L'anneau adélique et la fonction zêta de Riemann

Ivan Doubovik

2 mai 2022

Remerciements

Je tiens tout d'abord a remercier Mr. Didier Lesesvre pour toute son aide et de sa bienveillance tout au long de ce TER. Je tiens également a le remercier pour sa patience et de sa volonté de rendre le sujet intéressant en concentrant l'étude du sujet sur les points qui m'intéressaient le plus. De plus il a passé beaucoup de temps a expliquer certains détails / passages que je ne comprenais pas ce qui a rendu le sujet plus facile a comprendre.

Introduction

Les nombres premiers jouent un rôle très important en mathématiques et même dans d'autres domaines tels que l'informatique, cependant il est très difficile d'avoir des résultats puissants sur ceux-ci. Nous pouvons néanmoins obtenir des résultats asymptotiques sur ceux-ci aux moyens de l'analyse. Par exemple la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

définie pour $\Re(s) > 1$ peut être exploitée pour obtenir des informations sur les nombres premiers. En effet nous pouvons montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. En regardant cette fonction en $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 1$ nous pouvons alors essayer de la prolonger sur un domaine plus grand en utilisant de l'analyse complexe afin de pouvoir étudier plus facilement cette fonction. Dans ce document nous allons pas nous intéresser aux nombres premiers mais plutôt a une technique moderne qui peut être utiliser pour prolonger cette fonction.

Prolonger la fonction ζ n'a rien de nouveau, cela été fait par Riemann en 1859 en utilisant des techniques d'analyse complexe. Pour montrer que ζ pouvait etre étendue holomorphiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ il a d'abord posé la fonction

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

et montré que celle ci pouvait être prolongée holomorphiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ en vérifiant l'équation suivante dite équation fonctionnelle :

$$\xi(s) = \xi(1 - s)$$

Où Γ est la fonction d'Euler définie par :

$$\Gamma(s) = \int_{\mathbb{R}^\times} t^{s-1} e^{-s} d\lambda(t)$$

Ainsi en sachant que Γ ne s'annule pas nous obtenons directement que ζ se prolonge holomorphiquement $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ ce qui répond alors au problème. Mais nous n'allons pas étudier la méthode de Riemann, nous allons plutôt nous intéresser a une approche plus moderne qui utilise l'anneau adélique.

Un mathématicien qui a su généraliser la méthode exposée par Riemann est Erich Heck. Il montre que pour un ensemble de fonctions ayant des propriétés similaire a celles de la fonction ζ nous pouvons alors les prolonger en utilisant une fonction ξ qui vérifie une certaine équation dite équation fonctionnelle.

Avant que l'approche que nous allons exposer existe, les méthodes pour trouver cette équation fonctionnelle étaient pas très intuitives plusieurs mathématiciens dont Emil Artin se sont demandés en particulier d'où vient le facteur $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ qui intervient dans l'expression de ξ. Emil Artin propose alors a Margaret Matchett de trouver une généralisation adélique des travaux de Erich Heck lors de sa thèse. L'idée était d'utiliser l'anneau $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ que nous définirons afin de pouvoir faire de l'analyse sur $\mathbb{Q}$ de la même manière que nous pouvons transporter des résultats d'analyse de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$. Malheureusement bien que Margaret Matchett obtient sa thèse en 1946 elle n'a pas réussi a atteindre ce but qui était très ambitieux. C'est alors prochain thésard de Emil Artin, John Tate qui réussit alors a atteindre ce but. Il obtient alors sa thèse en 1950 et devient célèbre pour son travail.

Ce qui sera étudié dans ce document n'est que un cas particulier de la thèse de Tate, car dans sa thèse il utilise des notions qui elles mêmes sont très sophistiqués. Pour simplifier nous allons donc rester sur le corps $\mathbb{Q}$ et notre but sera uniquement d'établir l'équation fonctionnelle pour la fonction ζ. Bien que ces restrictions soient très fortes nous allons tout de même pouvoir comprendre l'idée générale de sa thèse.

Notations

- Pour des ensembles E, F nous noterons l'ensemble des fonctions qui vont de E dans F par F^E.
- Pour un corps $(k, +, \times)$ nous allons noter k^+ comme étant le groupe additif $(k, +)$ et $k^\times$ comme étant le groupe multiplicatif du corps.
- Pour un espace topologique X nous noterons alors sa topologie par $\mathcal{T}(X)$.
- Pour un espace topologique X, nous noterons $\mathcal{B}(X)$ comme étant la tribu borélienne sur X.
- Pour (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \in]0; +\infty[$ nous poserons alors :
$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$
- Pour un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ nous poserons alors :
$$\mathcal{L}^1(X) = \left\{ f \in \mathbb{C}^X \;\middle|\; \int\limits_X |f(x)| \, d\mu(x) < +\infty \right\}$$
- Nous noterons $e_\infty = e^{2i\pi \cdot} \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
- Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nous noterons sa transformée de Fourrier par $\hat{f}$ qui est alors définie par :
$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e_\infty(-xy) d\lambda(y)$$
- Nous définirons l'ensemble suivant :
$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; f \text{ est continue et } \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\}$$

Table des matières

1 Les valeurs absolues de $\mathbb{Q}$ **9**

1.1 Introduction . . . 9

1.2 Valeur absolue sur un corps . . . 9

1.3 Exemples de valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$ . . . 12

1.4 Classification des valeurs absolues de $\mathbb{Q}$ . . . 15

2 Les nombres p-adiques **35**

2.1 Construction du corps $\mathbb{Q}_p$ . . . 35

2.2 Representation des elements de $\mathbb{Q}_p$ . . . 46

2.3 Topologie de $\mathbb{Q}_p$ . . . 55

2.4 Mesures sur $\mathbb{Q}_p$ . . . 60

2.5 Intégration sur $\mathbb{Q}_p$ . . . 68

3 L'anneau adélique $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ **75**

3.1 Construction de $\mathbb{A}$ . . . 75

3.2 Topologie de $\mathbb{A}$ . . . 85

3.3 Mesure sur $\mathbb{A}$ 87

3.4 Intégration sur $\mathbb{A}$ 91

4 L'équation fonctionnelle adélique 99

4.1 Formule de Poisson 99

4.2 Equation fonctionnelle 106

4.3 Lien avec la fonction Zêta de Riemann 116

Chapitre 1

Les valeurs absolues de $\mathbb{Q}$

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier les valeurs absolues définies sur $\mathbb{Q}$. Il nous faudra tout d'abord définir ce qu'est une valeur absolue, nous voudrons bien évidement que celles-ci aient des propriétés similaires a celles de la valeur absolue usuelle. Ensuite nous classifierons toutes ces valeurs absolues.

1.2 Valeur absolue sur un corps

Définition 1.2.1 :

Soit k un corps.
Soit $n \in (\mathbb{R}_+)^k$, une application de k dans $\mathbb{R}_+$.
Alors on dit que n est une valeur absolue pour le corps k si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall x \in k, n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_k$
2. $\forall x, y \in k, n(x+y) \leqslant n(x) + n(y)$

3. $\forall x, y \in k, n(xy) = n(x)n(y)$

Nous avons les propriétés suivantes qui sont issues de la définition.

Propriétés 1.2.2:

Soit k un corps.
Soit n une valeur absolue pour le corps k.
Alors nous avons les propriétés suivantes :

1. $n(1_k) = 1$
2. $\forall x \in k^\times, n(x^{-1}) = n(x)^{-1}$
3. $n(-1_k) = 1$
4. $\forall x \in k, n(-x) = n(x)$

Preuve :

1. Nous avons $n(1_k) = n(1_k 1_k) = n(1_k)n(1_k)$ d'après le point 3 de la définition. Ainsi on obtient :
$$n(1_k) - n(1_k)n(1_k) = n(1_k)(1 - n(1_k)) = 0$$
En utilisant l'intégrité de $\mathbb{R}$ nous avons $n(1_k) = 0$ ou bien $1 - n(1_k) = 0$. De plus k étant un corps nous avons $1_k \neq 0_k$, ainsi en utilisant le point 1 nous avons nécessairement $n(1_k) \neq 0$. Ainsi nous obtenons que $1 - n(1_k) = 0$ et donc que :
$$1 = n(1_k)$$
2. Soit $x \in k^\times$.
Nous avons $xx^{-1} = 1_k$, d'où $1 = n(1_k) = n(xx^{-1}) = n(x)n(x^{-1})$. D'où $n(x^{-1}) = n(x)^{-1}$.
3. Remarquons que $1_k = (-1_k)^2$, ainsi :
$$1 = n(1_k) = n((-1_k)^2) = n(-1_k)^2$$

Donc $n(-1_k) \in \{-1, 1\}$, or n étant par définition a valeurs positives nous avons $n(-1_k) = 1$.

4. Soit $x \in k$.
   Nous avons :

$$n(-x) = n((-1_k)x) = n(-1_k)n(x) = 1.n(x) = n(x)$$

□

<u>Proposition 1.2.3 :</u>

Soit k un corps.
Soit $|\cdot|$ une valeur absolue pour k.
Alors l'application définie par

$$\begin{aligned} d : k \times k &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |x - y| \end{aligned}$$

définit une distance.

<u>Preuve :</u>

Soit $x, y, z \in k$.
Nous avons $0 = d(x, y) = |x - y| \Leftrightarrow x - y = 0_k \Leftrightarrow x = y$.
De plus $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$.
Enfin $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.
Les points précédents montrent bien que d définit une distance d'où le résultat.

□

1.3 Exemples de valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$

Regardons maintenant quelques exemples de valeurs absolues sur l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$.

Définition 1.3.1 :

Posons l'application

$$\begin{aligned} |\cdot|_0 : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

C'est la valeur absolue triviale.

Définition 1.3.2 :

Posons l'application

$$\begin{aligned} |\cdot|_\infty : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

C'est une valeur absolue de $\mathbb{Q}$ que l'on appellera valeur absolue archimédienne de $\mathbb{Q}$.

Définition 1.3.3 :

Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier.
Soit v_p l'application de valuation p-adique.

Posons

$$\begin{aligned} |\cdot|_p : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ p^{-v_p(x)} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.3.4 :

$\forall x, y \in \mathbb{Q}, |x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{Q}$.
$|0+x|_p = |x|_p \leqslant \max(|0|_p, |y|_p)$
Soit $x, y \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.
Alors $\exists a, c \in \mathbb{Z}, \exists b, d \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$. De plus nous avons

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

D'où $v_p(x+y) = v_p(\frac{ad+bc}{bd}) = v_p(ad+bc) - v_p(bd)$.
De plus posons $a = \min(v_p(ad), v_p(bc))$. Par définition de v_p, nous savons alors que $ad \in (p^a)$ et $bc \in (p^a)$ donc $ad + bc \in (p^a)$. A nouveau par définition de v_p nous avons alors que $v_p(ad+bc) \geqslant a$ et donc

$$v_p(ad+bc) \geqslant \min(v_p(ad), v_p(bc))$$

Donc nous avons que

$$\begin{aligned} v_p(x+y) &\geqslant \min(v_p(ad), v_p(bc)) - v_p(bd) \\ &= \min(v_p(ad) - v_p(bd), v_p(bc) - v_p(bd)) \end{aligned}$$

De plus nous avons $v_p(ad) - v_p(bd) = v_p(a) + v_p(d) - v_p(b) - v_p(d) = v_p(a) - v_p(b) = v_p(\frac{a}{b}) = v_p(x)$. Ainsi que $v_p(bc) - v_p(bd) = v_p(b) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) = v_p(c) - v_p(d) = v_p(\frac{c}{d}) = v_p(y)$. Donc grace a ces calculs nous obtenons

$$v_p(x+y) \geqslant \min(v_p(x), v_p(y))$$

p étant un entier non nul positif nous avons

$$p^{v_p(x+y)} \geqslant p^{\min(v_p(x),v_p(y))} = \min(p^{v_p(x)}, p^{v_p(y)})$$

Ainsi par passage a l'inverse

$$\frac{1}{p^{v_p(x+y)}} \leqslant \frac{1}{\min(p^{v_p(x)}, p^{v_p(y)})} = max(\frac{1}{p^{v_p(x)}}, \frac{1}{p^{v_p(y)}})$$

D'ou

$$|x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$$

□

Proposition 1.3.5 :

L'application $|\cdot|_p$ définit une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$.

Preuve :

Il nous suffit de vérifier que les 3 points de la définition 1.2.1 sont vérifies.

1. Soit $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.
   x étant non nul, $v_p(x)$ existe et $p^{v_p(x)}$ est non nul d'où

$$\frac{1}{p^{v_p(x)}} = |x|_p \neq 0$$

2. Soit $x, y \in \mathbb{Q}$.
   D'après la proposition 1.3.4 nous avons $|x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$.
   De plus

$$\max(|x|_p, |y|_p) \leqslant \max(|x|_p + |y|_p, |x|_p + |y|_p) = |x|_p + |y|_p$$

D'où $|x+y|_p \leqslant |x|_p + |y|_p$.

3. Soit $x \in \mathbb{Q}$.
Nous avons $v_p(0.y) = v_p(0)$.
Soit $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
Nous avons que $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$, ainsi $p^{v_p(xy)} = p^{v_p(x)+v_p(y)} = p^{v_p(x)} p^{v_p(y)}$.
Donc en passant a l'inverse

$$|xy|_p = \frac{1}{p^{v_p(xy)}} = \frac{1}{p^{v_p(x)} p^{v_p(y)}} = \frac{1}{p^{v_p(x)}} \frac{1}{p^{v_p(y)}} = |x|_p \, |y|_p$$

D'où le résultat.

□

1.4 Classification des valeurs absolues de $\mathbb{Q}$

Le critère que nous allons utiliser pour définir la similitude entre deux valeurs absolues utilisera les suites de Cauchy. Nous dirons que deux valeurs absolues sont similaires si elles ont les mêmes suites de Cauchy. L'utilisation des suites de Cauchy est pertinent car si nous souhaitons étudier les complétions de $\mathbb{Q}$ induites par les valeurs absolues, nous savons que si deux valeurs absolues ont les mêmes suites de Cauchy elles nous donneront le même complété de $\mathbb{Q}$. Ce point sera détaillé dans le chapitre des nombres p-adiques. Cette section n'est pas essentielle pour ce qui suit, le lecteur peut se contenter de connaître le théorème 1.4.21 et de passer cette section en première lecture.

Définition 1.4.1 :

Posons $N_{\mathbb{Q}} = \left\{ n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{Q}} \;\middle|\; n \text{ est une valeur absolue} \right\}$ qui est donc l'ensemble des valeurs absolues.
Définissons également la relation équivalence $\mathcal{R} \subset N_{\mathbb{Q}} \times N_{\mathbb{Q}}$ par

$$\forall n_1, n_2 \in N_{\mathbb{Q}}, n_1 \mathcal{R} n_2 \Leftrightarrow n_1 \text{ et } n_2 \text{ ont les memes suites de Cauchy.}$$

Lemme 1.4.2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Posons $n = |\cdot|_\infty^\alpha$ ou $|\cdot|_\infty$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$.
Alors

$$n \text{ est une valeur absolue} \Rightarrow \alpha \in]0;1]$$

Preuve :

Remarquons que n doit respecter le point 2 de la définition 1.2.1.
En particulier nous devons avoir

$$2^\alpha = n(2) = n(1+1) \leqslant n(x) + n(x) = 1^\alpha + 1^\alpha = 1 + 1 = 2$$

Ainsi nous obtenons que $2^\alpha \leqslant 2$ donc $2^{\alpha-1} \leqslant 1$, ceci implique donc que $\alpha - 1 \leqslant 0$ d'où

$$\alpha \leqslant 1$$

D'où le résultat.

$\square$

Lemme 1.4.3 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit n_1, n_2 des valeurs absolues telles que $n_2 = n_1^\alpha$.
Soit $a \in \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ une suite de Cauchy pour n_1.
Alors

$$a \text{ est une suite de Cauchy pour } n_2$$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$.
Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^\alpha \end{aligned}$$

f étant continue en 0 nous avons

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| < \delta \Rightarrow |x^\alpha| = |x|^\alpha < \varepsilon$$

En utilisant le fait que a est de Cauchy nous avons

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, n_1(a(p) - a(q)) < \delta$$

Ainsi pour $p, q \geqslant N$ nous avons $0 \leqslant n_1(a(p) - a(q)) < \delta$, et donc nous obtenons

$$|n_1(a(p) - a(q))|^\alpha = n_1(a(p) - a(q))^\alpha = n_2(a(p) - a(q)) < \varepsilon$$

Ceci montre bien que a est de Cauchy pour n_2.

$\square$

Corollaire 1.4.4 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit n_1 et n_2 des valeurs absolues telles que $n_2 = n_1^\alpha$. Alors nous avons

$$n_1 \mathcal{R} n_2$$

Preuve :

Soit $a \in \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ une suite de Cauchy pour n_1, d'apres le lemme 1.4.3 a est de Cauchy pour n_2.
Soit $a \in (\mathbb{R}_+)^k$ une suite de Cauchy pour n_2, en remarquant que $n_1 = n_2^{\frac{1}{\alpha}}$ nous pouvons a nouveau appliquer le lemme 1.4.3 pour en déduire que a

est une suite de Cauchy pour n_1. Ainsi nous avons montré

$$\forall a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \text{a est de Cauchy pour } n_1 \Leftrightarrow \text{a est de Cauchy pour } n_2$$

Ce qui signifie que n_1 et n_2 ont les mêmes suites de Cauchy.
D'où $n_1 \mathcal{R} n_2$.

$\square$

Nous allons maintenant montrer quelques lemmes qui permettront d'obtenir le théorème d'Ostrowski qui classifie les valeurs valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$. Sa preuve étudie essentiellement 3 cas possibles dont un est trivial. Pour faire ceci définissons tout d'abord les différents cas possibles, ces définitions seront propres a cette section.

Définition 1.4.5 :

Définissons le cas ou la valeur absolue v admet un entier naturel de valeur absolue strictement supérieur a 1 par

$$P_{cas1}(v) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, v(n) > 1$$

Définition 1.4.6 :

Définissons le cas ou la valeur absolue v est non trivial et admet pas d'entiers naturels de valeur absolue strictement plus grande que 1 par

$$P_{cas2}(v) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant 1 \\ \exists n \in \mathbb{N}\backslash \left\{0\right\}, v(n) < 1 \end{cases}$$

Dans chaque cas nous allons chercher un entier naturel qui permettra alors de caractériser la valeur absolue étudiée, d'où les définitions suivantes. Les éléments définis ci dessous n'existent a priori pas forcément, nous démontrerons leur existence dans la suite.

