

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON



Rapport de stage - L3 Mathématiques

Charles Baffour

30 juillet 2023

Codage des géodésiques orientées de $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$

Encadré par Didier Lesesvre
Université de Lille

Table des matières

Introduction	1
1 Géométrie hyperbolique	1
1.1 Distance hyperbolique et géodésiques	1
1.2 Classification des éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$	4
2 Groupes Fuchsien	5
2.1 Une propriété des groupes Fuchsien	5
2.2 Domaine fondamental	5
3 Codages des géodésiques	7
3.1 Codage géométrique	8
3.2 Codage arithmétique	9
4 Lien entre les deux codages	11
4.1 Matrices réduites et totalement \mathcal{D} -réduite	11
4.2 Coïncidence des deux codages	13
4.3 Deux exemples	14

Remerciements

Avant de commencer ce rapport, je tiens à remercier mon encadrant Didier Lesesvre, qui m'a accompagné tout au long de ce stage, qui m'a aidé pour la rédaction de ce rapport, et qui surtout m'a permis de me plonger dans des domaines des mathématiques que je ne connaissais qu'un petit peu, notamment la géométrie non-euclidienne et la théorie des nombres. Je tiens également à remercier toute l'équipe du laboratoire Paul Painlevé, et notamment l'unité *Arithmétique et Géométrie Algébrique*, pour les différents séminaires auxquels j'ai pu assister. Enfin, je remercie les autres stagiaires présents au laboratoire avec qui j'ai pu beaucoup échanger et travailler dans le cadre d'un groupe de lecture.

Références

- [1] Svetlana KATOK. *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [2] Anton DEITMAR. *Automorphic forms*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Svetlana KATOK. "Coding of closed geodesics after Gauss and Morse". In : *Geometriae Dedicata* 63.2 (1996), p. 123-145.
- [4] Françoise DAL'BO. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. EDP sciences, 2007.

Introduction

En géométrie hyperbolique, les chemins de plus courtes distances, appelés géodésiques, ne sont pas les droites de la géométrie euclidienne. Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, ce sont soit des lignes droites verticales, soit des arcs de cercle orthogonaux à l'axe réel. Le but de ce rapport est de décrire certaines géodésiques particulières de \mathbb{H} , où $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ représente le demi-plan de Poincaré.

Les géodésiques que nous allons étudier seront celles associées aux matrices de $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{I_2, -I_2\}$ à partir de leur action sur \mathbb{H} . Nous verrons que ces géodésiques sont toutes des arcs de cercle que l'on orientera. Plus précisément, nous allons étudier des classes d'équivalence de géodésiques, les classes d'équivalence correspondant aux orbites de l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$. C'est pour cela qu'on parle de géodésiques orientées de $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$.

Nous allons coder ces géodésiques de deux manières différentes. Un premier codage sera de nature géométrique, en fonction des régions du plan que la géodésique traverse. Le deuxième sera arithmétique, en fonction des points d'intersection de la géodésique avec la droite réelle. Enfin, nous examinerons la relation entre ces deux codages.

1 Géométrie hyperbolique

1.1 Distance hyperbolique et géodésiques

Commençons tout d'abord avec quelques notions de géométrie hyperbolique. Dans tout ce texte, nous nous plaçons dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$, que l'on munit d'une distance dite "hyperbolique".

Définition 1.1. Soit $\gamma : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H} \\ t \longmapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \end{cases}$ une application dérivable par morceaux (on dit que γ est un chemin sur \mathbb{H}). On définit la *longueur hyperbolique* de γ par :

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt.$$

Définition 1.2. On définit la *distance hyperbolique* entre deux points z et w de \mathbb{H} par

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma)$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des chemins $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ telles que $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = w$. L'application ρ réalise bien une distance sur \mathbb{H} .

On introduit le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels et de déterminant 1.

