudra dire qu'elle est définie sur un intervalle réel comprenant I . On définit $\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, ψ admet le développement en série de Fourier $\psi(x) = - \sum_{k \neq 0} \frac{e(kx)}{2i\pi k}$ enfin la notation $\mathcal{O}$ est remplacée par $\ll$ qui est moins encombrante.

On utilisera souvent l'intégration de Stieltjes dans cette partie ; quand ce sera le cas je ferais uniquement mention de "Stieltjes".

7.2 Objectif de la section

Nous n'allons pas détailler les preuves de tous les théorèmes énoncés, cela n'étant pas toujours pertinent, nous donnerons dans ce cas une idée de la preuve. Les théorèmes dont la preuve sera détaillée seront les plus importants et ceux qui m'ont le plus marqués.

7.3 Théorème de Kuzmin-Landau et inégalité de Van der Corput et autre Lemme

7.3.1 Théorème de Kuzmin-Landau

Ce théorème donne un premier résultat nous trivial sur l'estimation de sommes exponentielles.

Soit f une fonction de classe C^1 sur I , telle que f' est monotone et telle qu'il existe $x \in]0, \infty[$ tel que $x \leq N(f')$. Alors on a $\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll \frac{1}{x}$ (Le grand tau est indépendant de f sinon le résultat serait trivial).

Vu que le module de la somme n'est pas changé quand on remplace f par $-f$ on peut supposer que f est croissante ; de plus nos hypothèses nous permettent de dire qu'il existe un entier n tel que $n + x \leq f' \leq n + 1 - x$ vu que l'on peut remplacer f par $f - n(\cdot)$ dans la somme sans pour autant changer sa valeurs et les hypothèse sur f on peut supposer que $x \leq f' \leq 1 - x$.

les hypothèses sur f permettent de dire que $g(n) := f(n + 1) - f(n)$ est croissante. Maintenant en écrivant que $e(f(n)) = \frac{e(f(n)) - e(f(n+1))}{1 - e(g(n))}$ en notant $P_n := \frac{1 + i \cot(\pi g(n))}{2} = \frac{1}{1 - e(g(n))}$.

On a que $\sum_{n \in I} e(f(n)) = e(f(b)) + \sum_{n=a+1}^{b-1} (e(f(n)) - e(f(n+1)))P_n$ par une sommation d'Abel cette

somme est alors égale à : $e(f(a+1))P_{a+1} + e(f(b))(1 - P_{b-1}) + \sum_{n=a+2}^{b-1} e(f(n))(P_n - P_{n-1})$ par inégalité triangulaire on a alors

$$|\sum_{n \in I} e(f(n))| \leq |P_{a+1}| + |1 - P_{b-1}| + \sum_{n=a+2}^{b-1} \frac{|\cot \pi g(n) - \cot \pi g(n-1)|}{2}. \text{Finalement vu que } \cot \pi g(n)$$

décroît, on peut retirer les valeurs absolues dans la somme et vu que $\cot \pi x \ll \frac{1}{x}$ et $\cot$ est π périodique en appliquant cela à la somme télescopique on a bien le résultat.

7.3.2 Théorème de Van der Corput

Ce théorème très utile se prouve grâce à l'inégalité précédente. On observe alors que pour aborder les sommes exponentielles, il semble qu'avoir des hypothèses sur les dérivées de f est important.

Soit f de classe C^2 sur I de sorte qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*_+$ et $1 \leq y$ tel que pour $t \in I$ on a $x \leq |f''(t)| \leq yx$. On peut séparer I en intervalles où f est proche d'un entier et où f n'est pas proche d'un entier puis appliquer le théorème de Kuzmin sur chacun des intervalles où f n'est pas proches d'un entier pour prouver que $S \ll y|I|\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

7.3.3 Inégalité de Van der Corput

Soit f une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ à support dans I pour M un entier naturel non nul on a

$$|\sum_{n \in I} f(n)|^2 \leq \frac{|I| + M}{M} \sum_{|p| < M} (1 - \frac{|p|}{M}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \overline{f(n+h)}.$$

Preuve: On écrit que $M \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k=1}^M \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=1}^M f(n+k)$ on constate que si la somme intérieure n'est pas vide alors $a - M \leq n \leq b - 1$ par l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$M^2 |\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)|^2 \leq (|I| + M) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\sum_{k=1}^M f(n+k)|^2 = (|I| + M) \sum_{(u,v) \in [1,M]^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+u) \overline{f(n+v)}.$$