Définition 1.4.7:

Dans le cas ou la valeur absolue v vérifie $P_{cas1}(v)$ nous allons vouloir choisir le plus petit entier naturel n ayant une valeur absolue strictement supérieur a 1, c'est a dire qui vérifie le prédicat

$$P_{cas1,e}(v,n) \Leftrightarrow \begin{cases} v(n) > 1 \\ \forall x \in \mathbb{N}, x < n \Rightarrow v(x) \leqslant 1 \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, v(n) = n^\alpha \end{cases}$$

Définition 1.4.8:

Dans le cas où pour une valeur absolue v, $P_{cas2}(v)$ est vraie nous allons vouloir choisir le plus petit entier naturel n ayant une valeur absolue strictement plus petite que 1, c'est a dire que vérifie le prédicat

$$P_{cas2,e}(v,n) \Leftrightarrow \begin{cases} v(n) < 1 \\ \forall x \in \mathbb{N}\backslash\left\{0\right\}, x < n \Rightarrow v(x) \geqslant 1 \\ n \text{ est un nombre premier} \end{cases}$$

Lemme 1.4.9:

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$ une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ telle que $P_{cas1}(v)$ est verifiée, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}\backslash\left\{0,1\right\}, P_{min,e}(v,n_0)$

Preuve :

Considérons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid v(n) > 1\}$. L'hypothèse entraîne que cet ensemble est non vide, son minimum est donc bien bien défini.
Posons alors

$$n_0 = \min(A)$$

Remarquons que la définition 1.2.1 entraîne que $v(0) = 0$ et les propriétés 1.2.2 entraînent que $v(1) = 1$, nous avons donc forcement $n_0 > 1$.
De plus en sachant que $v(n_0) > 1$, nous pouvons considérer la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto {n_0}^x \end{aligned}$$

D'une part nous avons $f(0) = 1$ et d'autre part en sachant que $n_0 > 1$ nous avons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi en utilisant la continuité de f nous avons

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, f(\alpha) = v(n_0)$$

Donc

$${n_0}^\alpha = f(\alpha) = v(n_0)$$

Enfin remarquons que $n_0^\alpha = v(n_0) > 1$ entraîne donc que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui montre le résultat.

$\square$

Lemme 1.4.10 :

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$ une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ telle que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P_{cas1,e}(v, n_0)$$

alors

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant C n^\alpha$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$
Considérons la décomposition de n dans la base n_0, ceci es possible car

$n_0 > 1$. nous savons que

$$\exists s \in \mathbb{N}, \exists a \in [\![0; n_0 - 1]\!]^{[\![0;s]\!]}, n = \sum_{i=0}^{s} a(i){n_0}^i \text{ et } a(s) \neq 0$$

Et remarquons aussi que pour $i \in [\![0; s]\!], a(i) < n_0 \Rightarrow v(a(i)) \leqslant 1$.
Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} v(n) = v(\sum_{i=0}^{s} a(i){n_0}^i) &\leqslant \sum_{i=0}^{s} v(a(i){n_0}^i) \\ &= \sum_{i=0}^{s} v(a(i))v({n_0}^i) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{s} v(n_0)^i \quad (\text{car } v(a(i)) \leqslant 1) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{s} {n_0}^{\alpha i} \\ &= ({n_0}^s)^\alpha \sum_{i=0}^{s} ({n_0}^{-\alpha})^i \end{aligned}$$

En remarquant que $v(n_0) > 1$ nous avons alors ${n_0}^{-\alpha} = v(n_0)^{-1} < 1$ et donc la série a termes positifs $\sum_{i \geqslant 0} ({n_0}^{-\alpha})^i$ converge. Nous pouvons poser

$$C = \sum_{i=0}^{\infty} ({n_0}^{-\alpha})^i$$

Et nous avons également d'inégalité suivante

$$n = \sum_{i=0}^{s} a(i){n_0}^i \geqslant a(s){n_0}^s \geqslant {n_0}^s$$

Ainsi nous avons que $({n_0}^s)^\alpha \leqslant n^\alpha$ et nous pouvons donc obtenir d'inégalité voulue

$$v(n) \leqslant ({n_0}^s)^\alpha \sum_{i=0}^{s} ({n_0}^{-\alpha})^i \leqslant n^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} ({n_0}^{-\alpha})^i = n^\alpha C$$

$\square$

Lemme 1.4.11 :

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant Cn^\alpha$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant n^\alpha$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$.
Nous avons alors $v(n^N) \leqslant Cn^{\alpha N}$ nous obtenons alors

$$\begin{aligned} v(n^N) = v(n)^N \leqslant Cn^{\alpha N} &\Rightarrow (v(n)^N)^{\frac{1}{N}} \leqslant (Cn^{\alpha N})^{\frac{1}{N}} \\ &\Rightarrow v(n) \leqslant C^{\frac{1}{N}} n^\alpha \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $\forall N \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant C^{\frac{1}{N}} n^\alpha$, ainsi nous pouvons alors passer a la limite et nous avons

$$v(n) = \lim_{N \to \infty} v(n) \leqslant \lim_{N \to \infty} C^{\frac{1}{N}} n^\alpha = n^\alpha$$

Nous avons donc montré que $v(n) \leqslant n^\alpha$ ce qui est le résultat voulu.

$\square$

Lemme 1.4.12:

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$ une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ telle que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} v(n_0) > 1 \\ v(n_0) = {n_0}^{\alpha} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant n^{\alpha} \end{cases}$$

Alors

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) \geqslant C n^{\alpha}$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Sachant que $n_0 > 1$ nous savons alors que

$$\exists s \in \mathbb{N}, {n_0}^s \leqslant n < {n_0}^{s+1}$$

En utilisant d'inégalité triangulaire nous avons alors $v({n_0}^{s+1}) \leqslant v({n_0}^{s+1} - n) + v(n)$ et donc $v(n) \geqslant v({n_0}^{s+1}) - v({n_0}^{s+1} - n)$. En calculant nous avons alors

$$\begin{aligned} v(n) &\geqslant v({n_0}^{s+1}) - v({n_0}^{s+1} - n) \\ &= v(n_0)^{(s+1)} - v({n_0}^{s+1} - n) \\ &= {n_0}^{\alpha(s+1)} - v({n_0}^{s+1} - n) \\ &\geqslant {n_0}^{\alpha(s+1)} - ({n_0}^{s+1} - n)^{\alpha} \end{aligned}$$

D'autre part nous avons que ${n_0}^{s+1} - n \leqslant {n_0}^{s+1} - {n_0}^{s}$, ainsi en sachant que $\alpha \geqslant 0$ nous obtenons alors

$$({n_0}^{s+1} - n)^{\alpha} \leqslant ({n_0}^{s+1} - {n_0}^{s})^{\alpha}$$

et donc

$$-({n_0}^{s+1} - n)^{\alpha} \geqslant -({n_0}^{s+1} - {n_0}^{s})^{\alpha}$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} v(n) &\geqslant {n_0}^{\alpha(s+1)} - ({n_0}^{s+1} - n)^\alpha \\ &\geqslant {n_0}^{\alpha(s+1)} - ({n_0}^{s+1} - {n_0}^s)^\alpha \\ &= {n_0}^{\alpha(s+1)}(1 - (1 - \frac{1}{n_0})^\alpha) \end{aligned}$$

Posons $C = 1 - (1 - \frac{1}{n_0})^\alpha$, remarquons également que $C > 0$. De plus en utilisant que $n \leqslant {n_0}^{s+1}$ et en utilisant le fait que $\alpha \geqslant 0$ nous avons alors $n^\alpha \leqslant {n_0}^{\alpha(s+1)}$. Donc au final nous avons que

$$v(n) \geqslant {n_0}^{\alpha(s+1)} \geqslant n^\alpha C$$

D'où le résultat.

$\square$

Lemme 1.4.13 :

Soit $n \in N_{\mathbb{Q}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) > Cn^\alpha$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v(n) \geqslant n^\alpha$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$.
Nous avons alors $v(n)^N = v(n^N) \leqslant Cn^{\alpha N}$ et donc $v(n) \leqslant C^{\frac{1}{N}} n^\alpha$. Nous avons donc montré que

$$\forall N \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant C^{\frac{1}{N}} n^\alpha$$

Nous pouvons donc passer a la limite pour obtenir

$$v(n) = \lim_{N\to\infty} v(n) \geqslant \lim_{N\to\infty} C^{\frac{1}{N}} n^{\alpha} = n^{\alpha}$$

qui est le résultat voulu.

$\square$

Proposition 1.4.14 :

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$ telle que $P_{cas1}(v)$, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) = n^{\alpha}$$

Preuve :

Il suffit de mettre bout a bout les lemmes précédents pour obtenir ce résultat.
En effet, d'après le lemme 1.4.9

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \begin{cases} v(n_0) > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n < n_0 \Rightarrow v(n) \leqslant 1 \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}, v(n_0) = {n_0}^{\alpha} \end{cases}$$

Ainsi d'après le lemme 1.4.10 nous savons que

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant C_1 n^{\alpha}$$

Et donc en utilisant le lemme 1.4.11 nous savons alors que $\forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant n^{\alpha}$. Par suite en utilisant le lemme 1.4.12, nous obtenons

$$\exists C_2 \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) \geqslant C_2 n^{\alpha}$$

Pour conclure il suffit donc de remarquer que le lemme 1.4.13 nous donne alors

$$\forall n\mathbb{N}, v(n) \geqslant n^\alpha$$

D'une part nous avons que $\forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant n^\alpha$ et d'autre part nous avons $\forall n \in \mathbb{N}, v(n) \geqslant n^\alpha$ nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v(n) = n^\alpha$$

D'où le résultat.

$\square$

La proposition suivante permet alors de caractériser les valeurs absolues vérifiant le premier cas P_{cas1}.

Proposition 1.4.15 :

Soit $v \in N_\mathbb{Q}$ telle que $P_{cas1}(v)$ alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{Q}, v(x) = |x|^\alpha$$

Preuve :

D'après la proposition 1.4.14 nous savons que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, v(n) = n^\alpha$$

Commençons par montrer que ceci peut être étendu a $\mathbb{Z}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Remarquons que $|n| \in \mathbb{N}$, donc d'après les propriétés 1.2.2 nous avons $v(n) = v(|n|) = |n|^\alpha$. Nous avons donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, v(n) = |n|^\alpha$$

Soit $x \in \mathbb{Q}$.
Nous savons alors que $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, x = \frac{p}{q}$. A nouveau par les

propriétés 1.2.2 nous avons alors que

$$\begin{aligned} v(x) = v\left(\frac{p}{q}\right) &= v\left(p\frac{1}{q}\right) \\ &= v(p)v\left(\frac{1}{q}\right) \\ &= v(p)v(q^{-1}) \\ &= v(p)v(q)^{-1} \\ &= |p|^{\alpha}\,|q|^{-\alpha} \\ &= \left|\frac{p}{q}\right|^{\alpha} = |x|^{\alpha} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\square$

Traitons maintenant les valeurs absolues vérifiant le deuxième cas P_{cas2}.

Proposition 1.4.16 :

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$ tel que $P_{cas2}(v)$ soit vérifiée. Alors

$$\exists p \in \mathbb{N}, P_{cas2,e}(v,p)$$

Preuve :

Considerons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid v(n) < 1\}$, par hypothèse cet ensemble est non vide. Nous pouvons donc poser

$$p = \min(A)$$

Il suffit alors de montrer que p est un nombre premier. Tout d'abord remarquons que d'après les propriétés 1.2.2, $v(1) = 1$ donc $p \neq 1$. Terminons la preuve en utilisant un raisonnement par contraposée, supposons que $\exists a, b \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, p = ab$. Nous avons alors $a < p$ et $b < p$, nous avons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v(n) \leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} v(a) \leqslant 1 \\ v(b) \leqslant 1 \end{cases}$$

De plus, a nouveau par les propriétés 1.2.2 nous avons $v(a)v(b) = v(ab) = v(p) < 1$ donc $v(a) < 1$ ou $v(b) < 1$ ce qui signifie donc que $p \neq \min(A)$. Ainsi nous avons montré que

$$\exists a, b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}, p = ab \Rightarrow p \neq \min(A)$$

Et en utilisant le raisonnement par contraposée

$$\begin{aligned} &((\exists a, b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}, p = ab) \Rightarrow \neg(p = \min(A))) \\ \Rightarrow &((p = \min(A)) \Rightarrow \neg(\exists a, b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}, p = ab)) \end{aligned}$$

En utilisant la conclusion de la contraposée nous pouvons donc conclure que p est un nombre premier et donc $P_{cas2,e}(v, p)$ est alors vérifiée, ce qui permet de montrer le résultat.

□

Proposition 1.4.17:

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$ telle que

$$P_{cas2}(v) \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}, p \text{ premier et } v(p) < 1$$

Alors

$$\forall q \in \mathbb{N} \backslash \{p\}, q \text{ premier} \Rightarrow v(q) = 1$$

Preuve :

Faisons un raisonnement par contraposée.
Soit $v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{Q}}$ telle que v satisfait les points 2 et 3 de la définition 1.2.1.
Supposons que $\exists q \in \mathbb{N} \backslash \{p\}, q$ premier et $v(q) \neq 1$.

Ainsi nous avons alors $P_{va2}(v) \Rightarrow v(q) < 1$. Il suffit alors de remarquer que

$$\lim_{n\to+\infty} v(p)^n = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, v(p)^N < \tfrac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to+\infty} v(q)^n = 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}, v(q)^M < \tfrac{1}{2}$$

De plus remarquons que $\text{pgcd}(p^N, q^M) = 1$, alors $\mathbb{Z}$ étant un anneau principal nous avons alors $(p^N) + (q^M) = (1)$. Donc nous avons alors

$$\exists u, w \in \mathbb{Z}, up^N + wq^M = 1$$

Utilisons alors les propriétés 1.2.2 pour obtenir

$$\begin{aligned} v(1) = v(up^N + wq^M) &\leqslant v(up^N) + v(wq^M) \\ &= v(u)v(p)^N + v(w)v(q)^M \\ &\leqslant v(p)^N + v(q)^M \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Or $v(1) < 1 \Rightarrow v \notin \mathbb{N}_{\mathbb{Q}}$, nous avons donc montré

$$\exists q \in \mathbb{N}\setminus\{p\}, q \text{ premier et } v(q) \neq 1 \Rightarrow v \notin N_{\mathbb{Q}}$$

Ainsi en utilisant le raisonnement par contraposée suivant

$$\begin{aligned} &(\neg(\forall q \in \mathbb{N}\setminus\{p\}, q \text{ premier} \Rightarrow v(q) = 1) \Rightarrow \neg(v \in N_{\mathbb{Q}})) \\ \Rightarrow &((v \in N_{\mathbb{Q}}) \Rightarrow (\forall q \in \mathbb{N}\setminus\{p\}, q \text{ premier} \Rightarrow v(q) = 1)) \end{aligned}$$

Donc nous obtenons alors que

$$(v \in N_{\mathbb{Q}}) \Rightarrow (\forall q \in \mathbb{N}\setminus\{p\}, q \text{ premier} \Rightarrow v(q) = 1)$$

Ce qui montre le résultat.

$\square$

Proposition 1.4.18 :

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}, P_{cas2}(v)$, alors nous avons

$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ premier}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{Z}, v(x) = |x|_p^\alpha$$

Preuve :

Pour obtenir le résultat il suffit de enchaîner les deux résultats précédents en utilisant la factorialité de $\mathbb{Z}$, faisons le.
D'apres la proposition 1.4.16 nous savons alors que

$$\exists p \in \mathbb{N}, P_{cas2,e}(v, p)$$

Posons alors $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est premier}\}$ l'ensemble des nombres premiers. En utilisant la proposition 1.4.17 nous avons aussi que

$$\forall q \in A \backslash \{p\}, v(q) = 1$$

Nous savons également que l'anneau $\mathbb{Z}$ est factoriel et que A est une famille de représentants des irréductibles, utilisons ceci pour conclure.
Soit $x \in \mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ factoriel $\Rightarrow \exists u \in \{1, -1\}, x = u \prod\limits_{q \in A} q^{v_q(x)}$, grâce a cette expression nous pouvons calculer la valeur $v(x)$.

$$\begin{aligned} v(x) = v\left(u \prod_{q \in A} q^{v_q(x)}\right) &= v(u) \left(\prod_{q \in A} q^{v_q(x)}\right) \\ &= v\left(\prod_{q \in A} q^{v_q(x)}\right) \\ &= \prod_{q \in A} v(q^{v_q(x)}) \\ &= \prod_{q \in A} v(q)^{v_q(x)} \\ &= v(p)^{v_p(x)} \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{Z}, v(x) = v(p)^{v_p(x)}$.
De plus en posant la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \frac{1}{p^z} \end{aligned}$$

et en utilisant des arguments de continuité ainsi que le fait que $v(p) < 1$ nous savons alors que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, f(\alpha) = \frac{1}{p^\alpha} = v(p)$$

Remarquons que $v(p) \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq 0$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{Z}, v(x) &= v(p)^{v_p(x)} \\ &= \left(\frac{1}{p^\alpha}\right)^{v_p(x)} \\ &= \frac{1}{p^{\alpha v_p(x)}} \\ &= \left(\frac{1}{p^{v_p(x)}}\right)^\alpha \\ &= |x|_p^\alpha \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\square$

Le corollaire qui suit permet alors de caractériser les valeurs absolues vérifiant le deuxième cas P_{cas2}.

Corollaire 1.4.19 :

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}, P_{cas2}(v)$, alors nous avons

$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ premier}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{Q}, v(x) = |x|_p^\alpha$$

Preuve :

En utilisant la proposition 1.4.18 nous avons déjà que

$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ premier}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{Z}, v(x) = |x|_p^\alpha$$

Soit $x \in \mathbb{Q}$.
Nous savons que $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, x = \frac{a}{b}$ et en utilisant les propriétés 1.2.2 nous avons alors

$$\begin{aligned} v\left(\frac{a}{b}\right) &= v(a)v(b^{-1}) \\ &= v(a)v(b)^{-1} \\ &= |a|_p^\alpha \left(|b|_p^\alpha\right)^{-1} \\ &= |a|_p^\alpha \left(|b|_p^{-1}\right)^\alpha \\ &= |a|_p^\alpha \left|\frac{1}{b}\right|_p^\alpha \\ &= \left|\frac{a}{b}\right|_p^\alpha = |x|_p^\alpha \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat.

□

<u>Lemme 1.4.20 :</u>

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, v(n) = 1$.
Alors $v = |\cdot|_0$.

<u>Preuve :</u>

Soit $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.
Nous savons que $\exists a, b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \exists \delta \in \{1, -1\}, x = \delta\frac{a}{b}$. En utilisant les

propriétés 1.2.2 nous avons alors

$$\begin{aligned} v(x) = v(\delta\frac{a}{b}) &= v(\delta)v\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= v(a)v\left(\frac{1}{b}\right) \\ &= v(a)v(b)^{-1} = 1.1 = 1 = |x|_0 \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cette section

Théorème 1.4.21 *(Ostrowski)* **:**

$$\forall v \in N_Q, v\mathcal{R}\,|\cdot|_0 \text{ ou } v\mathcal{R}\,|\cdot|_\infty \text{ ou } \exists p \in \mathbb{N} \text{ premier}, v\mathcal{R}\,|\cdot|_p$$

En en utilisant des mots, ceci signifie que toute valeur absolue de $\mathbb{Q}$ est équivalente a l'une de ces valeurs absolues : $|\cdot|_0, |\cdot|_\infty, |\cdot|_p$.