On introduit également l'ensemble $PSL_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc = 1 \right\}$, où $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Si $T \in PSL_2(\mathbb{R})$, on a $T(\infty) = \frac{a}{c}$ et $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ si $c \neq 0$. On obtient un isomorphisme de groupes $PSL_2(\mathbb{R}) \cong SL_2(\mathbb{R})/\{I_2, -I_2\}$. Dans la suite, on confondra souvent une application de la forme $z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$ avec la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Remarque. Toutes les fonctions de la forme $z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$ avec $ad - bc > 0$ sont dans $PSL_2(\mathbb{R})$.

Theorème 1.3. $PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur \mathbb{H} par homéomorphismes.

Démonstration. Soient $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$. On a :

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

De plus, $ad - bc = 1$ donc

$$Im(T(z)) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2} > 0.$$

Donc $Tz \in \mathbb{H}$. De plus, T est bien continue, d'inverse dans $PSL_2(\mathbb{R})$. T est donc bien un homéomorphisme de \mathbb{H} dans \mathbb{H} . \square

Theorème 1.4. Les éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$ sont des isométries pour \mathbb{H} muni de la distance hyperboliques.

Remarque. Ces applications sont les isométries de \mathbb{H} dites "directes". Les isométries dites "indirectes" sont les applications de la même forme mais dont le déterminant est -1 . Ces deux types d'isométries constituent toutes les isométries de \mathbb{H} muni de la distance hyperbolique.

Démonstration. Soient $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ un chemin, et $T \in PSL_2(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$.

$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ donc T est holomorphe sur \mathbb{H} et

$$T'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

De plus, $Im(T(z)) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2}$ donc $|T'(z)| = \frac{Im(T(z))}{Im(z)}$.

De plus, $(T \circ \gamma)'(t) = T'(\gamma(t))\gamma'(t)$, donc $|(T \circ \gamma)'(t)| = \frac{Im(T \circ \gamma(t))}{Im(\gamma(t))} |\gamma'(t)|$. On a donc

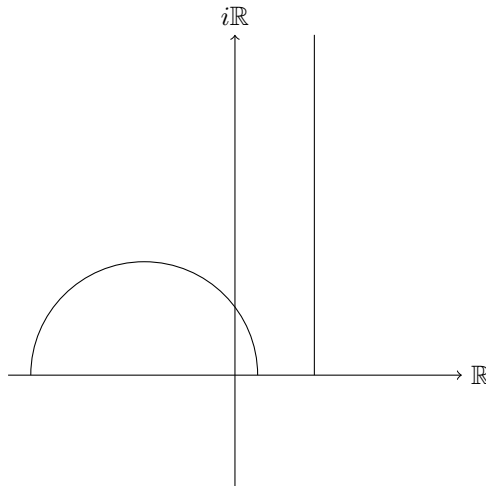
$$\begin{aligned} h(T(\gamma)) &= \int_0^1 \frac{|T \circ \gamma'(t)|}{Im T \circ \gamma(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{Im \gamma(t)} dt \\ &= h(\gamma). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $z, w \in \mathbb{H}$, $\rho(z, w) \geq \rho(Tz, Tw)$. En faisant le même raisonnement avec T^{-1} , on obtient l'égalité voulue. \square

Finalement, intéressons-nous aux géodésiques de \mathbb{H} .

Définition 1.5. Une *géodésique* est un chemin de \mathbb{H} réalisant la distance hyperbolique entre deux points.

Theorème 1.6. Les géodésiques dans \mathbb{H} sont les demi-cercles et les droites orthogonales à l'axe \mathbb{R} .



Démonstration. Soit $z, w \in \mathbb{H}$. Supposons tout d'abord $z = ia$ et $w = ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ un chemin reliant z et w . On note $\gamma = x + iy$. On a alors :

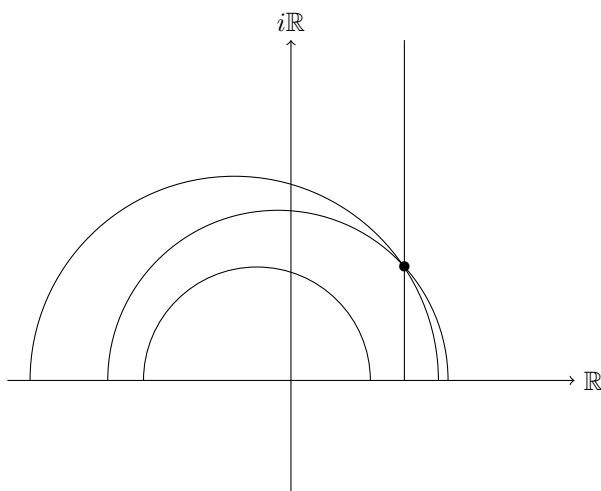
$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \\ &= \ln \left(\frac{a}{b} \right). \end{aligned}$$