Finalement un dénombrement des couples (u,v) tels que $u - v = p$ pour $|p| < M$ permet de conclure. On applique cela à $g(n) := e(f(n))$ si $n \in I$ et g nulle sinon. En introduisant $S_1(k) := \sum_{n \in I(k)} e(f(n+k) - f(n))$

pour $I(k) := \{n, n+k \in I, n \in I\}$. On obtient en majorant $1 - \frac{|p|}{M}$ par 1 que $|S|^2 \leq \frac{|I| + M}{M} \sum_{|p| < M} |S_1(p)|$.

Maintenant si on suppose que $M \leq |I|$ on a $|S|^2 \leq \frac{2|I|}{M} \sum_{|p| < M} |S_1(p)|$. En constatant que $S_1(-h) = \overline{S_1(h)}$

et en sortant le terme en $S_1(0) = |I|$ de la somme on obtient que $|S|^2 \leq \frac{2|I|^2}{M} + \frac{4|I|}{M} \sum_{1 \leq k \leq M} |S_1(k)|$

Cette dernière inégalité est la plus importante. On peut remarquer que $S_1(k)$ est aussi une somme exponentielle ce qui est propice à l'itération de l'inégalité après avoir de nouveau appliqué l'inégalité de Cauchy Schwarz.

7.3.4 Lemme 1

Ce résultat est la version intégrale du théorème de Van der Corput. Il se démontre avec les mêmes idées. Soit f de classe C^2 sur $[a,b]$ on suppose que $|f^{(2)}| > x > 0$ Alors $\int_a^b e(f(t)) dt \ll x^{-\frac{1}{2}}$ le grand tau ne dépend pas de a, b et de f . Preuve: on fixe h un paramètre dans $\mathbb{R}^*_+$ on note

$A := \{x, h \leq |f(x)|\}$ et $B := \{x, |f(x)| < h\}$ par hypothèse sur $f^{(2)}$ A est réunion de au plus deux intervalles et B et au plus un intervalle (vide sinon).

On traite maintenant chacun des termes on a:

$\int_A e(f(t))dt = \int_A \frac{f'(t)e(f(t))}{f'(t)}dt = \mathcal{O}(\frac{1}{h}) - \frac{1}{2i\pi} \int_A e(f(t))(\frac{1}{f'})'(t)dt$ mais $\frac{1}{f'}$ est monotone car f' l'est donc $|\int_A e(f(t))(\frac{1}{f'})'(t)dt| \leq \int_A |(\frac{1}{f'})'(t)|dt = |\int_A (\frac{1}{f'})'(t)dt| = \mathcal{O}(\frac{1}{h})$ le grand tau est donné par le théorème fondamental de l'analyse et la définition de A . On peut écrire que $B =]c, d[$ il en suit que par le théorème de Rolle qu'il existe v tel que $c < v < d$ et $\frac{f'(d)-f'(c)}{d-c} = f^{(2)}(v)$ et donc par définition de B et continuité de f' on a que $|\int_B e(f(t))dt| \leq d - c \leq \frac{2h}{x}$

en sommant les deux majoration on a $\int_a^b e(f(t))dt \ll \frac{1}{h} + \frac{2h}{x}$ on choisit alors $h = x^{\frac{1}{2}}$

7.3.5 Lemme fondamental 1

On va démontrer un résultat proche de théorème de type phase stationnaire, la démonstration étant longue on ne donnera que les outils principaux de cette dernière.

Soit f une fonction de classe C^4 sur $[a, b]$ on suppose que $0 < x_2 \leq f^{(2)}$ qu'il existe $v \in]a, b[$ tel que $f'(v) = 0$ que $|f^{(3)}| \leq x_3$ et que $|f^{(4)}| \leq x_4$

$\int_a^b e(f(t))dt = \frac{e(\frac{1}{8} + f(v))}{\sqrt{f^{(2)}(v)}} + \mathcal{O}(H_1 + H_2)$ ou $H_1 = \min(\frac{1}{x_2(v-a)}, \frac{1}{x_2^{\frac{1}{2}}}) + \min(\frac{1}{x_2(b-v)}, \frac{1}{x_2^{\frac{1}{2}}})$ et $H_2 = (b-a)(x_4x_2^{-2} + x_3^2x_2^{-3})$