Preuve :

Soit $v \in N_{\mathbb{Q}}$.
Supposons que $v \neq |\cdot|_0$, alors en utilisant le lemme 1.4.20 nous savons que

$$\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, v(n) \neq 1$$

Supposons que $\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, v(n) > 1$, c'est a dire que $P_{cas1}(v)$ est vérifiée, alors d'après la proposition 1.4.15

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, v = |\cdot|^\alpha$$

Ainsi d'après le corollaire 1.4.4 nous avons alors $v\mathcal{R}\,|\cdot|$.
Traitons le cas restant c'est a dire que $\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, v(n) \leqslant 1$. De plus par nous savons que $\exists n \in \mathbb{N}, v(n) \neq 1$, donc $v(n) < 1$. Alors $P_{cas2}(v)$ est vérifiée, ainsi en utilisant le corollaire 1.4.19 nous avons alors que

$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ premier}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, v = |\cdot|_p^\alpha$$

A nouveau par le corollaire 1.4.4 nous avons alors $v\mathcal{R}\left|\cdot\right|_p$.
Ces cas permettent donc de conclure.

$\square$

Chapitre 2

Les nombres p-adiques

Introduction

Nous savons qu'il y a plusieurs constructions du corps $\mathbb{R}$, une de ces constructions est de considérer le corps $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty$ et d'essayer a partir de ceux ci de créer un corps $\mathbb{R}$ et une valeur absolue $|\cdot|_\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|_\mathbb{R}$ soit complet. Nous pouvons alors nous demander quels genre de corps nous obtenons lorsque nous complétons par le même genre de méthode $\mathbb{Q}$ muni d'une valeur absolue $|\cdot|_p$, c'est l'objet de ce chapitre.

2.1 Construction du corps $\mathbb{Q}_p$

Dans cette partie p sera un nombre premier.

Définition 2.1.1 :

Soit $u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite, définissons alors

$$u \text{ est de Cauchy pour } |\cdot|_p$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in N, \forall n_1, n_2 \geqslant N, |u(n_1) - u(n_2)|_p < \epsilon$$

Définition 2.1.2 :

Définissons l'ensemble des suites de Cauchy sur $\mathbb{Q}$ par

$$\mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}) = \left\{ u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{u est de Cauchy pour } |\cdot|_p \right\}$$

Posons également $\mathbb{1} \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q})$ comme étant la suite de Cauchy constante égale a 1.

Définition 2.1.3 :

Définissons la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall u, v \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}), u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |u(n) - v(n)|_p = 0$$

Le lemme suivant permet d'étendre la valeur absolue $|\cdot|_p$ a $\mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q})$.

Lemme 2.1.4 :

Considérons l'application

$$\begin{aligned} |\cdot|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})} : \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto \lim_{n\to\infty} |u(n)|_p \end{aligned}$$

Cette application est bien définie et de plus nous avons

$$\forall u, v \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}), u\mathcal{R}v \Rightarrow |u|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})} = |v|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})}$$

Preuve :

Soit $u \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q})$.
Montrons que $|u|_p$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour $|\cdot|_\infty$.
Soit $\epsilon > 0$.
Nous savons que u est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ pour $|\cdot|_p$, nous savons donc que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \geqslant N, |u(p) - u(q)|_p < \epsilon$$

Soit $n_1, n_2 \geqslant N$.
Remarquons que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue, en utilisant le point 2 de la définition 1.2.1 nous avons :

$$\begin{aligned} |u(n_1)|_p = |u(n_1) - u(n_2) + u(n_2)|_p \leqslant |u(n_1) - u(n_2)|_p + |u(n_2)|_p \\ \Rightarrow |u(n_1)|_p - |u(n_2)|_p \leqslant |u(n_1) - u(n_2)|_p \end{aligned}$$

De même nous avons :

$$|u(n_2)|_p - |u(n_1)|_p \leqslant |u(n_1) - u(n_2)|_p$$

Ainsi en utilisant la définition de la valeur absolue archimédienne $|\cdot|_\infty$ nous avons :

$$\Big| |u(n_1)|_p - |u(n_2)|_p \Big|_\infty \leqslant |u(n_1) - u(n_2)|_p$$

De plus $n_1, n_2 > N \Rightarrow |u(n_1) - u(n_2)|_p < \epsilon$, d'où :

$$\Big| |u(n_1)|_p - |u(n_2)|_p \Big|_\infty < \epsilon$$

Nous avons donc montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \geqslant N, \Big| |u(n_1)|_p - |u(n_2)|_p \Big|_\infty < \epsilon$$

Ce qui montre que $|u|_p$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour $|\cdot|_\infty$. $\mathbb{R}$ étant complet nous savons alors que la suite converge c'est a dire $\lim\limits_{n \to +\infty} |u(n)|_p$ existe.

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme.
Soit $u, v \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}), u\mathcal{R}v$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Nous avons $|u(n)|_p = |u(n) - v(n) + v(n)|_p \leqslant |u(n) - v(n)|_p + |v(n)|_p$. De même nous avons $|v(n)|_p \leqslant |v(n) - u(n)|_p + |u(n)|_p$, ainsi en sachant que $u\mathcal{R}v \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |u(n) - v(n)|_p = 0$ nous avons alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} |u(n)|_p &\leqslant \lim_{n \to +\infty} |u(n) - v(n)|_p + \lim_{n \to +\infty} |v(n)|_p \\ &= \lim_{n \to +\infty} |v(n)|_p \end{aligned}$$

De même nous obtenons $\lim\limits_{n \to +\infty} |v(n)|_p \leqslant |u(n)|_p$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |v(n)|_p = |u(n)|_p$. D'où $u\mathcal{R}v \Rightarrow |u|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})} = |v|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})}$.

$\square$

<u>Définition 2.1.5 :</u>

Définissons l'ensemble $\mathbb{Q}_p$ par :

$$\mathbb{Q}_p = \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q})/\mathcal{R}$$

De plus d'après le lemme 2.1.4 l'application $|\cdot|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})}$ passe au quotient ainsi nous pouvons définir l'application quotientée par :

$$\begin{aligned} |\cdot|_{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ [u] &\longmapsto |u|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant vouloir faire de $\mathbb{Q}_p$ un corps d'où le lemme suivant.

<u>Lemme 2.1.6 :</u>

Soit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q})$ tels que $u_1\mathcal{R}v_1$ et $u_2\mathcal{R}v_2$, alors :

1. $(u_1 + v_1)\mathcal{R}(u_2 + v_2)$

2. $(u_1v_1)\mathcal{R}(u_2v_2)$

Preuve :

Remarquons que :

$$u_1\mathcal{R}u_2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_1(n) - u_2(n)|_p = 0$$
$$v_1\mathcal{R}v_2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |v_1(n) - v_2(n)|_p = 0$$

Il nous suffit alors d'exploiter ceci pour obtenir les deux assertions, commençons par la première :
Nous avons :

$$\begin{aligned}|u_1(n) + v_1(n) - (u_1(n) + v_1(n))|_p &= |u_1(n) - u_2(n) + v_1(n) - v_2(n)|_p \\ &\leqslant |u_1(n) - u_2(n)|_p + |v_1(n) - v_2(n)|_p\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_1(n) + v_1(n) - (u_1(n) + v_1(n))|_p = 0$$

C'est a dire $(u_1 + v_1)\mathcal{R}(u_2 + v_2)$.
Pour la deuxième partie il faut remarquer le fait suivant :

$$u_1 \text{ de Cauchy} \Rightarrow \exists M_1 \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_1(n)|_p \leqslant M_1$$
$$v_2 \text{ de Cauchy} \Rightarrow \exists M_2 \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, |v_2(n)|_p \leqslant M_2$$

Ainsi nous avons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&|u_1(n)v_1(n) - u_2(n)v_2(n)|_p \\ &= |u_1(n)v_1(n) - u_1(n)v_2(n) + u_1(n)v_2(n) - u_2(n)v_2(n)|_p \\ &\leqslant |u_1(n)|_p\,|v_1(n) - v_2(n)|_p + |u_1(n) - u_2(n)|_p\,|v_2(n)|_p \\ &\leqslant M_1\,|v_1(n) - v_2(n)|_p + |u_1(n) - u_2(n)|_p\,M_2\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_1(n)v_1(n) - u_2(n)v_2(n)|_p = 0$$

Et ainsi $u_1v_1\mathcal{R}u_2v_2$, ce qui termine la preuve.

□

Pour que montrer que $\mathbb{Q}_p$ est un corps nous allons devoir trouver les inverses des éléments, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2.1.7:

Soit $u \in \mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})\backslash[0]$ définissons alors u^{-1} par :

$$\begin{aligned} u^{-1} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u(n) = 0 \\ u(n)^{-1} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme 2.1.8:

Soit $u \in \mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})\backslash[0]$, alors :

$$\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u(n)|_p \geqslant M$$

Preuve :

Soit $u \in \mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})\backslash[0]$.
Commençons par remarquer que :

$$u \notin [0] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |u(n) - 0|_p = \lim_{n\to+\infty} |u(n)|_p \neq 0$$

Ainsi nous avons :

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u(n)|_p \geqslant \epsilon \tag{2.1}$$

De plus nous savons que u est une suite de Cauchy, nous avons donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \geqslant N_1, |u(n_1) - u(n_2)|_p < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.2}$$

En utilisant l'expression 2.1 nous avons également :

$$\exists N_2 \geqslant N_1, |u(N_2)|_p \geqslant \epsilon$$

Posons alors $N = \max(N_1, N_2)$.
Soit $n \geqslant N$.
Nous avons :

$$\begin{aligned} |u(n)|_p &= |u(N_2) - u(N_2) + u(n)|_p \\ &\geqslant |u(N_2)|_p - |u(n) - u(N_2)|_p \end{aligned}$$

D'après l'expression 2.2 nous avons $|u(n) - u(N_2)|_p < \frac{\epsilon}{2}$ ainsi nous obtenons enfin :

$$\begin{aligned} |u(n)|_p &\geqslant |u(N_2)|_p - |u(n) - u(N_2)|_p \\ &\geqslant \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Ceci montre que $\forall n \geqslant N, |u(n)|_p \geqslant \frac{\epsilon}{2}$. Nous avons ainsi montré que :

$$\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u(n)|_p \geqslant M$$

$\square$

<u>Lemme 2.1.9 :</u>

$\forall u \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}) \backslash [0], u^{-1} \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q})$

<u>Preuve :</u>

Soit $u \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}) \backslash [0]$.
Soit $\epsilon > 0$.
En utilisant le lemme 2.1.8 nous savons que :

$$\exists M > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u(n)|_p \geqslant M$$

De plus u étant une suite de Cauchy nous avons :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \geqslant N_2, |u(n_1) - u(n_2)|_p < \epsilon M^2$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$ et soit $n_1, n_2 \geqslant N$, nous pouvons alors calculer :

$$\begin{aligned}
\left|u^{-1}(n_1) - u^{-1}(n_2)\right|_p &= \left|\frac{1}{u(n_1)} - \frac{1}{u(n_2)}\right|_p \\
&= \left|\frac{u(n_2) - u(n_1)}{u(n_1)u(n_2)}\right|_p \\
&= \frac{|u(n_2) - u(n_1)|_p}{|u(n_1)|_p \, |u(n_2)|_p} \\
&\leqslant \frac{|u(n_2) - u(n_1)|_p}{M^2} \\
&< \frac{\epsilon M^2}{M^2} = \epsilon
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.10 :

$\mathbb{Q}_p$ est un corps et $|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ définit une valeur absolue sur $\mathbb{Q}_p$.

Preuve :

En utilisant le lemme 2.1.6 nous pouvons remarquer que les opérations $+$ et $.$ passent au quotient et par calcul direct $(\mathbb{Q}_p, +, .)$ est un anneau d'éléments neutres $[0\mathbb{1}]$ pour $+$ et $[\mathbb{1}]$ pour ".". De plus pour $[u] \in \mathbb{Q}_p \backslash \{[0]\}$

nous savons par le lemme 2.1.9 que $[u^{-1}]$ est bien définie. Par calcul direct nous avons aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|u(n)u^{-1}(n) - 1\right|_p = 1$$

Donc $uu^{-1}\mathcal{R}1$, c'est a dire :

$$[uu^{-1}] = [u][u^{-1}] = [1]$$

Nous avons donc montré que tout élément non nul de $\mathbb{Q}_p$ admet un inverse, ainsi $\mathbb{Q}_p$ est un corps. De meme le fait que $|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ définit une valeur absolue sur $\mathbb{Q}_p$ se fait par calcul direct.

$\square$

<u>Théorème 2.1.11 :</u>

$\mathbb{Q}_p$ est complet, c'est a dire que toute suite de Cauchy de $\mathbb{Q}_p$ converge.

<u>Preuve :</u>

Soit $x \in (\mathbb{Q}_p)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Construisons $u \in (\mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q}))^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) \in [x(n)]$$

Posons :

$$E_n = \left\{ N \in \mathbb{N} \;\middle|\; \forall m_1, m_2 \geqslant N, |u(n)(m_1) - u(n)(m_2)|_p < \frac{1}{n} \right\}$$

et considerons alors la suite $v \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} v : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto u(n)(\min(E_n)) \end{aligned}$$

Nous allons montrer que x converge vers $[v]$, pour cela commençons par montrer que u est une suite de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$.
Posons $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N_1} < \frac{\epsilon}{3}$.
x étant de Cauchy nous avons

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \geqslant N_2, |x(n_1) - x(n_2)|_{\mathbb{Q}_p} < \frac{\epsilon}{6}$$

Et par définition de $|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
|x(n_1) - x(n_2)|_{\mathbb{Q}_p} &= |[u(n_1)] - [u(n_2)]|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= |[u(n_1) - u(n_2)]|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= |u(n_1) - u(n_2)|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})} \\
&= \lim_{m \to +\infty} |u(n_1)(m) - u(n_2)(m)|_p \leqslant \frac{\epsilon}{6}
\end{aligned}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
Soit $n_1, n_2 \geqslant N$ et $m \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
&|v(n_1) - v(n_2)|_p \\
&= |v(n_1) - u(n_1)(m) + u(n_1)(m) - u(n_2)(m) + u(n_2)(m) - v(n_2)|_p \\
&\leqslant |v(n_1) - u(n_1)(m)|_p + |u(n_1)(m) - u(n_2)(m)|_p + |u(n_2)(m) - v(n_2)|_p
\end{aligned}$$

Par définition de v nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
|v(n_1) - u(n_1)(m)|_p &\leqslant \frac{1}{n_1} \leqslant \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{6} \\
|v(n_2) - u(n_2)(m)|_p &\leqslant \frac{1}{n_2} \leqslant \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
&|v(n_1) - v(n_2)|_p \\
&\leqslant |v(n_1) - u(n_1)(m)|_p + |u(n_1)(m) - u(n_2)(m)|_p + |u(n_2)(m) - v(n_2)|_p \\
&< |u(n_1)(m) - u(n_2)(m)|_p + \frac{2\epsilon}{6}
\end{aligned}$$

En passant a la limite nous avons donc :

$$\begin{aligned} |v(n_1) - v(n_2)|_p &\leqslant \lim_{m\to+\infty} |u(n_1)(m) - u(n_2)(m)|_p + \frac{2\epsilon}{6} \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{6} + \frac{2\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Ceci montre donc que v est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ pour $|\cdot|_p$, en d'autres mots $v \in \mathrm{Ch}(p, \mathbb{Q})$. Nous allons donc pouvoir considérer l'élément $[v] \in \mathbb{Q}_p$.

Montrons enfin que x converge vers $[v]$.
Soit $\epsilon > 0$.
v étant de Cauchy nous avons :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \geqslant N_1, |v(n_1) - v(n_2)|_p < \frac{\epsilon}{4}$$

Soit N_2 tel que $\frac{1}{N_2} < \frac{\epsilon}{4}$.
Soit $n \geqslant N$ et $m \geqslant N$.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned} |u(n)(m) - v(m)|_p &= |u(n)(m) - v(n) + v(n) - v(m)|_p \\ &\leqslant |u(n)(m) - v(n)|_p + |v(n) - v(m)|_p \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{4} < \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Ainsi en passant a la limite nous obtenons :

$$\lim_{m\to+\infty} |u(n)(m) - v(m)|_p \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

De plus par définition nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty} |u(n)(m) - v(m)|_p &= |u(n) - v|_{\mathrm{Ch}(p,\mathbb{Q})} \\ &= |[u(n) - v]|_{\mathbb{Q}_p} \\ &= |[u(n)] - [v]|_{\mathbb{Q}_p} \\ &= |x(n) - [v]|_{\mathbb{Q}_p} < \epsilon \end{aligned}$$

Ainsi nous avons $\lim_{n\to+\infty} x(n) = [v]$.

□

2.2 Representation des elements de $\mathbb{Q}_p$

Nous avons construit $\mathbb{Q}_p$ cependant les éléments de $\mathbb{Q}_p$ sont des classes d'équivalence de suites de Cauchy, ce qui rend leur manipulation assez délicate. Nous allons donc dans cette section voir une façon plus agréable de décrire les éléments de $\mathbb{Q}_p$. Rappelons nous que pour décrire les éléments de $\mathbb{R}$ nous utilisons l'écriture décimale par exemple un nombre $x \in \mathbb{R}$ peut d'écrire $x = a + 0.x(1)x(2)\ldots$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $x(i) \in [\![0; 9]\!]$. Formellement nous avons $x = a + \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)10^{-i}$, nous allons voir qu'il y a une formule analogue dans $\mathbb{Q}_p$.

Définition 2.2.1 :

Définissons le morphisme de corps suivant qui permet d'injecter $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_p$.