Dans ce calcul, la première inégalité est une égalité si et seulement si $x' = 0$, ie x est constante, et la deuxième inégalité est une égalité si et seulement si y' est toujours positive. Les géodésiques reliant z et w sont donc exactement les chemins de la forme $\gamma \circ f$ où $\gamma(t) = (1-t)ia + tib$ et $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une application croissante avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Tous ces chemins correspondent à la droite reliant z et w , droite orthogonale à la droite réelle.

On ne fait maintenant plus de suppositions sur z et w . On note L l'unique cercle euclidien ou droite verticale passant par z et w . Il existe alors $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ telle que $T(L) = i\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. En effet, notons α et β les points d'intersection de L avec $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec $\alpha < \beta$, de sorte que $\beta = \infty$ si et seulement L est une droite verticale. On considère alors l'application $T : z \mapsto -\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha}$, où $\frac{1}{\beta-\alpha} = 0$ si $\beta = \infty$. On vérifie aisément que $T \in PSL_2(\mathbb{R})$. Un calcul simple permet alors de montrer qu'on a bien $T(L) = i\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

La géodésique γ joignant $T(z)$ et $T(w)$ est alors une droite sur $i\mathbb{R}$. De plus, $h(T^{-1}(\gamma)) = h(\gamma)$. La géodésique entre z et w est donc le segment de L rejoignant les deux points. \square

Remarque. Le cinquième axiome d'Euclide n'est pas vérifié. En effet, si on considère un point en dehors d'une géodésique γ donnée, il existe une infinité de géodésiques passant par ce point et ne croisant pas γ . La géométrie hyperbolique est bien non-euclidienne.



Proposition 1.7. Si γ est une géodésique et $T \in PSL_2(\mathbb{R})$, alors $T\gamma$ est encore une géodésique.

Démonstration. Pour $z, w \in \mathbb{H}$, on note $[z, w]$ le segment géodésique reliant z et w , de sorte que $\rho(z, w) = h([z, w])$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{H}$, on a l'équivalence

$$\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w) \Leftrightarrow \xi \in [z, w].$$

Donc, si $T \in PSL_2(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} T\xi \in [Tz, Tw] &\Leftrightarrow \rho(Tz, Tw) = \rho(Tz, T\xi) + \rho(T\xi, Tw) \\ &\Leftrightarrow \rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w) \\ &\Leftrightarrow \xi \in [z, w]. \end{aligned}$$

\square

1.2 Classification des éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$

Nous allons maintenant étudier plus en détail le rapport entre géodésiques et matrices de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Définition 1.8. Soit $T \in PSL_2(\mathbb{R})$. On note g un de ses représentants dans $SL_2(\mathbb{R})$. On définit la *trace* de T par $Tr(T) = |Tr(g)|$.

On va caractériser les matrices de $PSL_2(\mathbb{R})$ en fonction de leurs points fixes et de leurs traces.

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ et $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} Tz = z &\Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z \\ &\Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est $D = (d - a)^2 + 4bc = Tr(T)^2 - 4$. On en déduit la caractérisation suivante :

- Si $Tr(T) < 2$, T a exactement deux points fixes dans $\widehat{\mathbb{C}}$ dont un dans \mathbb{H} . On dit que T est *elliptique*.
- Si $Tr(T) = 2$, T a exactement un point fixe dans $\widehat{\mathbb{C}}$ qui est dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On dit que T est *parabolique*.
- Si $Tr(T) > 2$, T a exactement deux points fixes dans $\widehat{\mathbb{C}}$, qui sont dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On dit que T est *hyperbolique*.