Preuve: on peut assumer que $a + x_2^{-\frac{1}{2}} \leq v \leq b - x_2^{-\frac{1}{2}}$ sinon le lemme 1 conclut et en multipliant par $e(-f(v))$ on peut se ramener au cas $f(v) = 0$ on peut aussi faire une translation de coordonnées pour

se ramener au cas $v = 0$ on pose alors $y(t) = \frac{1}{2}f^{(2)}(0)t^2$ et on écrit que $h(t) = f(t) - y(t) = \frac{t^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 f^{(3)}(ts)ds$

et $h'(t) = t^2 \int_0^1 (1-s)f^{(3)}(ts)ds$

puis $\int_a^b e(f(t))dt = \int_a^b e(y(t))dt + \int_a^b e(y(t))(e(h(t)) - 1)dt$ le premier morceau se traite grace au calcul de l'intégrale de Fresnel. La précision du traitement de ce morceau permet de restreindre

le problème à montrer que $\int_a^b e(y(t))(e(h(t)) - 1)dt \ll H_1 + H_2$. Ensuite on écrit que $1 = \frac{2i\pi f''(0)t}{2i\pi f''(0)t}$

dans l'intégrale et on procède à une intégration par parties en intégrant $2i\pi f''(0)te(y(t))$ le morceaux

entre crochet est $\ll H_1$, le morceau intégrale n'est d'autre que $\frac{1}{f''(0)} \int_a^b e(y(t))(\frac{e(h(t))h'(t)}{t} - \frac{e(h(t)) - 1}{t^2})dt$.

Le reste de la démonstration porte sur le traitement des termes dans l'intégrale en procédant notamment à des intégrations par parties en posant les bonnes fonctions et en utilisant les hypothèses sur f .

7.3.6 Lemme fondamental 2

Ce lemme va permettre de relier le résultat intégral précédant aux sommes exponentielles. Soit f de classe C^2 de sorte que f' est décroissante, on fixe deux entiers U, V vérifiant $U < f' < V$ et

$2 \leq V - U =: Y$. Alors on a $S = \sum_{U \leq p \leq V} \int_a^b e(f(t) - pt) dt + \mathcal{O}(\log(V - U))$.

Preuve : on peut remplacer f par $f - n(\cdot)$ donc on peut supposer U négatif et V positif, l'intégration de Stieltjes donne que $\sum_{a < k \leq b} e(f(k)) = \int_a^b e(f(t)) dt - \int_a^b e(f(t)) d\psi(t)$

Une IPP donne alors $-\int_a^b e(f(t)) d\psi(t) = 2i\pi \int_a^b e(f(t)) f'(t) \psi(t) dt + \mathcal{O}(1)$. On utilise alors que les sommes partielles de la série de Fourier de ψ sont uniformément bornées (se prouve par transformation d'Abel) pour appliquer un théorème de convergence dominée,

ainsi $2i\pi \int_a^b e(f(t)) f'(t) \psi(t) dt = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \int_a^b e(f(t) - kt) f'(t) dt$. Si $k < U$ ou $k > V$ on a par hypothèse

que $f' - k$ ne s'annule pas et on peut vérifier que $\frac{f'}{f' - k}$ est monotone(*) donc en écrivant $1 = \frac{f'(t) - k}{f'(t) - k}$ dans l'intégrale et en faisant une IPP on obtient en majorant par inégalité triangulaire le terme intégral puis en utilisant l'hypothèse de monotonie (*), que

$$\int_a^b e(f(t) - kt) f'(t) dt \ll \frac{|f'(a)|}{|f'(a) - k|} + \frac{|f'(b)|}{|f'(b) - k|} \ll 2 \left(\frac{|U|}{|U - k|} + \frac{|V|}{|V - k|} \right) \text{ par (*) pour la dernière inégalité.}$$

Maintenant par utilisation de la fonction Diagramma on a que $\sum_{k < U} \frac{|U|}{|k(U - k)|}$ et $\sum_{k > V} \frac{|V|}{|k(V - k)|}$ sont

des grands tau de $\log(V - U)$. Poursuivons: par IPP on a

$$\sum_{U \leq k \leq V, k \neq 0} \frac{1}{k} \int_a^b e(f(t) - kt) f'(t) dt = \sum_{U \leq k \leq V, k \neq 0} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) + \int_a^b e(f(t) - kt) dt = \mathcal{O}(\log(Y)) + \sum_{U \leq k \leq V, k \neq 0} \int_a^b e(f(t) - kt) dt$$

et donc en sommant tout les termes que nous avons traités, nous obtenons bien le résultat attendu.