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ x &\longmapsto [x\mathbb{1}] \end{aligned}$$

Remarquons que pour $x \in \mathbb{Q}$ nous avons :

$$|\iota(x)|_{\mathbb{Q}_p} = |[x\mathbb{1}]|_{\mathbb{Q}_p} = \lim_{n \to +\infty} |x\mathbb{1}(n)|_p = \lim_{n \to +\infty} |x|_p = |x|_p$$

Lemme 2.2.2 :

Soit $x \in \mathbb{Q}$ avec $|x|_p \leqslant 1$ alors :

$$\exists c \in [\![0; p-1]\!], |x - c|_p \leqslant p^{-1}$$

Preuve :

Nous avons $\exists a, b \in \mathbb{Z}, x = \frac{a}{b}$ avec $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, de plus nous avons :

$$\begin{aligned} &\left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{-v_p(\frac{a}{b})} = p^{-v_p(a)+v_p(b)} \leqslant 1 \\ &\Rightarrow -v_p(a) + v_p(b) \leqslant 0 \\ &\Rightarrow v_p(b) \leqslant v_p(a) \end{aligned}$$

Ainsi la condition $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ impose $\Rightarrow v_p(b) = 0$ et donc $\operatorname{pgcd}(b, p) = 1$. En utilisant le fait que $\mathbb{Z}$ est principal nous avons $(b) + (p) = 1$ donc :

$$\exists u, v \in \mathbb{Z}, ub + vp = 1$$

Posons $n = au$.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned} |x - n|_p = \left|\frac{a}{b} - au\right|_p &= \left|\frac{a}{b}(1 - ub)\right|_p \\ &= \left|\frac{a}{b}\right|_p |1 - ub|_p \\ &= |x|_p \, |vp|_p \\ &\leqslant |vp|_p = |v|_p \, |p|_p \\ &\leqslant |p|_p = p^{-v_p(p)} = p^{-1} \end{aligned}$$

Considérons ensuite la division euclidienne de n par p :

$$\exists m, c \in \mathbb{Z}, n = mp + c \text{ et } c \in [\![0; p - 1]\!]$$

Il nous suffit alors de vérifier que c vérifie les conditions voulues :

$$\begin{aligned} |x - c|_p = |x - mp - c + mp|_p &= |x - n + mp|_p \\ \leqslant \max(|x - n|_p, |mp|_p) &\leqslant \max(p^{-1}, p^{-1}) = p^{-1} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\square$

Lemme 2.2.3 :

Soit $x \in \mathbb{Q}_p, |x|_{\mathbb{Q}_p} \leqslant 1$ alors :

$$\exists a \in [\![0; p-1]\!], |x - \iota(a)|_{\mathbb{Q}_p} \leqslant p^{-1}$$

Preuve :

Soit $u \in x$, nous avons alors par définition :

$$|x|_{\mathbb{Q}_p} = |[u]|_{\mathbb{Q}_p} = \lim_{n \to +\infty} |u(n)|_p \leqslant 1$$

u étant une suite de Cauchy nous savons aussi que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 \geqslant N, |u(n_1) - u(n_2)|_p \leqslant p^{-1}$$

Montrons que $\forall n \geqslant N, |u(n)|_p \leqslant 1$, soit $n, m \geqslant N$, calculons :

$$\begin{aligned} |u(n)|_p &= |u(n) - u(m) + u(m)|_p \\ &\leqslant \max(|u(n) - u(m)|_p, |u(m)|_p) \\ &\leqslant \max(p^{-1}, |u(m)|_p) \end{aligned}$$

Ainsi en passant a la limite sur m nous avons :

$$\begin{aligned} |u(n)|_p &\leqslant \lim_{m \to +\infty} \max(p^{-1}, |u(m)|_p) \\ &\leqslant \max(p^{-1}, \lim_{m \to +\infty} |u(m)|_p) \\ &= \max(p^{-1}, 1) = 1 \end{aligned}$$

Posons $y = u(N) \in \mathbb{Q}$, nous avons en particulier que $|y|_p \leqslant 1$ ainsi nous pouvons appliquer le lemme 2.2.2 pour obtenir :

$$\exists a \in [\![0; p-1]\!], |y - a|_p \leqslant p^{-1}$$

Soit $n \geqslant N$ il nous suffit alors de calculer :

$$\begin{aligned} |u(n) - a|_p &= |u(n) - u(N) + u(N) - a|_p \\ &= |u(n) - u(N) + y - a|_p \\ &\leqslant \max(|u(n) - u(N)|_p , |y - a|_p) \\ &\leqslant \max(p^{-1}, p^{-1}) = p^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons passer a la limite et obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} |x - \iota(a)|_{\mathbb{Q}_p} &= |[u] - [a\mathbb{1}]|_{\mathbb{Q}_p} \\ &= |[u - a\mathbb{1}]|_{\mathbb{Q}_p} \\ &= \lim_{n\to+\infty} |u(n) - a\mathbb{1}(n)|_p \\ &= \lim_{n\to+\infty} |u(n) - a|_p \\ &\leqslant p^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 2.2.4 :

Soit $a \in [\![-(p-1); p-1]\!]^{\mathbb{N}}$ alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \iota(a(n))\iota(p)^n = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a(n) = 0$$

Preuve :

Posons $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n, a(k) = 0\}$.
Soit $n \in E$.

Supposons que $a(n) \neq 0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^k &= \sum_{k=n}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^k \\ &= \iota(p)^n \left(\iota(a(n)) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n} \right)\end{aligned}$$

Et ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^k \right|_{\mathbb{Q}_p} &= \left| \iota(p)^n \left(\iota(a(n)) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n} \right) \right|_{\mathbb{Q}_p} \\ &= |\iota(p)^n|_{\mathbb{Q}_p} \left| \iota(a(n)) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n} \right|_{\mathbb{Q}_p} \\ &= p^{-n} \left| \iota(a(n)) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n} \right|_{\mathbb{Q}_p} \\ &\geqslant p^{-n} \left(|\iota(a(n))|_{\mathbb{Q}_p} - \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n} \right|_{\mathbb{Q}_p} \right)\end{aligned}$$

Nous savons que $a(n) \in [\![-(p-1); p-1]\!]$ donc $a(n) \notin (p)$ ainsi $|\iota(a(n))|_{\mathbb{Q}_p} = |a(n)|_p = 1$. D'autre part pour $N \geqslant n+1$ nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n} &= \iota \left(\sum_{k=n+1}^{N} a(k)p^{k-n} \right) \\ &= \iota \left(p \sum_{k=n+1}^{N} a(k)p^{k-(n+1)} \right)\end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$\sum_{k=n+1}^{N} a(k)p^{k-n} \in (p)$$

Et donc

$$\left| \sum_{k=n+1}^{N} a(k)p^{k-n} \right|_p \leqslant p^{-1}$$

Ainsi nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n}\right|_{\mathbb{Q}_p} &= \left|\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n}\right|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= \lim_{N\to+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{N} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n}\right|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= \lim_{N\to+\infty}\left|\iota\left(\sum_{k=n+1}^{N} a(k)p^{k-n}\right)\right|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= \lim_{N\to+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{N} a(k)p^{k-n}\right|_{p} \\
&\leqslant p^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons :

$$|\iota(a(n))|_{\mathbb{Q}_p} - \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \iota(a(k))\iota(p)^{k-n}\right|_{\mathbb{Q}_p} \geqslant 1 - p^{-1} > 0$$

Et donc :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\iota(a(k))\iota(p)^{k}\right|_{\mathbb{Q}_p} > 0$$

Nous avons donc montré que :

$$a(n) \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\iota(a(k))\iota(p)^{k} \neq 0$$

Ainsi par contraposée $a(n) = 0$ et donc $n + 1 \in \mathbb{N}$. Nous avons également $0 \in E$, donc $\mathbb{N} \subset E$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, a(n) = 0$$

□

Grâce a ces lemmes nous allons pouvoir établir le résultat important de cette section qui est le théorème suivant.

Théorème 2.2.5 :

Soit $x \in \mathbb{Q}_p, |x|_{\mathbb{Q}_p} \leqslant 1$ alors :

$$\exists ! a \in [\![0; p-1]\!]^{\mathbb{N}}, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \iota(a(n))\iota(p)^n$$

Preuve :

Commençons par montrer l'existence.
Construisons une telle suite $a \in [\![0; p-1]\!]^{\mathbb{N}}$ par récurrence. D'après le lemme 2.2.3 nous savons que :

$$\exists c \in [\![0; p-1]\!], |x - \iota(c)|_{\mathbb{Q}_p} \leqslant p^{-1}$$

Posons alors $a(0) = c$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, définissons maintenant $a(n+1)$ en sachant que nous avons :

$$\left| x - \sum_{i=0}^{n} \iota(a(i))\iota(p)^i \right|_{\mathbb{Q}_p} \leqslant p^{-(n+1)}$$

Considérons l'élément :

$$y = \frac{x - \sum\limits_{i=0}^{n} \iota(a(i))\iota(p)^i}{\iota(p)^{n+1}}$$

Ensuite remarquons que nous avons :

$$\begin{aligned}
|y|_{\mathbb{Q}_p} &= \left| \frac{x - \sum_{i=0}^{n} \iota(a(i))\iota(p)^i}{\iota(p)^{n+1}} \right|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= \frac{\left| x - \sum_{i=0}^{n} \iota(a(i))\iota(p)^i \right|_{\mathbb{Q}_p}}{\left|\iota(p)^{n+1}\right|_{\mathbb{Q}_p}} \\
&= \frac{\left| x - \sum_{i=0}^{n} \iota(a(i))\iota(p)^i \right|_{\mathbb{Q}_p}}{p^{-(n+1)}} \\
&\leqslant \frac{p^{-(n+1)}}{p^{-(n+1)}} = 1
\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi appliquer le lemme 2.2.3 a l'élément $y \in \mathbb{Q}_p$ pour obtenir :

$$\exists d \in [\![0; p-1]\!], |y - \iota(d)|_p \leqslant p^{-1}$$

Posons $a(n+1) = d$ nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\left| x - \sum_{i=0}^{n+1} \iota(a(i))\iota(p)^i \right|_{\mathbb{Q}_p} &= \left| x - \sum_{i=0}^{n} \iota(a(i))\iota(p)^i - \iota(d)\iota(p^{n+1}) \right|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= \left| \iota(p)^{n+1} \left(\frac{x - \sum_{i=0}^{n} \iota(a(i))\iota(p)^i}{\iota(p^{n+1})} - \iota(d) \right) \right|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= \left| \iota(p)^{n+1}(v - \iota(d)) \right|_{\mathbb{Q}_p} \\
&= \left| \iota(p)^{n+1} \right|_{\mathbb{Q}_p} |v - \iota(d)|_{\mathbb{Q}_p} \\
&\leqslant \left| \iota(p)^{n+1} \right|_{\mathbb{Q}_p} p^{-1} = p^{-(n+1)} p^{-1} = p^{-(n+2)}
\end{aligned}$$

La suite a est donc bien définie par récurrence et de plus en passant a la limite nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|x-\sum_{i=0}^{n}\iota(a(i))\iota(p)^i\right|_{\mathbb{Q}_p}\leqslant\lim_{n\to+\infty}p^{-n}=0$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\iota(a(i))\iota(p)^i=\sum_{i=0}^{+\infty}\iota(a(i))\iota(p)^i=x$$

Ce qui conclut l'existence de la suite $a\in[\![0;p-1]\!]^{\mathbb{N}}$.

Enfin montrons l'unicité. Soit $a,b\in[\![0;p-1]\!]^{\mathbb{N}}$ avec :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\iota(a(i))\iota(p)^i=\sum_{n=0}^{+\infty}\iota(b(i))\iota(p)^i$$

Nous avons alors :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\iota(a(i)-b(i))\iota(p)^i=0$$

avec

$$\forall i\in\mathbb{N},a(i)-b(i)\in[\![-(p-1);p-1]\!]$$

En utilisant le lemme 2.2.4 nous avons alors :

$$\begin{aligned}&\forall i\in\mathbb{N},a(i)-b(i)=0\\ &\Rightarrow\forall i\in\mathbb{N},a(i)=b(i)\\ &\Rightarrow a=b\end{aligned}$$

□

Dans la suite afin d'alléger les notations nous allons identifier le corps $\mathbb{Q}$ au sous corps $\iota(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{Q}_p$, c'est a dire que pour $x\in\mathbb{Q}$ nous noterons $x\in\mathbb{Q}_p$ au lieu de $\iota(x)\in\mathbb{Q}_p$. Mais ceci peut être fait de manière totalement rigoureuse en utilisant la technique de transport de structure c'est a dire de considérer l'ensemble $((\mathbb{Q}_p\backslash\iota(\mathbb{Q}))\times\{\mathbb{Q}\})\cup\mathbb{Q}$ et d'y transporter les opérations $+,.,|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ de manière adaptée. Ici le produit avec le produit cartésien avec le singleton $\{\mathbb{Q}\}$ sert a forcer l'union disjointe même si dans notre cas ce n'est pas nécessaire. Nous allons également noter $|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ par $|\cdot|_p$ car nous allons essentiellement travailler sur $\mathbb{Q}_p$ dans ce qui suit.

Terminons cette section en définissant les entiers p-adiques qui auront un rôle très important dans la suite.

Définition 2.2.6 :

Définissons $\mathbb{Z}_p$ par le sous-anneau suivant :

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |x|_p \leqslant 1 \right\}$$

2.3 Topologie de $\mathbb{Q}_p$

Dans cette section nous allons étudier la topologie de $\mathbb{Q}_p$ et voir quelques résultats qui seront utiles pour la suite.

Proposition 2.3.1 :

Les boules ouvertes de $\mathbb{Q}_p$ sont des fermées et les boules fermées de $\mathbb{Q}_p$ sont des boules ouvertes.

Lemme 2.3.2 :

Considérons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_+ : \mathbb{Q}_p &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} . : \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_\times : \mathbb{Q}_p^\times &\longrightarrow \mathbb{Q}_p^\times \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

Ces applications sont alors continues par les topologies obtenues a partir de celle de $\mathbb{Q}_p$.

Nous avons alors ce corollaire qui en découle de manière immédiate du lemme précédent.

Définition 2.3.3 :

Soit $(G, \cdot)$ une groupe muni d'une topologie $\mathcal{T}(G)$, posons l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Alors définissons :

$$G \text{ est un groupe topologique}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\cdot \text{ est continue sur } G \times G \text{ et } g \text{ est continue sur } G$$

Corollaire 2.3.4 :

$\mathbb{Q}_p^+$ et $\mathbb{Q}_p^\times$ sont des groupes topologiques.

Lemme 2.3.5 :

Munissons $[\![0;p-1]\!]$ de la topologie discrète et considérons l'application

$$f : [\![0;p-1]\!]^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p$$
$$a \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)p^n$$

Alors $f([\![0;p-1]\!]^{\mathbb{N}}) = \mathbb{Z}_p$ et f est continue.

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, soit $r > 0$.
D'après le théorème 2.2.5 nous savons que :

$$\exists! a \in [\![0;p-1]\!]^{\mathbb{N}}, x = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)p^n$$

En d'autres mots, $x = f(a)$, cherchons alors un voisinage V de a tel que $f(V) \subset B(x,r)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $p^{-N} < r$ considérons alors l'ouvert de $[\![0;p-1]\!]^{\mathbb{N}}$ suivant :

$$V = \left(\prod_{n=0}^{N-1} \{a(n)\}\right) \times \left(\prod_{n=N}^{+\infty} [\![0;p-1]\!]\right)$$

V est bien un voisinage de a, soit $b \in V$ nous avons alors :

$$\begin{aligned}
|f(b)-f(a)|_p &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} b(n)p^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)p^n\right|_p \\
&= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (b(n)-a(n))p^n\right|_p \\
&= \left|\sum_{n=N}^{+\infty} (b(n)-a(n))p^n\right|_p \\
&= \left|p^N \sum_{n=N}^{+\infty} (b(n)-a(n))p^{n-N}\right|_p \\
&= \left|p^N\right|_p \left|\sum_{n=N}^{+\infty} (b(n)-a(n))p^{n-N}\right|_p \\
&= p^{-N} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} (b(n)-a(n))p^{n-N}\right|_p
\end{aligned}$$

Soit $M \geqslant N$ nous avons alors $\sum_{n=N}^{+\infty} (b(n)-a(n))p^{n-N} \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$\left|\sum_{n=N}^{M} (b(n)-a(n))p^{n-N}\right|_p \leqslant 1$$

Ainsi en passant a la limite :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N}^{+\infty} (b(n)-a(n))p^{n-N}\right|_p &= \left|\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=N}^{M} (b(n)-a(n))p^{n-N}\right|_p \\
&= \lim_{M\to+\infty} \left|\sum_{n=N}^{M} (b(n)-a(n))p^{n-N}\right|_p \\
&\leqslant 1
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)|_p &= p^{-N} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} (b(n) - a(n)) p^{n-N} \right|_p \\ &\leqslant p^{-N} < r \end{aligned}$$

Et donc $f(b) \in B(a, r)$, nous avons donc montrés que $f(V) \subset B(a, r)$ ce qui montre que f est continue.

$\square$

Corollaire 2.3.6 :

$\mathbb{Z}_p$ est une partie compact de $\mathbb{Q}_p$.

Dans la suite nous allons utiliser le théorème de Tykhonov qui dit que tout produit même infini de compacts est compact. Le lecteur intéresse pourra aller voir le livre [5] qui contient la preuve.

Preuve :

Par le théorème de Tykhonov, $[\![0; p-1]\!]^{\mathbb{N}}$ est compact et en posant

$$\begin{aligned} f : [\![0; p-1]\!]^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ a &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a(n) p^n \end{aligned}$$

nous savons que f est continue donc $f([\![0; p-1]\!]^{\mathbb{N}}) = \mathbb{Z}_p$ est compact.

$\square$

Proposition 2.3.7:

$\mathbb{Z}_p$ est ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.

Preuve :

Il suffit de remarquer que $\mathbb{Z}_p = B(0,p) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |x|_p < p\right\}$. $B(0,p)$ étant une boule ouverte nous obtenons directement le résultat.

$\square$

Corollaire 2.3.8:

$\mathbb{Q}_p$ est localement compact.

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{Q}_p$.
Il suffit alors de remarquer que $x + \mathbb{Z}_p$ est un voisinage compact de x.

$\square$

2.4 Mesures sur $\mathbb{Q}_p$

Maintenant que nous savons que $\mathbb{Q}_p$ est localement compact et donc que les groupes $\mathbb{Q}_p^+$ et $\mathbb{Q}_p^\times$ sont localement compacts nous allons pouvoir y faire de l'intégration. Dans cette section nous allons alors introduire plusieurs mesures qui seront utiles pour définir plusieurs notions sur $\mathbb{Q}_p$ telles que la transformée de Fourrier.

Ici nous allons utiliser la notion de mesure de Haar, celle ci est définie sur tous les groupes localement compacts. Nous savons que pour un groupe localement compact il y a une unique mesure de Haar définie a une constante multiplicative près. De plus les mesures de Haar sont caractérisées par le fait qu'elles sont invariantes par translations, par exemple λ est une mesure de Haar pour le groupe $\mathbb{R}^+$. Pour construire une telle mesure nous avons besoin du théorème de représentation de Riesz qui est démontré dans le livre [4]. Ensuite pour avoir une définition rigoureuse de ce qu'est une mesure de Haar ainsi que la preuve de sont existence et unicité le lecteur est invité a aller voir la preuve qui est faite dans le livre [6].

Définition 2.4.1 :

$\mathbb{Q}_p^+$ est un groupe localement compact, nous pouvons alors poser μ_p comme étant l'unique mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^+$ vérifiant :

$$\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$$

Proposition 2.4.2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ nous avons alors :

$$\mu_p(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}$$

Preuve :

Montrons le résultat par récurrence.
L'initialisation est triviale car par définition de μ_p nous avons deja $\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1 = p^0$.
Supposons maintenant que nous avons $\mu_p(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}$ et montrons que

$\mu_p(p^{n+1}\mathbb{Z}_p) = p^{-(n+1)}$. Commençons par remarquer que :

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{a=0}^{p-1}(a + p\mathbb{Z}_p)$$

Ainsi nous avons alors :

$$p^n\mathbb{Z}_p = p^n\bigsqcup_{a=0}^{p-1}(a + p\mathbb{Z}_p) = \bigsqcup_{a=0}^{p-1}(p^n a + p^{n+1}\mathbb{Z}_p)$$

μ_p étant une mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^+$ et l'union étant disjointe nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\mu_p(p^n\mathbb{Z}_p) &= \mu_p(\bigsqcup_{a=0}^{p-1}(p^n a + p^{n+1}\mathbb{Z}_p)) \\
&= \sum_{a=0}^{p-1}\mu_p(p^n a + p^{n+1}\mathbb{Z}_p) \\
&= \sum_{a=0}^{p-1}\mu_p(p^{n+1}\mathbb{Z}_p) \\
&= p\mu_p(p^{n+1}\mathbb{Z}_p)
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
&p\mu_p(p^{n+1}\mathbb{Z}_p) = \mu_p(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n} \\
&\Rightarrow \mu_p(p^{n+1}\mathbb{Z}_p) = p^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

$\square$

Proposition 2.4.3 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$ nous avons alors :

$$\mu_p(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}$$

Définition 2.4.4 :

Sur $\mathbb{Q}_p^\times$ définissons la mesure suivante sur $\mathcal{B}(\mathbb{Q}_p^\times)$

$$\mu_p^\times = \frac{p}{p-1}\frac{\mu_p}{|\cdot|_p}$$

où $\mathcal{B}(\mathbb{Q}_p^\times)$ est la tribu borélienne de $\mathbb{Q}_p^\times$.