Intéressons-nous aux matrices hyperboliques. Si A est une telle matrice, elle a deux points fixes dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Un de ses points fixes, notons-le w , vérifie $A'(w) < 1$ et on a alors, pour tout $z \in \mathbb{H}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n(z) = w$. Son deuxième point fixe, que l'on note u , vérifie $A'(u) > 1$ et est alors dit répulsif.

De plus, les matrices hyperboliques ayant deux points fixes distincts dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on peut leur associer une géodésique reliant ces deux points. On définit ainsi l'axe d'une matrice hyperbolique :

Définition 1.9. Soit $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ hyperbolique. On définit l'*axe* de T , noté $C(T)$, comme étant la géodésique de \mathbb{H} joignant les points fixes de T .

La géodésique $C(T)$ est orientée du point fixe répulsif de T vers son point fixe attractif.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur les géodésiques qui sont des axes de matrices hyperboliques du sous-groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 1.10. T induit une bijection de son axe sur lui-même.

Démonstration. Soient u et v les points fixes de T , et soit γ l'axe de T . $T\gamma$ est une géodésique qui intersecte la droite réelle en $Tu = u$ et $Tv = v$. Donc $T\gamma = \gamma$. \square

2 Groupes Fuchsien

Le but de notre étude est d'étudier les géodésiques associées aux matrices de $PSL_2(\mathbb{Z})$, un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$. Nous allons donc rapidement étudier certaines propriétés des sous-groupes discrets de $PSL_2(\mathbb{R})$, appelés groupes Fuchsien.

2.1 Une propriété des groupes Fuchsien

Les résultats de cette partie sont utiles pour la partie 2.2, mais sont un peu fastidieux à démontrer et ne sont pas au cœur du codage des géodésiques, donc je les admet dans ce rapport. On peut en trouver des démonstrations dans [1].

Définition 2.1. Un *groupe Fuchsien* est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Définition 2.2. On dit qu'un groupe G agit *proprement discontinument* sur un espace métrique X si pour tout $x \in X$, la G -orbite de x est localement finie, i.e. pour tout $K \subset X$ compact, $g(x) \in K$ pour un nombre au plus fini de g .

G agit donc proprement discontinument sur X si chaque orbite est discrète et si le stabilisateur de tout point est fini.

Lemme 2.3. Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ agissant proprement discontinument sur \mathbb{H} , et soit p un point fixe d'un élément de Γ . Il existe alors un voisinage W de p tel que aucun autre point de W est point fixe d'un élément de $\Gamma \setminus \{I_2\}$.

Theorème 2.4. Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\Gamma \text{ est un groupe Fuchsien} \iff \Gamma \text{ agit proprement discontinument sur } \mathbb{H}.$$

Corollaire 2.5. Soit Γ un sous groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Γ est Fuchsien si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{H}$, Γz est discret.

2.2 Domaine fondamental

La notion de domaine fondamental va nous être cruciale quand nous introduirons le codage géométrique des géodésiques.

Définition 2.6. Soit X un espace métrique et G un groupe d'homéomorphismes agissant sur X proprement discontinument. Un domaine fermé $F \subset X$ est dit *fondamental* pour G si :

- $\bigcup_{T \in G} T(F) = X$ (ie $\forall x \in X, \exists T \in G, \exists y \in F, T(y) = x$),
- $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \emptyset$ pour tout $T \in G \setminus \{Id\}$ (ie $\forall y \in \mathring{F}, T(y) \notin \mathring{F}$).

Définition 2.7. Soit Γ un groupe Fuchsien et $p \in \mathbb{H}$ tel que p n'est point fixe d'aucun élément de Γ autre que l'identité (un tel p existe d'après le lemme 2.3). On définit le *domaine de Dirichlet* pour Γ centré en p par $D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p)) \text{ pour tout } T \in \Gamma\}$.

Pour $T \in \Gamma$, on introduit $H_p(T) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p))\}$. On a alors $D_p(\Gamma) = \bigcap_{T \in \Gamma \setminus Id} H_p(T)$. $D_p(\Gamma)$ est donc fermé en tant qu'intersection de fermés.