7.4 Explication et Lemme final

On va maintenant s'intéresser à des fonctions d'une certaine forme. On va supposer que I est inclus dans un intervalle de la forme $[N, 2N]$ et que f est de classe C^4 que $f'' < 0$ qu'il existe $F \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $f'' \approx -FN^{-2}$ que $f^{(3)} \ll FN^{-3}$ et $f^{(4)} \ll FN^{-4}$. On définit aussi x_n comme vérifiant $f'(x_n) = n$ pour $n \in [f'(b), f'(a)]$ entier. Alors on a le résultat suivant qui se prouve en combinant les deux lemmes fondamentaux.

$$S = \sum_{f'(b) \leq p \leq f'(a)} \frac{e(-(\frac{1}{8} + px_p - f(x_p)))}{\sqrt{f''(x_p)}} + \mathcal{O}(\log(FN^1 + 1) + F^{-\frac{1}{2}}N)$$

On aimerait maintenant utiliser l'inégalité de Van der Corput et ce Lemme final afin d'estimer S . Pour cela on va introduire une classe de fonction qui va nous permettre de créer deux processus de majoration de S que l'on pourra combiner entre eux, un processus venant de l'inégalité de Van der Corput et l'autre du Lemme final.

7.5 Paire d'exposant

A partir de maintenant on aura toujours I inclus dans un intervalle de la forme $[N, 2N]$.

On fixe N, y, s, t des réels positifs de sorte que $t < \frac{1}{2}$; on dit que f est dans $F(N, P, y, s, t)$ pour un entier naturel P , si: (1) f admet P dérivé sur I

(2) pour $0 \leq p < P$ et $x \in [a, b]$ on a $|f^{(p+1)}(x) - y(-1)^p(s)_p x^{-s-p}| < ty(s)_p x^{-s-p}$. En gros on

cheche à étudier les sommes exponentielles pour des fonctions f qui vérifient que $f'(x) \approx yx^{-s}$ et que cette approximation est vraie pour un nombre donné de dérivés de f !

On peut maintenant définir les paires d'exposants, on dit que (k, l) est une paire d'exposant si $0 \leq k \leq \frac{1}{2} \leq l \leq 1$ et que pour tout réel s strictement positif il existe un P et un $t < \frac{1}{2}$ tels que pour tout entier naturel N et réel positif y et f dans $F(N, P, y, s, t)$ l'estimée suivante est vraie :

$$S \ll (yN^{-s})^k N^l + y^{-1} N^s$$

On peut remarquer que l'on peut toujours assumer que $y^{-1} N^s > \frac{1}{2}$ sinon le théorème de Kuzmin Landau conclut et que par une amélioration de ce dernier théorème par Van der Corput on peut même toujours supposer que $y^{-1} N^s > 1$ ce qui nous sera utile dans une des preuves.

7.5.1 Mise en place de l'itération

On va voir sous quelles conditions on peut itérer l'inégalité de Van der Corput. Rappelons nous que dans cette inégalité, estimer $|S|^2$ pour f revient à estimer des sommes exponentielles qui font intervenir $f(n) - f(n+k)$ pour un entier k .

Nous allons donc utiliser le résultat suivant : soit $f \in F(N, P, s, y, t)$ définie sur $[a, b]$ notant $g(x) := f(x) - f(x+h)$ pour $1 \leq h < \min(b-a, \frac{2tN}{s+P})$ on a que g est définie sur $[a, b-h]$ et $g \in F(N, P-1, s+1, shy, 3t)$

7.6 Processus A

Si (k, l) est une paire d'exposant alors $(u, v) := A(k, l) := (\frac{k}{2(k+1)}, \frac{k+1+l}{2(k+1)})$ en est une !