Proposition 2.4.5 :

$$\mu_p^\times(\mathbb{Z}_p^\times) = 1$$

Preuve :

Remarquons que nous avons $\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{a=1}^{p-1}(a + p\mathbb{Z}_p)$ nous pouvons alors commencer par calculer :

$$\begin{aligned}
\mu_p(\mathbb{Z}_p^\times) &= \mu_p(\bigsqcup_{a=1}^{p-1}(a + p\mathbb{Z}_p)) \\
&= \sum_{a=1}^{p-1}\mu_p(a + p\mathbb{Z}_p) \\
&= \sum_{a=1}^{p-1}\mu_p(p\mathbb{Z}_p) \\
&= \sum_{a=1}^{p-1}\frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}
\end{aligned}$$

De plus remarquons que $x \in \mathbb{Z}_p^\times \Rightarrow |x|_p = 1$ ainsi nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
\mu_p^\times(\mathbb{Z}_p^\times) &= \int\limits_{\mathbb{Q}_p^\times} \frac{p}{p-1}\frac{1}{|x|_p}\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p^\times}(x)d\mu_p(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{Q}_p^\times} \frac{p}{p-1}\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p^\times}(x)d\mu_p(x) \\
&= \frac{p}{p-1}\int\limits_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p^\times}(x)d\mu_p(x) \\
&= \frac{p}{p-1}\mu_p(\mathbb{Z}_p^\times) = 1
\end{aligned}$$

□

Définition 2.4.6 :

Soit $a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}$ et posons $A(a,n) = a + p^n\mathbb{Z}_p$ alors nous définissons :

$$A(a,n) \text{ est un } p\text{-ouvert } \Leftrightarrow v_p(a) < n$$

Remarquons que $\forall x \in A(a,n), |x|_p = |a|_p$. Posons également $PO(\mathbb{Q}_p)$ comme étant l'ensemble des p-ouverts de $\mathbb{Q}_p$.

Lemme 2.4.7 :

Soit $a \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{Z}$ tels que $A(a,k)$ est un p-ouvert alors nous avons alors :

1. $\mu_p^\times(A(a,n)) = \frac{p^{-n}}{|a|_p}$
2. $\forall b \in \mathbb{Q}_p, \mu_p^\times(bA(a,n)) = \mu_p^\times(A(a,n))$

Preuve :

Commençons par montrer le premier point.
Remarquons que $\forall x \in a + p^n\mathbb{Z}_p, |x|_p = |a|_p$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\mu_p^\times(a + p^n\mathbb{Z}_p) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(x)\frac{1}{|x|_p} d\mu_p(x) \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(x)\frac{1}{|a|_p} d\mu_p(x) \\
&= \frac{1}{|a|_p}\mu_p(a + p^n\mathbb{Z}_p) \\
&= \frac{1}{|a|_p}\mu_p(p^n\mathbb{Z}_p) = \frac{p^{-n}}{|a|_p}
\end{aligned}$$

Montrons maintenant le deuxième point.
Soit $b \in \mathbb{Q}_p$, et k tel que $|b|_p = p^{-k}$.
Nous avons alors $bA(a, n) = A(ba, n + k)$ qui reste un p-ouvert. En remarquant que $\forall x \in A(ba, n + k), |x|_p = |ba|_p$ nous avons grace au premier point :

$$\begin{aligned}
\mu_p^\times(bA(a, n)) &= \mu_p^\times(A(ba, n + k)) \\
&= \frac{p^{-(n+k)}}{|ab|_p} \\
&= \frac{p^{-(n+k)}}{|a|_p |b|_p} \\
&= \frac{p^{-(n+k)}}{|a|_p p^{-k}} \\
&= \frac{p^{-n}}{|a|_p} = \mu_p^\times(A(a, n))
\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 2.4.8 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{Q}_p^\times$ alors :

$$\forall a \in \mathbb{Q}_p, \mu_p^\times(aU) = \mu_p^\times(U)$$

Preuve :

Posons

$$X = \{E \in PO(\mathbb{Q}_p) \mid \exists q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}, \exists n \in \mathbb{Z}, E = A(q,n)\}$$

Nous savons que X est une base dénombrable d'ouverts, ainsi

$$\exists V \in X^{\mathbb{N}}, U = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} V(n)$$

En remarquant que la distance induite par $|\cdot|_p$ est une distance ultramétrique, nous savons que deux boules qui s'intersectent sont confondues d'où l'union disjointe. Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
\mu_p^\times(aU) &= \mu_p^\times\left(a\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} V(n)\right) = \mu_p^\times\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} aV(n)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mu_p^\times(aV(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mu_p^\times(V(n)) \\
&= \mu_p^\times\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} V(n)\right) = \mu_p^\times(U)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.4.9 :

$\mu_p^\times$ est une mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^\times$.

Preuve :

Soit $a \in \mathbb{Q}_p$.
Considérons $X = \mathcal{T}(\mathbb{Q}_p^\times)$, la topologie de $\mathbb{Q}_p^\times$ nous savons alors que c'est une famille contenant $\mathbb{Q}_p^\times$ et stable par intersections finies donc c'est un π-système. De plus en considérons la famille suivante :

$$\begin{aligned} U : \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto \bigcup_{k=0}^{n} (p^k \mathbb{Z}_p^\times \cup p^{-k} \mathbb{Z}_p^\times) \end{aligned}$$

Nous avons trivialement $\forall n \in \mathbb{N}, U(n) \subset U(n+1)$ et $\mu_p^\times$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mu_p^\times(U(n)) &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mu_p^\times(p^k \mathbb{Z}_p^\times \cup p^{-k} \mathbb{Z}_p^\times) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} (\mu_p^\times(p^k \mathbb{Z}_p^\times) + \mu_p^\times(p^{-k} \mathbb{Z}_p^\times)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\mu_p^\times(\mathbb{Z}_p^\times) + \mu_p^\times(\mathbb{Z}_p^\times)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2 = 2(n+1) < +\infty \end{aligned}$$

Nous avons également que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U(n) = \mathbb{Q}_p^\times$. De plus $\forall U \in X, \mu_p^\times(aU) = \mu_p^\times(U)$, donc les mesures $\mu_p^\times$ et $\mu_p^\times(a\cdot)$ coïncident sur X. En utilisant que $\mathcal{B}(\mathbb{Q}_p^\times) = X$ nous pouvons alors conclure que les mesures $\mu_p^\times$ et $\mu_p^\times(a\cdot)$ coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{Q}_p^\times)$. D'où le résultat.

$\square$

2.5 Intégration sur $\mathbb{Q}_p$

En utilisant la mesure μ_p nous allons avoir la notion de transformée de Fourrier sur $\mathbb{Q}_p$.

Définition 2.5.1 :

Posons $A = \left\{a \in [\![0; p-1]\!]^{\mathbb{Z}} \;\middle|\; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \leqslant N, a(n) = 0\right\}$ et posons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} h : A &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ a &\longmapsto \sum_{n \in -\mathbb{N}-1} a(n)p^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ a &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)p^n \end{aligned}$$

Remarquons que dans h la série est en fait une somme finie. Nous savons également que ϕ est une bijection nous pouvons alors définir l'application Λ par :

$$\Lambda = \phi^{-1} \circ h$$

L'idée ici est de définir une application similaire a l'application "partie factionnaire" dans $\mathbb{R}$.

La définition suivante permet d'obtenir un application similaire a exponentielle complexe dans le but d'avoir un transformée de Fourrier sur $\mathbb{Q}_p$.

Définition 2.5.2 :

Définissons l'application e_p par :

$$\begin{aligned} e_p : \mathbb{Q}_p &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \exp(-2i\pi\Lambda(x)) \end{aligned}$$

Définition 2.5.3 :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ alors définissons sa transformée de Fourrier $\hat{f} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}_p}$ par :

$$\begin{aligned}\hat{f} : \mathbb{Q}_p &\longrightarrow \mathbb{C}\\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{Q}_p} f(y)e_p(-xy)d\mu_p(y)\end{aligned}$$

Et posons également :

$$\mathcal{F}(\mathbb{Q}_p) = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p) \;\middle|\; f \text{ est continue et } \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p) \right\}$$

Proposition 2.5.4 :

Nous avons $\widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$.

Preuve :

Si $x \in \mathbb{Z}_p$ nous avons :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(y)e_p(-xy)d\mu_p(y)\\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(y)d\mu_p(y)\\ &= \mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1\end{aligned}$$

Donc $x \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}(x) = 1$. Si $x \notin \mathbb{Z}_p$ a l'aide de l'invariance par translations de μ_p nous pouvons alors calculer :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}(x) &= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(y) e_p(-xy) d\mu_p(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{Q}_p+1} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(y+1) e_p(-x(y+1)) d\mu_p(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) e_p(-xy) e_p(-x) d\mu_p(y) \\
&= e_p(-x) \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) e_p(-xy) d\mu_p(y)
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(y) e_p(-xy) d\mu_p(y) = e_p(-x) \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) e_p(-xy) d\mu_p(y) \\
&\Rightarrow (1 - e_p(-x)) \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) e_p(-xy) d\mu_p(y) = 0
\end{aligned}$$

Et en utilisant $x \notin \mathbb{Z}_p \Rightarrow e_p(-x) \neq 1$ nous avons alors :

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) e_p(-xy) d\mu_p(y) = 0$$

Donc $x \notin \mathbb{Z}_p \Rightarrow \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}(x) = 0$, nous avons donc montré que $\widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$.

$\square$

<u>Théorème 2.5.5 :</u>

Soit $f \in \mathcal{F}^1(\mathbb{Q}_p)$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p, f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$$

Preuve :

D'après le livre [6] savons déjà que $\exists C \in \mathbb{Q}_p, \forall x \in \mathbb{Q}_p, f(x) = C\hat{\hat{f}}(-x)$, il nous suffit alors de vérifier que $C = 1$ sur une fonction test. Il nous suffit de remarquer que $\mathbb{Z}_p$ étant ouvert et fermé dans $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ est alors continue et $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} \in \mathcal{B}^1(\mathbb{Q}_p)$, et nous avons :

$$\widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$$
$$\Rightarrow \widehat{\widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}} = \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$$

□

Définition 2.5.6 :

Soit $f \in \mathcal{F}^1(\mathbb{Q}_p)$ telle que :

$$\forall s \in]0, +\infty[, f\,|\cdot|_p^s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p^\times) \text{ et } \hat{f}\,|\cdot|_p^s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p^\times)$$

Alors définissons la fonction ξ_f par :

$$\begin{aligned} \xi_f^p : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\,|x|_p^s\,d\mu_p^\times(x) \end{aligned}$$

Avec $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{C} \mid \Re(x) > 0\}$.

Proposition 2.5.7 :

Soit $s \in \mathcal{H}$, nous avons alors :

$$\xi_{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}^p(s) = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Preuve :

Commençons par remarquer que $\mathbb{Z}_p$ est un compact de $\mathbb{Q}_p$ donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} |\cdot|_p^s$ est une fonction continue a support compact. Nous avons donc $\forall s \in]0, +\infty[$:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} |\cdot|_p^s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p^\times)$$
$$\widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}} |\cdot|_p^s = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} |\cdot|_p^s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p^\times)$$

Soit $x \in \mathcal{H}$, en utilisant que $\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} p^n \mathbb{Z}_p^\times$ nous pouvons calculer en utilisant le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\xi^p_{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}(s) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) |x|_p^s \, d\mu_p^\times(x) \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} p^n \mathbb{Z}_p^\times}(x) |x|_p^s \, d\mu_p^\times(x) \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{p^n \mathbb{Z}_p^\times}(x) |x|_p^s \, d\mu_p^\times(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{p^n \mathbb{Z}_p^\times}(x) |x|_p^s \, d\mu_p^\times(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{p^n \mathbb{Z}_p^\times}(x) (p^{-n})^s d\mu_p^\times(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p^{-ns} \mu_p^\times(p^n \mathbb{Z}_p) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p^{-s})^n
\end{aligned}$$

Nous avons également que $s \in \mathcal{H}$ et donc $|p^{-s}| < 1$ et nous obtenons

$$\begin{aligned}
\xi^p_{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (p^{-s})^n \\
&= \frac{1}{1 - p^{-s}}
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 3

L'anneau adélique $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Introduction

Dans ce chapitre nous allons unifier ce qui a été fait sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}_p$ d'un point de vue algébrique et analytique en créant un objet contenant toutes les informations de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}_p$ que l'on notera $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$. Dans ce document nous noterons $\mathbb{A}$ au lieu de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ pour raccourcir les notations mais ce concept peut se généraliser pour des corps plus généraux d'où l'intérêt pour un corps k de noter $\mathbb{A}_k$ pour éviter les confusions. Bien évidement nous ne travaillons que sur $\mathbb{Q}$ donc nous n'aurons pas a faire a de telles confusions.

3.1 Construction de $\mathbb{A}$

Définition 3.1.1 :

Soit I un ensemble et $P(n)$ une proposition alors définissons :

$$p.p. - i \in I, P(n) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \neg P(i)\} \text{ est fini}$$

Ce qui signifie que la proposition P est vérifiée pour presque tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour avoir des notations cohérentes introduisons également la notations suivantes :

Définition 3.1.2 :

Nous savons que si nous complétons $\mathbb{Q}$ en utilisant $|\cdot|_\infty$ nous obtenons $\mathbb{R}$, posons alors :

$$\begin{gathered}\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}\\ \mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}\\ \mu_\infty = \lambda \text{ la mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}\\ \mu_\infty^\times = \frac{\mu_\infty}{|\cdot|_\infty}\end{gathered}$$

En utilisant ces notations nous pouvons maintenant définir $\mathbb{A}$.

Définition 3.1.3 :

Posons tout d'abord posons $\mathcal{P}$ comme étant l'ensemble des nombres premiers et $\mathcal{P}_\infty = \{\infty\} \cup \mathcal{P}$. Nous pouvons alors définir :

$$\mathbb{A} = \left\{ a \in \prod_{p \in \mathcal{P}_\infty} \mathbb{Q}_p \;\middle|\; p.p. - p \in \mathcal{P}_\infty, a(p) \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

En munissant $\mathbb{A}$ des lois $+, \cdot$ de manière canonique nous obtenons un anneau. Et on appelle idèles l'ensemble $\mathbb{A}^\times$.

Proposition 3.1.4 :

$\mathbb{A}$ contient un sous corps isomorphe a $\mathbb{Q}$ via le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rccl} \iota : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & q & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rccl} a : & \mathcal{P}_\infty & \longrightarrow & \bigcup\limits_{p \in \mathcal{P}_\infty} \mathbb{Q}_p \\ & p & \longmapsto & q \end{array} \right. \end{array}$$

Tout comme pour $\mathbb{Q}_p$ nous allons identifier $\mathbb{Q}$ a $\iota(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}$, a nouveau nous pouvons faire ceci rigoureusement en utilisant la méthode de transport de structure.

Définition 3.1.5 :

Soit E un ensemble et G un groupe agissant sur E, pour $D \in \mathscr{P}(E)$ nous définissons :

$$D \text{ est un domaine fondamental} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists g \in G, \exists ! d \in D, x = g.d$$

Nous allons trouver un domaine fondamentale de $\mathbb{A}$ pour l'action par multiplication de $\mathbb{Q}$ car cela permettra de partitionner $\mathbb{A}$ et ensuite nous ferons de même pour $\mathbb{A}^\times$ et $\mathbb{Q}^\times$.

Lemme 3.1.6 :

Soit $I \in \mathscr{P}(\mathcal{P})$ un ensemble fini de nombres premiers, soit

$$a \in \prod_{p \in I} \mathbb{Z}_p$$

alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{Z}, \forall p \in I, |\alpha - a(p)|_p < \epsilon$$

Preuve :

Soit $\epsilon > 0$.
Soit $p \in I$, nous savons que $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ ainsi nous savons que $\exists b(p) \in \mathbb{Z}, |b(p) - a(p)|_p < \epsilon$. Posons ensuite

$$\begin{aligned} k : I &\longrightarrow \mathbb{N} \\ p &\longmapsto \min(\left\{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \;\middle|\; p^{-n} < \epsilon\right\}) \end{aligned}$$

et remarquons que :

$$\forall p, q \in I, p \neq q \Rightarrow \left(p^{k(p)}\right) + \left(q^{k(q)}\right) = (1)$$

C'est a dire a dire que ces idéaux sont premiers entre eux. Nous pouvons alors appliquer le théorème des restes chinois pour ainsi obtenir :

$$\exists \alpha \in \mathbb{Z}, \forall p \in I, [\alpha]_{p^{k(p)}} = [b(p)]_{p^{k(p)}}$$

Ici pour $x \in \mathbb{Z}$, $[x]_p$ désigne la classe de x dans $\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$.
Soit $p \in I$.
Nous avons alors $[\alpha]_{p^{k(p)}} = [b(p)]_{p^{k(p)}} \Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z}, \alpha = b(p) + lp^{k(p)}$, ainsi nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} |\alpha - a(p)|_p &= \left|b(p) + lp^{k(p)} - a(p)\right|_p \\ &\leqslant \max(|b(p) - a(p)|_p, \left|p^{k(p)}\right|_p) \\ &= \max(|b(p) - a(p)|_p, p^{-k(p)}) \\ &< \max(\epsilon, \epsilon) = \epsilon \end{aligned}$$

Donc l'élément α convient.