Theorème 2.8. Si p n'est fixé par aucun élément de $\Gamma \setminus \{Id\}$, alors $D_p(\Gamma)$ est un domaine fondamental pour Γ .

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{H}$ et Γz sa Γ -orbite. Γz est discret (corollaire 2.5) donc il existe $z_0 \in \Gamma z$ tel que $\rho(z_0, p) = \min_{w \in \Gamma z} \rho(w, p)$. On a donc, pour tout $T \in \Gamma$, $\rho(z_0, p) \leq \rho(T(z), p)$. Donc $z_0 \in D_p(\Gamma)$. Toutes les orbites ont donc au moins un point dans $D_p(\Gamma)$, ce qui montre le premier point de la définition de domaine fondamental.

Montrons maintenant que, si z_1 et z_2 sont dans $D_p(\Gamma)$, alors z_1 et z_2 ne sont pas dans la même orbite. Pour tout $z \in \mathbb{H}$, si $\rho(z, p) = \rho(T(z), p)$ pour un certain $T \in \Gamma$, alors $\rho(z, p) = \rho(z, T^{-1}(p))$, et donc $z \in L_p(T^{-1})$ (où $L_p(T^{-1})$ est la frontière de $H_p(T^{-1})$). On a donc $z \in \partial D_p(\Gamma)$ ou $z \notin D_p(\Gamma)$. On en déduit :

$$z \in D_p(\Gamma) \Rightarrow \forall T \in \Gamma \setminus \{Id\} \quad \rho(z, p) < \rho(T(z), p).$$

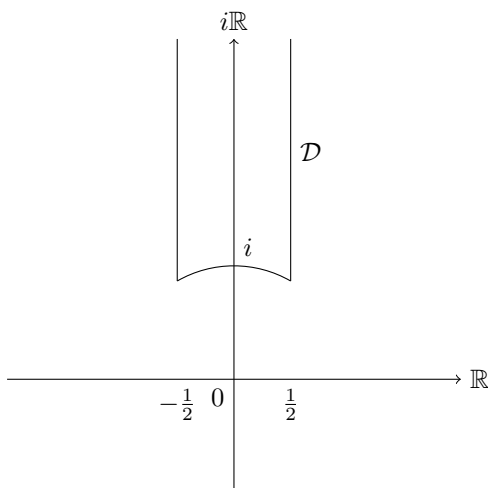
On en déduit que, si $z_1, z_2 \in D_p(\Gamma)$ sont dans la même orbite, on a $\rho(z_1, p) < \rho(z_2, p)$ et $\rho(z_2, p) < \rho(z_1, p)$, ce qui est impossible. \square

Étudions le cas $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$.

Si $k > 1$, le point ik n'est fixé par aucun élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$. On peut donc considérer $D_p(PSL_2(\mathbb{Z}))$ avec $p = ik$.

On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \mapsto z + 1$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : z \mapsto -\frac{1}{z} \in PSL_2(\mathbb{Z})$.

Posons $\mathcal{D} = D_p(\langle T, S \rangle) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1 \text{ et } |Re(z)| < \frac{1}{2}\}$.



Proposition 2.9. $D_p(PSL_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{D}$.

Démonstration. On a clairement $D_p(PSL_2(\mathbb{Z})) \subset \mathcal{D}$.

Supposons $D_p(PSL_2(\mathbb{Z})) \neq \mathcal{D}$. \mathcal{D} étant un domaine fondamental pour un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$, on a $\bigcup_{A \in PSL_2(\mathbb{Z})} A(\mathcal{D}) = \mathbb{H}$. Or \mathcal{D} n'est pas un groupe fondamental pour $PSL_2(\mathbb{Z})$ d'après notre supposition. Il existe

donc $z \in \mathring{\mathcal{D}}$ et $h \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tels que $h(z) \in \mathring{\mathcal{D}}$.

On a, pour tout $u \in \mathbb{H}$, $h(u) = \frac{au + b}{cu + d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $ad - bc = 1$. De plus, $Im(h(u)) = \frac{Im(u)}{|cu + d|^2}$ pour tout u .