Pour prouver cette affirmation on distingue deux cas. Le premier cas où $yN^{-s} > \log N$ pour lequel on utilise l'inégalité de Van der Corput et la sous section précédente. Pour le second cas $yN^{-s} \leq \log N$ on utilise le théorème de Van der Corput qui donne $S \ll (N \log N)^{\frac{1}{2}} \ll (yN^{-s})^u N^v$

7.7 Processus B

Si (k, l) est une paire d'exposant alors $B(k, l) := (1 - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ (Remarque : ce processus est involutif) en est une ! On ne va prouver le processus B que pour les fonction qui sont exactement de la forme $f'(\cdot) = y(\cdot)^{-s}$.

Preuve: On utilise les notations du lemme final. on fixe f de sorte que $f'(\cdot) = y(\cdot)^{-s}$. Ainsi f vérifie les hypothèses du lemme final et notant $\alpha := f'(N)$ et $\beta := f'(2N)$

$$S = \sum_{\beta \leq k \leq \alpha} \frac{e(-\frac{1}{8} - vx_v + f(x_v))}{|f''(x_v)|^{\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\log(2yN^{-s}) + (yN^{-s})^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}})$$

Un calcul explicite de $vx_v - f(x_v) := g(v)$

$$\text{permet de dire que } K(v) := \sum_{\alpha < p \leq v} e(g(p)) \ll N^k L^1 + N^{-1}$$

et par intégration de Stieltjes $S = \int_{\alpha}^{\beta} |f''(x_v)|^{\frac{1}{2}} d\overline{K(v)} \ll (yN^{-s})^{(1-\frac{1}{2})} N^{k+\frac{1}{2}} + (yN^{-s})^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}}$. Ainsi

en mettant tout ensemble on obtient

$S \ll (yN^{-s})^{1-\frac{1}{2}} + \log(2yN^{-s}) + (yN^{-s})^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}}$ mais comme on suppose que $yN^{-s} > 1$ le premier terme domine et ainsi on a bien le résultat attendu.

7.8 Etude de ψ

On aimerait étudier $\sum_{n \in I} \psi(f(n))$ à partir de somme exponentielle, en utilisant la série de Fourier de ψ . Pour cela on va utiliser le résultat de J.D Vaaler trouvé en 1984, donc un résultat très récent comparé au début de la théorie sur les sommes exponentielles. Pour démontrer ce résultat Vaaler a utilisé la fonction de Beurling définie pour $z \in \mathbb{C}$ par $B(z) := \frac{\sin(\pi z)^2}{\pi^2} \left(\frac{2}{z} + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sign}(p)}{(z+p)^2} \right)$.

Théorème: Soit $x \in \mathbb{R}$ en notant $F_n(x) := \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{2i\pi kx}$ il existe des nombres réels $(c_{k,n})_{|k| \leq n}$ dans $[0,1]$ tels que $|\psi(x) + \sum_{|k| \leq n} c_{k,n} \frac{e(kx)}{2i\pi k}| \leq \frac{1}{2(n+1)} F_n(x)$

7.8.1 Maitrise de $\sum_{n \in I} \psi(f(n))$

Pour une paire d'exposant (k,l) en fixant $f \in F(N, P, y, s, t)$ on a que $\sum_{n \in I} \psi(f(n)) \ll y^{\frac{k}{k+1}} N^{\frac{(1-s)k+1}{k+1}} + y^{-1} N^s$ pour démontrer cela on utilise l'inégalité de Vaaler et l'hypothèse sur f .

8 Résultat sur $D(x)$ et $R(x)$

8.1 Pour $D(x)$

On va noter $\Delta_1(x) := D(x) - x(\log x + 2\gamma - 1)$. Par intégration de Stieltjes on a

$\sum_{1 \leq j \leq x} \frac{1}{j} = \log x + \gamma - \frac{\psi(x)}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On utilise alors l'expression de $D(x)$ trouvée par Dirichlet

$D(x) = 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - [x]^2$ pour trouver que $\Delta_1(x) = \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{k}\right) + \mathcal{O}(1)$. Nous venons de trans-

former le problème de Dirichlet en un problème d'estimation de somme exponentielle. Il ne nous reste alors plus qu'à réaliser une sommation dyadique. Pour mettre le problème sous la bonne forme on introduit $I_n := \{k, 2^{-n}\sqrt{x} < k \leq 2^{-n+1}\sqrt{x}\}$, on note $J := \frac{1}{2} \log x$ on alors que $\sum_{1 \leq k \leq x^{\frac{1}{2}}} \psi\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{1 \leq p \leq J} \sum_{m \in I_p} \psi\left(\frac{x}{k}\right)$