$\square$

Lemme 3.1.7:

Soit $I \in \mathscr{P}(\mathcal{P})$ un ensemble fini de nombres premiers, soit

$$a \in \prod_{p \in I} \mathbb{Q}_p$$

alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{Q}, \forall p \in I, |\alpha - a(p)|_p < \epsilon$$

De plus soit $u, v \in Z$ avec $\text{pgcd}(u, v) = 1$ et tels que $\alpha = \frac{u}{v}$, alors :

$$\forall p \in \mathcal{P} \backslash I, v \notin (p)$$

Preuve :

Soit $\epsilon > 0$.
Essayons de revenir au cas du lemme 3.1.6, pour cela posons

$$\begin{aligned} k : I &\longrightarrow \mathbb{N} \\ p &\longmapsto \min(\{n \in \mathbb{N} \mid p^n a(n) \in \mathbb{Z}_p\}) \end{aligned}$$

et considérons alors l'élément :

$$\lambda = \prod_{p \in I} p^{k(p)}$$

Ainsi en posant $b = \lambda a$ nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\forall p \in I, |b(p)|_p &= |\lambda a(p)|_p \\
&= \left|\prod_{q \in I} q^{k(q)} a(p)\right|_p \\
&= \left|\prod_{q \in I \setminus \{p\}} q^{k(q)} p^{k(p)} a(p)\right|_p \\
&= \left|\prod_{q \in I \setminus \{p\}} q^{k(q)}\right|_p \left|p^{k(p)} a(p)\right|_p \\
&\leqslant 1.1 = 1
\end{aligned}$$

Donc $\forall p \in I, b(p) \in \mathbb{Z}_p$. Posons $\beta = \min\limits_{p \in I}(|\lambda|_p)$ nous pouvons alors obtenir le lemme 3.1.6 pour obtenir :

$$\exists \gamma \in \mathbb{Z}, \forall p \in I, |\gamma - b(p)|_p < \beta\epsilon$$

Posons alors $\alpha = \frac{\gamma}{\lambda}$, pour $p \in I$ nous avons alors :

$$\begin{aligned}
|\alpha - a(p)|_p = \left|\frac{\gamma}{\lambda} - a(p)\right|_p &= \left|\frac{1}{\lambda}(\gamma - a(p))\right|_p \\
&= \frac{1}{|\lambda|_p} |\gamma - a(p)|_p \\
&\leqslant \frac{1}{\beta} |\gamma - a(p)|_p \\
&< \frac{1}{\beta}\beta\epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

De plus nous avons $\gamma, \lambda \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha = \frac{\gamma}{\lambda}$ et $\forall p \in \mathcal{P} \backslash I, \lambda \notin (p)$ ce qui conclut la preuve.

$\square$

Théorème 3.1.8 :

Le groupe $\mathbb{Q}^+$ agit sur $\mathbb{A}$, un domaine fondamental pour cette action est :

$$D^+ = [0;1[\times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$$

Preuve :

Il suffit d'utiliser les lemmes précédents, pour le détail de la preuve le lecteur est invité a aller voir le livre [1].

$\square$

Théorème 3.1.9 :

Le groupe $\mathbb{Q}^\times$ agit sur $\mathbb{A}^\times$, un domaine fondamental pour cette action est :

$$D^\times =]0;+\infty[\times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$$

Preuve :

Soit $a \in \mathbb{A}^\times$, montrons que $\exists \alpha \in \mathbb{Q}^\times, \exists! d \in D^\times, a = qd$. Commençons par poser :

$$J = \left\{ p \in \mathcal{P} \;\middle|\; a(p) \notin \mathbb{Z}_p^\times \right\}$$

Par construction de $\mathbb{A}$ nous savons que J est fini.
Soit $p \in J$, nous savons alors $\exists l \in \mathbb{Z}, \left|p^l a(p)\right|_p = 1$, posons alors $k(p) = l$.
Considérons alors l'élément :

$$\beta = \prod_{p\in J} p^{k(p)}$$

De plus posons $\delta \in \{1, -1\}$ tel que $\delta = 1 \Leftrightarrow a(\infty) \geqslant 0$. Posons alors $d = \delta\beta a \in \mathbb{A}$ et montrons que $d \in D^\times$. Soit $p \in \mathcal{P} \setminus J$ nous pouvons alors calculer :

$$\begin{aligned} |\delta\beta a(p)|_p = |\beta a(p)|_p &= \left| a(p) \prod_{q \in J} q^{k(q)} \right|_p \\ &= |a(p)|_p \prod_{q \in J} \left| q^{k(q)} \right|_p = 1 \end{aligned}$$

Et pour $p \in J$ nous avons :

$$\begin{aligned} |\delta\beta a(p)|_p = |\beta a(p)|_p &= \left| a(p) \prod_{q \in J} q^{k(q)} \right|_p \\ &= \left| a(p) p^{k(p)} \prod_{q \in J \setminus \{p\}} q^{k(q)} \right|_p \\ &= \left| a(p) p^{k(p)} \right|_p \left| \prod_{q \in J \setminus \{p\}} q^{k(q)} \right|_p \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall p \in \mathcal{P}, d(p) \in \mathbb{Z}_p^\times$, de plus par définition de δ nous savons que $d(\infty) \in]0; +\infty[$, ainsi $d \in D^\times$. Et en posant $\alpha = \frac{1}{\delta\beta} \in \mathbb{Q}^\times$ nous avons $a = \alpha d$. Ainsi nous avons montré que :

$$\forall a \in \mathbb{A}^\times, \exists \alpha \in \mathbb{Q}^\times, \exists d \in D^\times, a = \alpha d$$

Il nous reste a montrer l'unicité de d. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}^\times$ et $d_1, d_2 \in D^\times$ tels que :

$$\alpha_1 d_1 = \alpha_2 d_2$$

Nous avons alors :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Soit $p \in \mathcal{P}$, nous avons alors :

$$\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|_p = \left|\frac{d_1(p)}{d_2(p)}\right|_p = \frac{|d_2(p)|_p}{|d_1(p)|_p} = 1$$

α_1, α_2 étant dans $\mathbb{Q}^\times$ nous avons alors :

$$\begin{aligned} p^{-(v_p(\alpha_2)-v_p(\alpha_1))} &= \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|_p = 1 = p^0 \\ &\Rightarrow v_p(\alpha_1) - v_p(\alpha_2) = 0 \\ &\Rightarrow v_p(\alpha_1) = v_p(\alpha_1) \end{aligned}$$

De plus $\exists u, v \in \mathbb{Z}_\times$ tels que :

$$\alpha_1 = u\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(\alpha_1)}$$

$$\alpha_2 = v\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(\alpha_2)} = v\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(\alpha_1)}$$

Ainsi nous avons $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{v}{u} \in \mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. Nous pouvons conclure en utilisant :

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{d_1(\infty)}{d_2(\infty)} > 0$$

Donc nous avons $\frac{v}{u} = 1$ et ainsi $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1$, partir de ceci nous obtenons alors l'unicité de d :

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{d_2} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1 \\ &\Rightarrow d_1 = d_2 \end{aligned}$$

$\square$

Définition 3.1.10 :

Définissons $|\cdot|$ sur $\mathbb{A}$ par :

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \prod_{p \in \mathcal{P}_\infty} |a(p)|_p \end{aligned}$$

Remarquons que ce produit est en fait fini par définition de $\mathbb{A}$ et que $\forall x \in \mathbb{Q}^\times, |x| = 1$.

L'ensemble suivant sera utile pour certains calculs, il s'agit des adèles normalisés.

Définition 3.1.11 :

Définissons $\mathbb{A}^1 = \{a \in A \mid \ |a| = 1\}$.

Nous avons également une injection de $\mathbb{R}$ dans un sous corps de $\mathbb{A}$ donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.1.12 :

L'application suivante une morphisme de corps :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ x &\longmapsto \left\{ \begin{array}{rcl} \phi(x) : \ \mathcal{P}_\infty & \longrightarrow & \bigcup_{p \in \mathcal{P}_\infty} \mathbb{Q}_p \\ p & \longmapsto & \begin{cases} x \text{ si } p = \infty \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le lemme suivant nous permet alors de ramener certains calculs de $\mathbb{A}^\times$ sur $]0; +\infty[\times \mathbb{A}^1$.

Proposition 3.1.13 :

L'application suivante définit un morphisme de groupes entre $\mathbb{A}^\times$ et

$]0;+\infty[\times\mathbb{A}^1$:

$$\begin{aligned}\varphi :]0;+\infty[\times\mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathbb{A}^\times \\ (t,a) &\longmapsto \phi(t)a\end{aligned}$$

Étant donné que nous avons un domaine fondamental pour $\mathbb{A}^\times$ nous pouvons alors en construire un pour $\mathbb{A}^1$, d'où le lemme suivant.

Lemme 3.1.14 :

Le groupe $\mathbb{Q}^\times$ agit sur $\mathbb{A}^1$, un domaine fondamental pour cette action est :

$$D^1 = D^\times \cap \mathbb{A}^1 = \{1\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$$

3.2 Topologie de $\mathbb{A}$

Nous allons maintenant munir $\mathbb{A}$ d'une topologie de telle sorte a ce que $\mathbb{A}$ soit localement compact afin d'y obtenir une mesure de Haar. De plus nous souhaitons que cette topologie soit liée a celles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}_p$ pour que les résultats d'analyse établis sur ces corps se transportent sur $\mathbb{A}$.

Définition 3.2.1 :

Définissons la topologie de $\mathbb{A}$ comme étant la topologie engendrée par la famille suivante :

$$E = \left\{ U \in \prod_{p\in\mathcal{P}_\infty} \mathcal{T}(\mathbb{Q}_p) \;\middle|\; p.p. - p \in \mathcal{P}, U(p) = \mathbb{Z}_p \right\}$$

C'est a dire $\mathcal{T}(\mathbb{A}) = \tau(E)$.

Proposition 3.2.2 :

$\mathbb{A}$ est localement compact.

Preuve :

Soit $a \in \mathbb{A}$.
Posons $I = \{p \in \mathcal{P} \mid a(p) \notin \mathbb{Z}_p\}$, par définition de $\mathbb{A}$, I est fini. De plus nous savons que $\mathbb{R}$ est localement compact donc $\exists V$ un voisinage compact de $a(\infty)$. Nous pouvons alors considérer :

$$U = V \times \prod_{p \in \mathcal{P}} (a(p) + \mathbb{Z}_p)$$

En remarquant que $a(p) \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow a(p) + \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$ nous avons alors que $U \in \mathcal{T}(\mathbb{A})$ et par le théorème de Tykhonov, U est compact de plus nous avons bien $a \in U$.

$\square$

Définition 3.2.3 :

Définissons la topologie de $\mathbb{A}^\times$ comme étant la topologie engendrée par la famille suivante :

$$E = \left\{ U \in \prod_{p \in \mathcal{P}_\infty} \mathcal{T}(\mathbb{Q}_p) \;\middle|\; p.p. - p \in \mathcal{P}, U(p) = \mathbb{Z}_p^\times \right\}$$

C'est a dire $\mathcal{T}(\mathbb{A}) = \tau(E)$.

Remarquons que la topologie induite par $\mathbb{A}$ et celle que nous venons de définir ne sont pas les mêmes. Cependant la topologie que nous avons définie est plus fine donc une application continue sur $\mathbb{A}$ restera continue sur $\mathbb{A}^\times$.

3.3 Mesure sur $\mathbb{A}$

Nous allons maintenant définir une mesure sur $\mathbb{A}$, nous souhaitons que celle-ci soit en quelque sorte un produit infini des mesures μ_p. Malheureusement nous ne pouvons pas définir un produit infini de mesures qui ne sont pas finies, mais nous pouvons utiliser le fait que $\mathbb{A}^+$ est localement compact pour y définir une mesure de Haar.

Définition 3.3.1 :

Sur $\mathbb{A}$ définissons la mesure μ comme étant l'unique mesure de Haar vérifiant :

$$\mu\left([0,1] \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p\right) = 1$$

Essayons maintenant de montrer que μ vérifie les propriétés que nous voulons. Commençons par définir une mesure dans le cas d'un produit fini.

Définition 3.3.2 :

Soit $I \in \mathscr{P}(\mathcal{P}_\infty)$ un ensemble fini contenant ∞, alors $\prod\limits_{p\in\mathcal{P}_\infty\setminus I} \mathbb{Z}_p$ est compact donc localement compact. Nous pouvons alors définir l'unique mesure de Haar ν_I sur $(\prod\limits_{p\in\mathcal{P}_\infty\setminus I} \mathbb{Z}_p)^+$ vérifiant :

$$\nu_I\left(\prod_{p\in\mathcal{P}_\infty\setminus I} \mathbb{Z}_p\right) = 1$$

Nous pouvons alors définir la mesure suivante qui correspond que quelque sorte a mesure sur produit fini de $\mathbb{Q}_p$.

Définition 3.3.3 :

Soit $I \in \mathscr{P}(\mathcal{P}_\infty)$ un ensemble fini contenant ∞ définissons alors la mesure :

$$\rho_I = \left(\bigotimes_{p\in I} \mu_p\right) \otimes \nu_I$$

Remarquons que ici ρ_I est bien définie car le produit est fini. De plus nous savons qu'un produit de mesures de Haar est une mesure de Haar sur le groupe produit donc ρ_I est une mesure de Haar pour le groupe :

$$\left(\prod_{p\in I} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\in\mathcal{P}_\infty\setminus I} \mathbb{Z}_p\right)^+$$

Définissons également :

$$E_I = \prod_{p\in I} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\in\mathcal{P}_\infty\setminus I} \mathbb{Z}_p$$

Proposition 3.3.4 :

Nous avons l'égalité suivante qui est essentielle pour les calculs. Soit $I \in \mathscr{P}(\mathcal{P}_\infty)$ un ensemble fini contenant ∞ nous avons alors :

$$\rho_I = \mu(\cdot \cap E_I)$$

Preuve :

Nous savons que ρ_I et $\mu(\cdot \cap E_I)$ sont des mesures de Haar sur E_I^+ donc :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \rho_I = C\mu(\cdot \cap E_I)$$

Pour montrer que $C = 1$ il nous suffit de montrer que ces mesures coïncident sur un ensemble de mesure fini. Calculons alors :

$$\begin{aligned}\rho_I([0,1]\times\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p) &= \left(\left(\bigotimes_{p\in I}\mu_p\right)\otimes\nu_I\right)\left([0,1]\times\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p\right)\\ &= \mu_\infty([0;1])\left(\prod_{p\in I\setminus\{\infty\}}\mu_p(\mathbb{Z}_p)\right)\nu_I\left(\prod_{p\in\mathcal{P}_\infty\setminus I}\mathbb{Z}_p\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

Et d'autre part par définition de μ nous avons :

$$\mu\left([0,1]\times\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p\right)=1$$

D'où l'égalité des mesures.

$\square$

Nous allons alors définir les ensembles suivants qui permettent alors de calculer plus facilement la mesure μ.

Définition 3.3.5 :

Soit $n\in\mathbb{N}$, définissons alors les ensembles suivants :

$$I_n=\{\infty\}\cup\{p\in\mathcal{P}\mid p\leqslant n\}$$
$$H_n=E_{I_n}$$

Proposition 3.3.6 :

Nous avons $\mathbb{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}, H_n\subset H_{n+1}$.

Sur $\mathbb{Q}_p^\times$ nous avons défini une mesure $\mu_p^\times$ a partir de la mesure μ définie sur

$\mathbb{Q}_p$, nous allons donc faire quelque chose qui est analogue sur $\mathbb{A}^\times$.

Définition 3.3.7:

Définissons alors la mesure $\mu^\times$ sur $\mathbb{A}^\times$ par :

$$\mu^\times = \frac{1}{|\cdot|}\mu$$

Proposition 3.3.8:

Nous pouvons liée la mesure de $\mathbb{A}^\times$ a une mesure sur $]0;+\infty[\times\mathbb{A}^1$:

$$\exists!\nu \text{ mesure de Haar sur } \mathbb{A}^1, \mu_\varphi^\times = \lambda^\times \otimes \nu$$

Preuve :

Il faut utiliser le fait que nous avons $\mathbb{A}^\times \simeq]0;+\infty[\times\mathbb{A}^1$ et utiliser le théorème de la mesure image pour obtenir le résultat.

□

Proposition 3.3.9:

$\nu(D^1) = 1$

Preuve :

Commençons par remarquer que $\varphi([1;2]\times D^1) = [1;2]\times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\nu_\varphi^\times([1;2]\times\mathbb{A}^1) &= \lambda^\times\otimes\nu([1;2]\times D^1)\\ &= \lambda^\times([1;2])\nu(D^1)\end{aligned}$$

De plus nous avons :

$$\begin{aligned}\nu_\varphi^\times([1;2]\times\mathbb{A}^1) &= \nu^\times(\varphi([1;2]\times\mathbb{A}^1))\\ &= \nu^\times\left([1;2]\times\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p^\times\right)\\ &= \lambda^\times([1;2])\end{aligned}$$

D'où $\nu(D^1) = 1$.

$\square$

3.4 Intégration sur $\mathbb{A}$

Pour terminer ce chapitre nous allons établir quelques résultats permettant de calculer plus facilement des intégrales sur $\mathbb{A}$.

Lemme 3.4.1 :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ une fonction intégrable nous avons alors :

$$\int_{\mathbb{A}} f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{A}} \mathbb{1}_{H_n}(x)f(x)d\mu(x)$$

Preuve :

Posons

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}} \\ n &\longmapsto \mathbb{1}_{H_n} f \end{aligned}$$

remarquons qu'il s'agit d'une suite de fonctions mesurables telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |g(n)| \leqslant |f|$$
$$\forall x \in \mathbb{A}, \lim_{n \to +\infty} g(n)(x) = f(x)$$

Ainsi nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}} f(x) d\mu(x) &= \int_{\mathbb{A}} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{1}_{H_n}(x) f(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{A}} \mathbb{1}_{H_n}(x) f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

$\square$

Définition 3.4.2:

Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ une fonction nous définirons alors :

$$f \text{ est une fonction produit sur } \mathbb{A} \text{ de décomposition } g$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists g \in \prod_{p \in \mathcal{P}_\infty} \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p) \cap \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p), \begin{cases} p.p. - p \in \mathcal{P}, g(p)(\mathbb{Z}_p) = \{1\} \\ \forall x \in \mathbb{A}, f(x) = \prod_{p \in \mathcal{P}_\infty} g(p)(x(p)) \end{cases}$$

Ici $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.4.3 :

Soit f une fonction produit sur $\mathbb{A}$ alors f est continue.

Preuve :

Soit $a \in \mathbb{A}$ et g la décomposition de f. Par construction de $\mathbb{A}$ nous savons que $I = \{p \in \mathcal{P} \mid a(p) \notin \mathbb{Z}_p\}$ est fini. Nous pouvons ainsi poser :

$$n = \max(I)$$

Et nous avons alors $a \in H_n$, il nous suffit alors de remarquer que :

$$\forall x \in H_n, f(x) = \prod_{p \in I} g(n)(x)$$

Donc sur H_n, f est un produit fini de fonctions continues donc est continue sur H_n qui est un voisinage ouvert de x. f est au continue au voisinage de chaque point donc est continue sur $\mathbb{A}$.

□

Corollaire 3.4.4 :

Une fonction produit sur $\mathbb{A}$ est mesurable.

Preuve :

Une fonction produit sur $\mathbb{A}$ est continue et les fonctions continues sont mesurables.