$z \in \mathring{\mathcal{D}}$, donc $|z| > 1$ et $Re(z) > \frac{1}{2}$, ce qui nous permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$|cz + d|^2 = c^2|z|^2 + 2Re(z)cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd|.$$

On a $(|c| - |d|)^2 + |cd| \in \mathbb{N}$ et cette quantité n'est nul que si $c = d = 0$, ce qui n'arrive jamais car $ad - bc = 1$. On en déduit que $(|c| - |d|)^2 + |cd| \geq 1$ et donc $|cz + d| > 1$.

On en déduit $Im(h(z)) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2} < Im(z)$.

Or $h(z) \in \mathring{\mathcal{D}}$ donc on peut appliquer le même raisonnement avec $h(z)$ et la fonction h^{-1} . On obtient alors $Im(z) < Im(h(z))$, ce qui est impossible. Un tel z n'existe pas, et donc $D_p(PSL_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{D}$. \square

On a donc $\mathcal{D} = D_p(PSL_2(\mathbb{Z})) = D_p(\langle T, S \rangle)$. On en déduit le corollaire important suivant :

Corollaire 2.10. *$PSL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par T et S .*

On a besoin du lemme suivant pour démontrer le corollaire :

Lemme 2.11. *Si $z, w \in \mathcal{D}$ sont distincts et dans la même orbite, alors z et w sont tous deux dans $\partial\mathcal{D}$.*

On va admettre ce lemme. La preuve n'est pas spécialement difficile mais est un peu fastidieuse (on considère un élément z dans le bord de \mathcal{D} et, en fonction du côté où il se trouve, on montre que Az ne peut pas être dans l'intérieur de \mathcal{D}). Elle est détaillée dans [2].

Démonstration du corollaire. Soit $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$. On a vu qu'il existe $z \in \mathring{\mathcal{D}}$ tel que z n'est point fixe d'aucun élément de $PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \{Id\}$. En particulier, $Az \neq z$. D'après le lemme, z est le seul élément de son orbite dans \mathcal{D} . Donc $Az \notin \mathcal{D}$. \mathcal{D} étant aussi un domaine fondamental pour $\langle T, S \rangle$, il existe $B \in \langle T, S \rangle$ tel que $BAz \in \mathcal{D}$. Mais alors z et BAz sont dans \mathcal{D} et sont dans la même orbite, donc $BAz = z$ et z n'est point fixe que de l'identité. On obtient donc $BA = Id$, d'où $A = B^{-1}$ est engendrée par T et S . □

3 Codages des géodésiques

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour aborder le codage des géodésiques. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous allons nous intéresser aux géodésiques qui sont l'axe d'une matrice de $PSL_2(\mathbb{Z})$. Plus précisément, nous nous intéressons à ces géodésiques dans le quotient $PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$. De plus, les géodésiques seront toujours orientées du point fixe répulsif vers le point fixe attractif.

Lemme 3.1. *Deux matrices de $PSL_2(\mathbb{Z})$ ayant les mêmes points fixes sont puissances d'une même matrice primitive, ie une matrice qui n'est pas puissance d'une autre matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Notons ces deux matrices A_1 et A_2 . Par conjugaison par $PSL_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que les deux points fixes de A_1 et A_2 sont 0 et ∞ (comme dans la démonstration du théorème 1.6).

L'ensemble des matrices fixant 0 et ∞ , ie les matrices de la forme $z \mapsto \mu z$ avec $\mu > 0$, est un groupe isomorphe à (\mathbb{R}_+^*, \times) , lui-même isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ dont les sous-groupes discrets sont monogènes. γ_1 et γ_2 sont donc dans le même sous-groupe discret de (\mathbb{R}_+^*, \times) , donc elles sont puissances d'une même matrice primitive, le générateur du sous-groupe. □

Proposition 3.2. *Deux matrices primitives de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si leurs axes représentent la même classe d'équivalence dans $PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$.*