On applique alors la sous section 7.8.1 à chaque somme sur I_n ; on peut le faire car $t \mapsto \frac{x}{t}$ est dans le bon espace, pour trouver que

$\sum_{1 \leq k \leq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{k}\right) \ll x^{\frac{k+1}{2(k+1)}} \sum_{1 \leq p \leq J} 2^{-p(1-k)} + A$ où A est un grand tau de 1. Finalement on constate que

si $(k,l) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ on a que $\Delta_1(x) \ll x^{\frac{1}{3}} \log x$ et sinon on a que $\Delta_1(x) \ll x^{\frac{k+1}{2(k+1)}}$.

8.2 Pour $R(x)$

On va noter $R(x) - \pi x =: \Delta_2(x)$. On a déjà exprimé $R(x)$ sous forme de somme avec des parties entières et donc on peut traduire le problème en terme de somme sur ψ , cependant le fonction

$t \mapsto \sqrt{x-t^2}$ ne se prête pas à l'application de nos théorèmes sur les paires d'exposant ! On va plutôt utiliser l'expression de $r_2(n)$ trouvé en section 5. On note $f(d) := \frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}}}{2}(1 - (-1)^d)$, on a que $r_2(n) = 4 \sum_{d|n} f(d)$, puis on utilise une nouvelle fois le partitionnement de la méthode de

l'hyperbole :

$$\sum_{1 \leq p \leq x} \sum_{d|p} f(d) = \sum_{ab \leq x} f(a) = \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{x}} f(k) \lfloor \frac{x}{k} \rfloor + \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} < m \leq \frac{x}{k}} f(m).$$

Par intégration de Stieltjes on a que $V(x) := \sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2} - \psi(\frac{x-1}{4}) + \psi(\frac{x+3}{4})$

et $\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{V(x) - \frac{1}{2}}{x} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ ceci permet d'avoir

$$\Delta_2(x) = 4 \sum_{1 \leq p \leq \sqrt{x}} \psi(\frac{x}{4p+1}) - \psi(\frac{x}{4d+3}) + \psi(\frac{x-3}{4d}) - \psi(\frac{x-1}{4d}) + \mathcal{O}(1)$$

Cette mise en forme du problème permet par la sous section 7.8.1 d'obtenir que si (k, l) est une paire d'exposant alors $\Delta_2(x) \ll x^{\frac{k+1}{2(k+1)}} \log(x)$ et on peut retirer le log si la paire est différente de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

8.3 Optimisation et conclusion

On peut voir que l'on a les mêmes résultats sur Δ_1 et Δ_2 . On peut se demander en combinant les processus A et B quelle est la meilleure paire d'exposant pour ces problèmes. On peut remarquer que $(0, 1)$ est une paire d'exposant (il s'agit juste de majorer par la longueur de l'intervalle) puis en appliquant B, on trouve que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est une paire d'exposant. On trouve ainsi le résultat de Voronoï $\Delta_1(x) \ll x^{\frac{1}{3}} \log x$, puis en appliquant alors 3 fois le processus A puis une fois le processus B on obtient que $(\frac{11}{30}, \frac{26}{30})$ est une paire d'exposant et pour nos deux problèmes on a alors la précision $\mathcal{O}(x^{\frac{27}{82}})$.

La méthode des paires d'exposant est très efficace et donne de bons résultats. Cependant on est encore loin du $\mathcal{O}(x^{\frac{1}{4}})$, le meilleur résultat venant de la méthode des paires d'exposant étant autour de 0,329 et le meilleur résultat connu étant autour de 0,32. La plupart des personnes ayant abordés le problème pensent que la valeur 0.25 est optimale cependant les méthodes actuelles ne sont en aucune mesure proche de nous donner ce résultat !

9 Sources utilisées pour le rapport

Pour la partie sur les sommes exponentielles j'ai principalement utilisé le livre "Van der Corput's Method of Exponential Sums" de S.W Graham et G.Kolenisk. La preuve de Hardy vient de son article "On the expression of a number as the sum of two squares". La construction de la preuve sur $r_2(n)$ vient d'un exercice présent dans le poly de cours d'analyse complexe de G.Dospinescu de 2023.