□

Lemme 3.4.5 :

Soit f une fonction produit sur $\mathbb{A}$ et g sa décomposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ nous avons alors :

$$\int_{\mathbb{A}} \mathbb{1}_{H_n}(x) f(x) d\mu(x) = \prod_{p \in I_n} \int_{\mathbb{Q}_p} g(p)(x) d\mu_p(x)$$

Preuve :

Posons $I = I_n$.
Nous allons appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue pour cela commençons par montrer que $\mathbb{1}_{H_n} f \in L^1(\mathbb{A})$. Pour cela nous pouvons appliquer le théorème de Fubini-Tolleni pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}} \left| \mathbb{1}_{H_n}(x) f(x) \right| d\mu(x) &= \int_{\mathbb{A}} \left| \mathbb{1}_{H_n}(x) \prod_{p \in I} g(p)(x) \right| d\mu(x) \\
&= \int_{H_n} \prod_{p \in I} \left| g(p)(x) \right| d\rho_I(x) \\
&= \int_{H_n} \prod_{p \in I} \left| g(p)(x) \right| d \left(\bigotimes_{p \in I} \mu_p \right) \otimes \nu_I(x) \\
&= \left(\int_{\prod_{p \in I} \mathbb{Q}_p} \prod_{p \in I} \left| g(p)(x) \right| d \bigotimes_{p \in I} \mu_p(x) \right) \nu_I \left(\prod_{p \in \mathcal{P}_\infty \setminus I} \mathbb{Z}_p \right) \\
&= \int_{\prod_{p \in I} \mathbb{Q}_p} \prod_{p \in I} \left| g(p)(x) \right| d \bigotimes_{p \in I} \mu_p(x) \\
&= \prod_{p \in I} \int_{\mathbb{Q}_p} \left| g(p)(x) \right| d\mu_p(x)
\end{aligned}$$

De plus par définition de fonction produit sur $\mathbb{A}$ nous savons que :

$$\forall p \in \mathcal{P}_\infty, g(p) \in L^1(\mathbb{Q}_p)$$

Et I étant fini nous avons bien :

$$\int\limits_{\mathbb{A}} |\mathbb{1}_{H_n}(x) f(x)| \, d\mu(x) = \prod_{p \in I} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |g(p)(x)| \, d\mu_p(x) < +\infty$$

Ainsi nous avons montrés que $\mathbb{1}_{H_n} f \in L^1(\mathbb{A})$, nous pouvons alors appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{A}} \mathbb{1}_{H_n}(x) f(x) d\mu(x) &= \int\limits_{\mathbb{A}} \mathbb{1}_{H_n}(x) \prod_{p \in I} g(p)(x) d\mu(x) \\
&= \int\limits_{H_n} \prod_{p \in I} g(p)(x) d\rho_I(x) \\
&= \int\limits_{H_n} \prod_{p \in I} g(p)(x) d \left(\bigotimes_{p \in I} \mu_p \right) \otimes \nu_I(x) \\
&= \left(\int\limits_{\prod_{p \in I} \mathbb{Q}_p} \prod_{p \in I} g(p)(x) d \bigotimes_{p \in I} \mu_p(x) \right) \nu_I \left(\prod_{p \in \mathcal{P}_\infty \setminus I} \mathbb{Z}_p \right) \\
&= \int\limits_{\prod_{p \in I} \mathbb{Q}_p} \prod_{p \in I} g(p)(x) d \bigotimes_{p \in I} \mu_p(x) \\
&= \prod_{p \in I} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} g(p)(x) d\mu_p(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 3.4.6 :

Soit f une fonction produit sur $\mathbb{A}$ de décomposition g telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{p\in I_n}\int_{\mathbb{Q}_p}|g(p)(x)|\,d\mu_p(x)<+\infty$$

Alors nous avons :

$$\int_{\mathbb{A}} f(x)d\mu(x)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{p\in I_n}\int_{\mathbb{Q}_p} g(p)(x)d\mu_p(x)x$$

Preuve :

Nous allons commencer par montrer que $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{A})$, pour ceci nous pouvons appliquer le théorème de Beppo-Levi pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}}|f(x)|\,d\mu(x)&=\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{A}}\mathbb{1}_{H_n}(x)\,|f(x)|\,d\mu(x)\\&=\lim_{n\to+\infty}\prod_{p\in I_n}\int_{\mathbb{Q}_p}|g(p)(x)|\,d\mu_p(x)<+\infty\end{aligned}$$

Donc nous avons bien $f\in L^1(\mathbb{A})$ ce qui nous permet alors d'appliquer les lemmes 3.4.1 et 3.4.5 pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}}f(x)d\mu(x)&=\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{A}}\mathbb{1}_{H_n}(x)f(x)d\mu(x)\\&=\lim_{n\to+\infty}\prod_{p\in I_n}\int_{\mathbb{Q}_p}g(p)(x)d\mu_p(x)\end{aligned}$$

$\square$

Pour terminer cette section munissons $\mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ d'une transformée de Fourrier.

Définition 3.4.7 :

Définissons sur $\mathbb{A}$ l'application :

$$\begin{aligned} e : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \prod_{p \in \mathcal{P}_\infty} e_p(a(p)) \end{aligned}$$

Remarquons a nouveau que par définition de $\mathbb{A}$ le produit est fini.

Définition 3.4.8 :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ définissons alors la transformée de Fourrier de f notée $\hat{f}$ par :

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{A}} f(y)e(-xy)d\mu(x) \end{aligned}$$

Posons également :

$$\mathcal{F}(\mathbb{A}) = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A}) \;\middle|\; f \text{ est continue et } \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A}) \right\}$$

Nous pouvons alors appliquer la théorie de Fourrier des groupes localement compacts sur $\mathbb{A}^+$ pour obtenir le résultat suivant.

Théorème 3.4.9 :

Pour $f \in \mathcal{F}^1(\mathbb{A})$ nous avons alors

$$\forall a \in \mathbb{A}, f(a) = \hat{\hat{f}}(-a)$$

Preuve :

Ici a nouveau la preuve utilise la théorie de la transformée de Fourrier sur les groupes localement compacts qui est détaillé dans le livre [6].

$\square$

Chapitre 4

L'équation fonctionnelle adélique

Introduction

Ce chapitre contient le résultat essentiel de ce document, c'est a dire comment établir l'équation fonctionnelle de la fonction zêta Riemann a partir de la théorie de l'intégration sur $\mathbb{A}$. Nous allons même avoir un résultat plus général mais nous ne développerons que ce cas particulier. Il se trouve que établir l'équation fonctionnelle est très similaire a ce qui est fait en utilisant l'analyse complexe classique, c'est a dire que nous allons utiliser un argument qui généralise la formule de Poisson.

4.1 Formule de Poisson

Sur $\mathbb{R}$ la formule de Poisson lie la transformée de Fourrier a la série de Fourrier, la série de Fourrier étant valable pour des fonctions suffisamment régulières et 1-périodiques. Nous allons donc devoir définir ce qu'est une fonction périodique sur $\mathbb{A}$. Remarquons que pour une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ nous avons $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, f(x+k) = f(x)$. En remarquant que $\mathbb{Z}$ est un réseau dans $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{Q}$ est un réseau dans $\mathbb{A}$ nous pouvons par analogie obtenir la définition suivante :

Définition 4.1.1 :

Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ une fonction, définissons alors :

$$f \text{ est periodique sur } \mathbb{A} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{A}, \forall q \in \mathbb{Q}, f(a+q) = f(a)$$

Remarquons que $[0,1]$ est un domaine fondamental de $\mathbb{R}$ pour $\mathbb{Z}$ sous l'action induite par $+$. Ainsi en considérant le domaine fondamental D^+ le domaine fondamental de $\mathbb{A}$ pour $\mathbb{Q}$ sous l'action de $+$ nous pouvons alors définir a nouveau par analogie a la série de Fourrier l'objet suivant.

Définition 4.1.2 :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ une fonction périodique sur $\mathbb{A}$ posons alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_f : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ q &\longmapsto \int_{D^+} f(x) e(-qx) d\mu(x) \end{aligned}$$

Lemme 4.1.3 :

Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{A}$ telle que $\sum_{x \in \mathbb{Q}} |\mathcal{S}_f(x)| < +\infty$, nous avons alors :

$$\forall a \in \mathbb{A}, f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \mathcal{S}_f(x) e(ax)$$

Preuve :

Ce lemme sera admis, le résultat vient de la théorie de la transformée de Fourrier sur les groupes localement compactes. La formule est en faite la formule d'inversion de Fourrier pour le groupe $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. A nouveau pour avoir un preuve complète le lecteur peut aller voir le livre [6].

$\square$

Lemme 4.1.4 :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ une fonction continue, posons :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathcal{L}^1(\mathbb{A}) \\ x &\longmapsto f(\cdot + x) \end{aligned}$$

Alors si $\sum_{x \in \mathbb{Q}} g(x)$ converge uniformément sur D^+, en posant $\phi = \sum_{x \in \mathbb{Q}} g(x)$, ϕ est continue périodique sur $\mathbb{A}$ et nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \hat{f}(x) = \mathcal{S}_\phi(x)$$

Ici la série $\sum_{x \in \mathbb{Q}} g(x)$ est a voir au sens des familles sommables.

Preuve :

Nous pouvons remarquer par un calcul direct que ϕ est périodique sur $\mathbb{A}$ et sa continue vient de la convergence uniforme.
Soit $x \in \mathbb{Q}$.
D^+ étant des mesure finie, la converge uniforme de $\sum_{x \in \mathbb{Q}} g(x)$ nous permet

alors d'appliquer le théorème de convergence dominée pour ainsi obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\phi(x) &= \int_{D^+} \phi(a)e(-xa)d\mu(a) \\
&= \int_{D^+} \left(\sum_{y\in Q} f(x+y) \right) e(-xa)d\mu(a) \\
&= \sum_{y\in Q} \int_{D^+} f(x+y)e(-xa)d\mu(a)
\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser le fait que μ est une mesure de Haar sur $\mathbb{A}$ pour faire un changement de variable et ainsi obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\phi(x) &= \sum_{y\in Q} \int_{D^+} f(x+y)e(-xa)d\mu(a) \\
&= \sum_{y\in Q} \int_{y+D^+} f(x)e(-(x-y)a)d\mu(a) \\
&= \sum_{y\in Q} \int_{y+D^+} f(x)e(-xa)e(xy)d\mu(a)
\end{aligned}$$

En sachant que $xy \in \mathbb{Q}$ nous avons alors $e(xy) = 1$. De plus nous savons que $\mathbb{A} = \bigsqcup_{y\in\mathbb{Q}} (y + D^+)$, nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\phi(x) &= \sum_{y\in Q} \int_{y+D^+} f(x)e(-xa)e(xy)d\mu(a) \\
&= \sum_{y\in Q} \int_{y+D^+} f(x)e(-xa)d\mu(a) \\
&= \sum_{y\in Q} \int_{\mathbb{A}} \mathbb{1}_{y+D^+}(a)f(x)e(-xa)d\mu(a) \\
&= \int_{\mathbb{A}} f(x)e(-xa)d\mu(a) = \hat{f}(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 4.1.5 *(Formule de Poisson)* **:**

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ une fonction continue, posons :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathcal{L}^1(\mathbb{A}) \\ x &\longmapsto f(\cdot + x) \end{aligned}$$

Supposons que f vérifie les conditions suivantes :

1. $\sum\limits_{x \in \mathbb{Q}} g(x)$ converge uniformément sur D^+
2. $\sum\limits_{x \in \mathbb{Q}} \left| \hat{f}(x) \right| < +\infty$

Alors :

$$\sum_{x \in \mathbb{Q}} f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \hat{f}(x)$$

Preuve :

Posons $\phi = \sum\limits_{x \in \mathbb{Q}} g(x)$, en utilisant le point 1 ainsi que le lemme 4.1.4 nous avons alors pour $x \in \mathbb{Q}$:

$$\mathcal{S}_\phi(x) = \hat{f}(x)$$

Grâce au point 2 nous avons alors :

$$\sum_{x \in \mathbb{Q}} |\mathcal{S}_\phi(x)| = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \left| \hat{f}(x) \right| < +\infty$$

Soit $x \in \mathbb{A}$, ϕ étant continue et périodique sur $\mathbb{A}$ nous pouvons appliquer le lemme 4.1.3 pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{y\in\mathbb{Q}} f(x+y) = \phi(x) &= \sum_{y\in\mathbb{Q}} \mathcal{S}_\phi(y)e(xy) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Q}} \hat{f}(y)e(xy)\end{aligned}$$

Ainsi en évaluant cette équation en $x = 0$ nous avons alors :

$$\sum_{y\in\mathbb{Q}} f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Q}} \hat{f}(y)$$

$\square$

Nous pouvons alors énoncer le principal résultat de cette section qui sera essentiel pour établir l'équation fonctionnelle. Il s'agit d'une variante de la formule de Poisson.

Théorème 4.1.6 *(Riemann-Roch)* **:**

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ une fonction continue et soit $a \in \mathbb{A}^\times$. Posons :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathcal{L}^1(\mathbb{A}) \\ x &\longmapsto f(a(\cdot + x)) \end{aligned}$$

Supposons alors que f vérifie les conditions suivantes :

1. $\sum_{x\in\mathbb{Q}} g(x)$ converge uniformément sur D^+
2. $\sum_{x\in\mathbb{Q}} \left|\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)\right| < +\infty$

Alors :

$$\sum_{x\in\mathbb{Q}} f(ax) = \frac{1}{|a|}\sum_{x\in\mathbb{Q}} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Preuve :

Considérons la fonction g définie par :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ b &\longmapsto f(ab) \end{aligned}$$

f est continue par composition de fonctions continues, montrons que $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ en faisant un changement de variables.

$$\int_{\mathbb{A}} |f(ab)| \, d\mu(b) = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{A}} |f(b)| \, d\mu(b) < +\infty$$

Nous pouvons alors calculer pour $x \in \mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &= \int_{\mathbb{A}} f(ab) e(-bx) d\mu(b) \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{A}} f(b) e\left(-b\frac{x}{a}\right) d\mu(b) \\ &= \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons appliquer le théorème 4.1.5 a la fonction h et nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Q}} f(ax) &= \sum_{x \in \mathbb{Q}} h(x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Q}} \hat{h}(x) \\ &= \frac{1}{|a|} \sum_{x \in \mathbb{Q}} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

$\square$

4.2 Equation fonctionnelle

Définition 4.2.1 :

Posons les ensembles suivants :

$$\mathcal{H}_1 = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1\}$$

$$\mathcal{X}(\mathbb{A}) = \left\{(f, s) \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}} \times \mathcal{H}_1 \;\middle|\; f\,|\cdot|^s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A}^\times)\right\}$$

Définissons alors la fonction ξ par :

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{X}(\mathbb{A}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, s) &\longmapsto \int_{\mathbb{A}^\times} f(x)\,|x|^s \, d\mu^\times(x) \end{aligned}$$

Nous verrons que la fonction ξ aura un prolongement qui vérifie une certaine équation dite équation fonctionnelle. Pour les fonctions $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A}^\times)$ ayant des propriétés suffisamment bonnes. Ce qui justifie la définition suivante.

Définition 4.2.2 :

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{A})$ posons alors les applications suivantes :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}} \\ x &\longmapsto \left\{ \begin{array}{rccc} g(x) : & \mathbb{A}^\times \times \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a, b) & \longmapsto & f(a(b + x)) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}} \\ x &\longmapsto \left\{ \begin{array}{rccc} h(x) : & \mathbb{A}^\times \times \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a, b) & \longmapsto & \hat{f}(a(b + x)) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Définissons la notion de ξ-fonction par :

$$f \text{ est une } \xi\text{-fonction sur } \mathbb{A}$$

$$\Leftrightarrow$$

1. $\forall K \in \mathscr{P}(\mathbb{A}^\times), K$ compact $\Rightarrow \sum\limits_{x\in\mathbb{Q}} g(x)$ converge uniformément sur $K \times D^+$.
2. $\forall K \in \mathscr{P}(\mathbb{A}^\times), K$ compact $\Rightarrow \sum\limits_{x\in\mathbb{Q}} h(x)$ converge uniformément sur $K \times D^+$.
3. $\forall s \in]1; +\infty[, f\,|\cdot|^s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A})$ et $\hat{f}\,|\cdot|^s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{A}^\times)$.

Et posons alors $\mathcal{Z}(\mathbb{A}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{A}) \mid f \text{est une } \xi\text{-fonction}\}$.

Pour faciliter les notations dans les lemmes qui vont suivre définissons également la fonction suivante.

Définition 4.2.3 :

Définissons la fonction la fonction ψ par :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}(\mathbb{A}) \times \mathcal{H}_1 \times]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, s, t) &\longmapsto \int\limits_{\mathbb{A}^1} f(\phi(t)a)\,|\phi(t)a|^s\,d\nu(a) \end{aligned}$$

Lemme 4.2.4 :

Soit $f, s \in \mathcal{Z}(\mathbb{A}), s \in \mathcal{H}_1$ nous avons alors :

$$\xi(f, s) = \int\limits_{]0;+\infty[} \psi(f, s, t)\,d\lambda^\times(t)$$

Preuve :

Nous avons :

$$\begin{aligned}\xi(f,s) &= \int_{\mathbb{A}} f(a)\,|a|^s\,d\mu^\times(a)\\ &= \int_{]0;+\infty[} \left(\int_{\mathbb{A}^1} f(ta)\,|ta|^s\,d\nu(a)\right) d\lambda^\times(t)\\ &= \int_{]0;+\infty[} \psi(f,s,t)d\lambda^\times(t)\end{aligned}$$

$\square$

Le point clé de cette section est le suivant, il utilise la formule de Poisson.

Lemme 4.2.5 :

Soit $f, \in \mathcal{Z}(\mathbb{A}), s \in \mathcal{H}_1$ et $t \in]0; +\infty[$ nous avons alors :

$$\psi(f,s,t) + f(0)t^s = \psi\left(\hat{f}, 1-s, \frac{1}{t}\right) + \hat{f}(0)t^{s-1}$$

Preuve :

Commençons par remarquer que $\mathbb{A}^1 = \bigsqcup_{x\in\mathbb{Q}^\times} xD^1$, nous pouvons alors calculer :

$$\begin{aligned}\psi(f,s,t) &= \int_{\mathbb{A}^1} f(\phi(t)a)\,|\phi(t)a|^s\,d\nu(a)\\ &= \int_{\bigsqcup_{x\in\mathbb{Q}^\times} xD^1} f(\phi(t)a)\,|\phi(t)a|^s\,d\nu(a)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{Q}^\times}\int_{xD^1} f(\phi(t)a)\,|\phi(t)a|^s\,d\nu(a)\end{aligned}$$

En utilisant le fait que ν est une mesure de Haar et que $\forall x \in \mathbb{Q}^\times, |x| = 1$, en faisant un changement de variables nous avons :

$$\begin{aligned}\psi(f,s,t) &= \sum_{x\in\mathbb{Q}^\times}\int_{D^1} f(x\phi(t)a)\,|x\phi(t)a|^s\,d\nu(a)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{Q}^\times}\int_{D^1} f(x\phi(t)a)\,|\phi(t)a|^s\,d\nu(a)\end{aligned}$$

En utilisant le point 2 de la définition 4.2.2 nous pouvons alors appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir :

$$\psi(f,s,t) = \int_{D^1}\left(\sum_{x\in\mathbb{Q}^\times} f(x\phi(t)a)\right)|\phi(t)a|^s\,d\nu(a)$$

Nous voulons appliquer le théorème de Riemann-Roch, pour cela ajoutons le terme "manquant". Remarquons que les points 2 et 3 de la définition

4.2.2 permettent d'appliquer le théorème nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
&\psi(f,s,t) + \int_{D^1} f(0)\, |\phi(t)a|^s \, d\nu(a) \\
&= \int_{D^1} \left(\sum_{x\in\mathbb{Q}} f(x\phi(t)a) \right) |\phi(t)a|^s \, d\nu(a) \\
&= \int_{D^1} \left(\frac{1}{|\phi(t)a|} \sum_{x\in\mathbb{Q}} \hat{f}\left(\frac{x}{\phi(t)a} \right) \right) |\phi(t)a|^s \, d\nu(a) \\
&= \int_{D^1} \left(\sum_{x\in\mathbb{Q}} \hat{f}\left(\frac{x}{\phi(t)a} \right) \right) |\phi(t)a|^{s-1} \, d\nu(a)
\end{aligned}$$

En faisant un changement de variables et en utilisant que ν est une mesure de Haar nous avons :

$$\begin{aligned}
&\psi(f,s,t) + \int_{D^1} f(0)\, |\phi(t)a|^s \, d\nu(a) \\
&= \int_{D^1} \left(\sum_{x\in\mathbb{Q}} \hat{f}\left(\frac{xa}{\phi(t)} \right) \right) \left| \frac{\phi(t)}{a} \right|^{s-1} d\nu(a) \\
&= \int_{D^1} \left(\sum_{x\in\mathbb{Q}} \hat{f}\left(\frac{xa}{\phi(t)} \right) \right) \left| \frac{a}{\phi(t)} \right|^{1-s} d\nu(a)
\end{aligned}$$

Il nous suffit alors de faire en sens inverse ce qui a été fait au début de la preuve pour trouver le résultat. En effet commençons par remarquer que grâce au point 3 de la définition 4.2.2 nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée qui nous donne alors :

$$\begin{aligned}
&\psi(f,s,t) + \int_{D^1} f(0)\,|\phi(t)a|^s \, d\nu(a) \\
&= \int_{D^1} \left(\sum_{x\in\mathbb{Q}} \hat{f}\left(\frac{xa}{\phi(t)}\right)\right) \left|\frac{a}{\phi(t)}\right|^{1-s} d\nu(a) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Q}} \int_{D^1} \hat{f}\left(\frac{xa}{\phi(t)}\right) \left|\frac{a}{\phi(t)}\right|^{1-s} d\nu(a) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Q}^\times} \int_{D^1} \hat{f}\left(\frac{xa}{\phi(t)}\right) \left|\frac{a}{\phi(t)}\right|^{1-s} d\nu(a) + \int_{D^1} \hat{f}(0) \left|\frac{a}{\phi(t)}\right|^{1-s} d\nu(a)
\end{aligned}$$

Encore une fois en faisant un changement de variable et en utilisant que ν est une mesure de Haar nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{Q}^\times} \int_{D^1} \hat{f}\left(\frac{xa}{\phi(t)}\right) \left|\frac{a}{\phi(t)}\right|^{1-s} d\nu(a) &= \sum_{x\in\mathbb{Q}^\times} \int_{D^1} \hat{f}\left(\frac{xa}{\phi(t)}\right) \left|\frac{xa}{\phi(t)}\right|^{1-s} d\nu(a) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Q}^\times} \int_{xD^1} \hat{f}\left(\frac{a}{\phi(t)}\right) \left|\frac{a}{\phi(t)}\right|^{1-s} d\nu(a) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Q}^\times} \int_{xD^1} \hat{f}\left(a\phi\left(\frac{1}{t}\right)\right) \left|a\phi\left(\frac{1}{t}\right)\right|^{1-s} d\nu(a) \\
&= \int_{\mathbb{A}^1} \hat{f}\left(a\phi\left(\frac{1}{t}\right)\right) \left|a\phi\left(\frac{1}{t}\right)\right|^{1-s} d\nu(a) \\
&= \psi(\hat{f}, 1-s, \frac{1}{t})
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons montré que :

$$\psi(f,s,t)+f(0)\int_{D^1} |\phi(t)a|^s \, d\nu(a) = \psi(\hat{f},1-s,\frac{1}{t})+\hat{f}(0)\int_{D^1} \left|\phi\left(\frac{1}{t}\right)a\right|^{1-s} d\nu(a)$$

Pour conclure il suffit de remarquer que pour $u \in]0;+\infty[$ et $v \in \mathbb{C}$ nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{D^1} |\phi(u)a|^v \, d\nu(a) &= |\phi(u)|^v \int_{D^1} |a|^v \, d\nu(a) \\ &= |u|_\infty^v \int_{D^1} 1 d\nu(a) \\ &= u^v \nu(D^1) = u^v\end{aligned}$$

En appliquant directement ce résultat nous avons :

$$\int_{D^1} |\phi(t)a|^s \, d\nu(a) = t^s$$
$$\int_{D^1} \left|\phi\left(\frac{1}{t}\right)a\right|^{1-s} d\nu(a) = t^{s-1}$$

Ce qui nous permet alors d'obtenir le résultat voulu :

$$\psi(f,s,t) + f(0)t^s = \psi\left(\hat{f}, 1-s, \frac{1}{t}\right) + \hat{f}(0)t^{s-1}$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce document.

Théorème 4.2.6 *(Équation fonctionnelle)* **:**

Soit $f \in \mathcal{Z}(\mathbb{A})$.
Alors $\xi(f,\cdot) \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}_1}$ admet un unique prolongement Ψ_f méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant pour pôles 0 et 1, $\xi(\hat{f},\cdot) \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}_1}$ admet un unique prolongement $\Psi_{\hat{f}}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant pour pôles 0 et 1 et nous avons :

$$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}, \Psi_f(s) = \Psi_{\hat{f}}(1-s)$$
$$\mathrm{Res}(\Psi_f, 0) = -f(0)$$
$$\mathrm{Res}(\Psi_f, 1) = \hat{f}(0)$$

Preuve :

Soit $s \in \mathcal{H}_1$.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\xi(f,s) &= \int_{]0;+\infty[} \psi(f,s,t)d\lambda^\times(t) \\
&= \int_{]0;1[} \psi(f,s,t)d\lambda^\times(t) + \int_{[1;+\infty[} \psi(f,s,t)d\lambda^\times(t)
\end{aligned}$$

En remarquant que $\int_{[1;+\infty[} \psi(f,s,t)d\lambda^\times(t)$ est en fait défini pour $s \in \mathbb{C}$, il suffit d'étudier le terme $\int_{]0;+\infty[} \psi(f,s,t)d\lambda^\times(t)$ pour espérer obtenir une expression prolongeable. Pour $s \in \mathcal{H}_1$ et $t \in]0;+\infty[$ utilisons alors l'identité suivante :

$$\psi(f,s,t) = \psi\left(\hat{f}, 1-s, \frac{1}{t}\right) + \hat{f}(0)t^{s-1} - f(0)t^s$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
&\int_{]0;1[} \psi(f,s,t)d\lambda^\times(t) \\
&= \int_{]0;1[} \left(\psi\left(\hat{f}, 1-s, \frac{1}{t}\right) + \hat{f}(0)t^{s-1} - f(0)t^s\right) d\lambda^\times(t) \\
&= \int_{]0;1[} \left(\psi\left(\hat{f}, 1-s, \frac{1}{t}\right) + \hat{f}(0)t^{s-1}\right) d\lambda^\times(t) - \int_{]0;1[} f(0)t^s d\lambda^\times(t)
\end{aligned}$$

En utilisant alors un changement de variable nous avons alors :

$$\begin{aligned}
&\int_{]0;1[} \left(\psi\left(\hat{f}, 1-s, \frac{1}{t}\right) + \hat{f}(0)t^{s-1}\right) d\lambda^{\times}(t) \\
&= \int_{]1;+\infty[} \left(\psi(\hat{f}, 1-s, t) + \hat{f}(0)\frac{1}{t^{s-1}}\right) d\lambda^{\times}(t) \\
&= \int_{[1;+\infty[} \left(\psi(\hat{f}, 1-s, t) + \hat{f}(0)t^{1-s}\right) d\lambda^{\times}(t)
\end{aligned}$$

Il nous suffit alors de remarquer que nous pouvons calculer les intégrales suivantes.

$$\int_{]0;1[} f(0)t^{s} d\lambda^{\times}(t) = f(0)\int_{]0;1[} f(0)t^{s-1} d\lambda(t) = \frac{f(0)}{s}$$

$$\int_{[1;+\infty[} \hat{f}(0)t^{1-s} d\lambda^{\times}(t) = \int_{[1;+\infty[} \hat{f}(0)t^{-s} d\lambda(t) = \frac{\hat{f}(0)}{s-1}$$

Ainsi nous pouvons alors écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{[1;+\infty[} \left(\psi(\hat{f}, 1-s, t) + \hat{f}(0)t^{1-s}\right) d\lambda^{\times}(t) \\
&= \int_{[1;+\infty[} \psi(\hat{f}, 1-s, t) d\lambda^{\times}(t) + \frac{\hat{f}(0)}{s-1}
\end{aligned}$$

Et nous obtenons alors l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
&\int_{]0;1[} \psi(f, s, t) d\lambda^{\times}(t) \\
&= \int_{[1;+\infty[} \psi(\hat{f}, 1-s, t) d\lambda^{\times}(t) + \frac{\hat{f}(0)}{s-1} - \frac{f(0)}{s}
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons une autre écriture de $\xi(f,s)$:

$$\xi(f,s) = \int\limits_{[1;+\infty[} \psi(f,s,t)d\lambda^{\times}(t) + \int\limits_{[1;+\infty[} \psi(\hat{f},1-s,t)d\lambda^{\times}(t) + \frac{\hat{f}(0)}{s-1} - \frac{f(0)}{s}$$

Cette égalité a été établie que pour $s \in \mathcal{H}_1$ mais nous allons voir que nous allons pouvoir la prolonger. Commençons par remarquer que :

$$f \in \mathcal{Z}(\mathbb{A}) \Rightarrow \int\limits_{[1;+\infty[} \psi(\hat{f},1-s,t)d\lambda^{\times}(t) \text{ est définie pour } s \in \mathbb{C}$$

Ainsi pour $f \in \mathcal{Z}(\mathbb{A})$ nous pouvons alors définir le prolongement Γ_f par :

$$\begin{aligned} \Psi_f : \mathbb{C}\setminus\{0,1\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \begin{cases} \int\limits_{[1;+\infty[} \psi(f,s,t)d\lambda^{\times}(t)+ \\ \int\limits_{[1;+\infty[} \psi(\hat{f},1-s,t)d\lambda^{\times}(t)+ \\ \frac{\hat{f}(0)}{s-1} - \frac{f(0)}{s} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que Ψ_f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, et est méromorphe sur $\mathbb{C}$ par définition de résidus d'une fonction méromorphe nous avons directement :

$$\mathrm{Res}(\Psi_f,0) = -f(0)$$
$$\mathrm{Res}(\Psi_f,1) = \hat{f}(0)$$

Enfin par un calcul direct et très simple nous obtenons alors l'équation fonctionnelle. Pour $f \in \mathcal{Z}(\mathbb{A})$ et $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ nous avons :

$$\Psi_{\hat{f}}(1-s) = \Psi_f(s)$$

Ce qui conclut alors cette preuve.

$\square$

4.3 Lien avec la fonction Zêta de Riemann

Dans cette section nous allons voir les arguments généraux de comment a partir de l'équation fonctionnelle obtenir un prolongement de la fonction zêta de Riemann. Pour établir celle ci rigoureusement de nombreux résultats sont nécessaires, nous allons donc pas donner de preuve et plutôt essayer de comprendre l'idée de la preuve. Cependant les points les plus délicats de la preuve ont été démontrés ci dessus. Pour le lecteur souhaitant voir la preuves de ces résultats ils sont détaillés dans le livre [3] et dans ce livre il y a également la preuve classique de l'équation fonctionnelle.

La fonction zêta est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{aligned}$$

Nous souhaitons prolonger cette fonction sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Ceci peut être fait en utilisant l'analyse complexe classique mais également en utilisant le formalise que nous avons développé. Commençons par remarquer que nous pouvons montrer que pour $s \in \mathcal{H}_1$, ζ a également l'expression suivante :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Pour appliquer le théorème de l'équation fonctionnelle il nous faut trouver une bonne fonction $f \in \mathcal{Z}(\mathbb{A})$, nous verrons que la bonne fonction a considérer est la suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto e^{-\pi a(\infty)^2} \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(a(p)) \end{aligned}$$

Cette fonction est bien définie car le produit est en fait fini, de plus f est une fonction produit sur $\mathbb{A}$. En utilisant le théorème 3.4.6 nous pouvons montrer que $\hat{f} = f$ et que f est une ξ-fonction. Nous pouvons alors appliquer le théorème de l'équation fonctionnelle 4.2.6 pour obtenir un prolongement de $\xi(f, .)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Il faudrait alors relier $\xi(f, .)$ à ζ, pour faire ceci nous pouvons alors encore une fois utiliser le théorème 3.4.6 ainsi que la proposition

2.5.7 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\xi(f,s) &= \int_{\mathbb{A}^\times} f(x)\,|x|^s\,d\mu^\times(x) \\
&= \int_{\mathbb{A}^\times} e^{-\pi x(\infty)^2}\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x(p))\right)|x|^s\,d\mu^\times(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x(\infty)^2}\,|x|_\infty^s\,d\lambda^\times(x)\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x)\,|x|_p^s\,d\mu_p(x)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x(\infty)^2}\,|x|_\infty^s\,d\lambda^\times(x)\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\xi^p_{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}}(s)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x(\infty)^2}\,|x|_\infty^s\,d\lambda^\times(x)\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}\right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x(\infty)^2}\,|x|_\infty^s\,d\lambda^\times(x)\right)\zeta(s)
\end{aligned}$$

Il nous manque juste une expression plus agréable de $\int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x(\infty)^2}\,|x|_\infty^s\,d\lambda^\times(x)$, il est en fait possible de montrer que nous avons l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x(\infty)^2}\,|x|_\infty^s\,d\lambda^\times(x) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$$

Le lecteur curieux pourra aller voir la preuve qui est donnée dans le chapitre 15 de [4]. Ainsi nous obtenons

$$\xi(f,s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

f étant une ξ-fonction nous pouvons alors appliquer le théorème de l'équation fonctionnelle 4.2.6, nous savons alors que $\xi(f,\cdot)$ admet un prolongement Ψ_f méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $\xi(\hat{f},\cdot)$ admet un prolongement méromorphe $\Psi_{\hat{f}}$ tel que :

$$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\,, \Psi_f(1-s) = \Psi_{\hat{f}}(1-s) = \Psi_f(s)$$

Nous pouvons également montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \Gamma(z) \neq 0$ ainsi nous pouvons poser la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \xi(f,s) \end{aligned}$$

Cette fonction est un prolongement méromorphe de la fonction ζ qui a des pôles en 0 et 1. Nous avons donc grâce au formalisme adélique réussi à montrer que la fonction ζ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. De plus nous avons explication un peu plus intuitive d'où provient le terme $\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}$, comme nous avons pu le voir ce terme provient de la partie ∞ de f. La preuve non adélique qui montre que $\pi^{-\frac{\cdot}{2}}\Gamma(\frac{\cdot}{2})\zeta(\cdot)$ est prolongeable et vérifie l'équation fonctionnelle utilise des arguments moins naturels ce qui la rend moins facile a comprendre lorsque l'on connaît le formalisme adélique. Alors que avec le formalisme adélique les notions utilisés dans la preuves sont toutes liées ce qui change est le corps $\mathbb{Q}_p$ dans les lesquels nous les regardons ce qui aide a la compréhension de la preuve.

Conclusion

Nous avons faits beaucoup d'efforts pour définir l'anneau $\mathbb{A}$ ainsi que sa structure, mais nous avons pu montrer le théorème 3.4.6 qui permet d'établir l'équation fonctionnelle de ζ en utilisant des arguments qui sont assez naturels. Nous pouvons alors demander si nous avions gagné quelque chose de plus avec ces efforts supplémentaires. En effet nous avons la satisfaction d'avoir pu établir cette équation fonctionnelle de manière plus naturelle mais formellement parlant avons nous gagné quelque chose ? Si notre but était uniquement de prolonger la fonction ζ dans ce cas nous pouvons considérer que nous avons faits beaucoup d'efforts pour pas grand chose. Cependant lorsque nous regardons le contenu du théorème 3.4.6 nous voyons qu'il offre un moyen de prolonger de nombreuses fonctions et non pas seulement la fonction ζ. De plus nous nous sommes placés dans un cas particulier, en remarquant que $|\cdot|_p^s$ est un morphisme de $\mathbb{Q}_p^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$ nous pouvons imaginer que nous pouvons remplacer dans notre raisonnement $|\cdot|_p^s$ par un morphisme quelconque de $\mathbb{Q}_p^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$, c'est ce que nous appelons un quasi-caractère. C'est ce qui est fait dans la thèse de Tate. Mais ceci n'a pas été fait ici car cela utilise la dualité de Pontryagin sur les groupes localement compacts qui est un résultat non trivial. De plus nous sommes restreints au corps $\mathbb{Q}$ alors que nous aurions pu procéder de même avec certains corps plus généraux ce qui fait dans la thèse de Tate. Mais a nouveau cela impliquerait que nous serions obligés d'utiliser des résultats non triviaux même si ceux-ci servent uniquement a régler des détails techniques, dans le cas général il n'a pas de nouvelle idée majeur. Un exemple concret de ce que la thèse de Tate permet de faire est de pouvoir prolonger les fonctions L de Dirichlet. Les fonctions L de Drichlet étant une généralisation de la fonction de ζ, pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 1$ et χ un caractère nous pouvons définir :

$$L(s, \chi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Nous pouvons également remarquer que les arguments intervenant dans la preuve du théorème de l'équation fonctionnelle 4.2.6 sont presque identiques a ceux de preuve classique établie par Riemann, le point essentiel étant la formule de Poisson. Donc bien que nous avons introduits des objets assez sophistiqués nous n'avons pas vraiment changé l'idée générale de la preuve. De plus nous avons pu éclaircir certains points comme par exemple d'où vient le facteur $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

Ce que je retiendrai est que parfois pour généraliser quelque chose il faut essayer de bien comprendre les arguments exposés dans le cas particulier et voir si il y en a qui peuvent être plus généraux que ce que l'on croit.

Bibliographie

[1] Dorian Goldfeld and Joseph Hundley. *Automorphic Representations and L-Functions for the General Linear Group : Volume 1*, volume 129. Cambridge University Press, 2011.

[2] Neal Koblitz. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, volume 58. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Hugh L Montgomery and Robert C Vaughan. *Multiplicative number theory I : Classical theory.* Number 97. Cambridge university press, 2007.

[4] Gilles Pages and Marc Briane. *Analyse-Théorie de l'intégration : Convolution et transformée de Fourier.* De Boeck Superieur, 2018.

[5] Hervé Queffélec. *Topologie-6e éd. : Cours et exercices corrigés.* Dunod, 2020.

[6] Dinakar Ramakrishnan and Robert J Valenza. *Fourier analysis on number fields*, volume 186. Springer Science & Business Media, 2013.

[7] John Torrence Tate Jr. *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions.* PhD thesis, Princeton University, 1997.