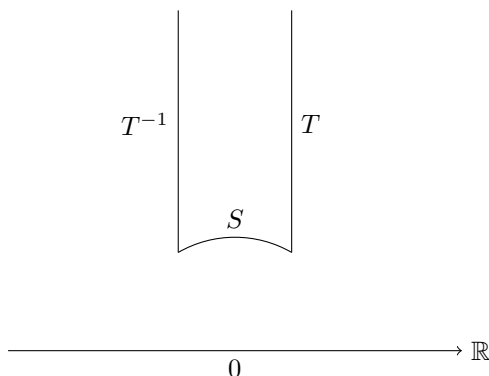
Démonstration. Soit $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$, γ son axe et $\mu \in SL_2(\mathbb{Z})$. Notons w et u les points fixes respectivement attractifs et répulsifs de A . γ part de w et arrive au point u . Les points fixes de $\mu A \mu^{-1}$ sont μw (attractif) et μu (répulsif). Son axe est donc la géodésique $\mu \gamma$, qui représente la même classe d'équivalence que γ dans $PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$.

Inversement, supposons que γ_1 , axe de A_1 , et γ_2 , axe de A_2 , représentent la même classe d'équivalence dans $PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$. On suppose que A_1 et A_2 sont primitives. Il existe $\mu \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma_1 = \mu \gamma_2$. Si γ_2 va de w à u , alors γ_1 va de μw à μu . $\mu^{-1} A_1 \mu$ et A_2 ont donc les mêmes points fixes. D'après le lemme, on obtient $A_2 = \mu^{-1} A_1 \mu$ ou $A_2^{-1} = \mu^{-1} A_1 \mu$. w étant attractif pour $\mu^{-1} A_1 \mu$ et A_2 , on a bien $A_2 = \mu^{-1} A_1 \mu$. □

Nos codages seront donc invariants par conjugaison par $SL_2(\mathbb{Z})$. Cette construction est due à Katok dans [3].

3.1 Codage géométrique

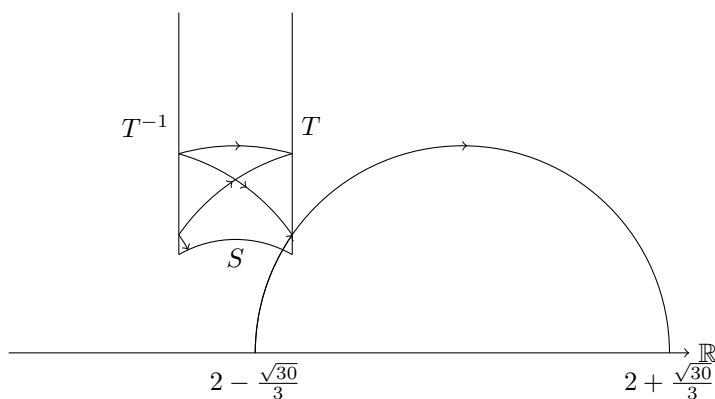
Le codage géométrique correspond aux domaines du plan traversés par la géodésique. Plus précisément, on considère le domaine de Dirichlet \mathcal{D} de $PSL_2(\mathbb{Z})$, et l'on nomme ses côtés comme suit :



On note notre géodésique γ , et la matrice dont elle est l'axe A . Considérons tout d'abord que la géodésique admet un point dans \mathcal{D} . On part de ce point, et on suit la géodésique vers son point attractif.

Lorsque l'on croise un côté de \mathcal{D} , disons le côté $\mu (= T, T^{-1}$ ou S), on conjugue A par μ^{-1} (ie on considère maintenant la matrice $\mu^{-1}A\mu$, d'axe $\mu^{-1}\gamma$), de sorte à rester dans \mathcal{D} en continuant de parcourir la géodésique.

Pour l'axe de la matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, de points fixes $2 + \frac{\sqrt{30}}{3}$ et $2 - \frac{\sqrt{30}}{3}$, le début du processus est le suivant, où le point de départ est un point quelconque de la géodésique dans l'intérieur de \mathcal{D} :



Le codage géométrique s'appuie sur les côtés rencontrés par la géodésiques. Le codage se fait ainsi : lorsque la géodésique croise le côté μ , on ajoute μ au code de la géodésique.

Pour la géodésique précédente, le début du code est donc (T, T, T, T, S, \dots) .

Proposition 3.3. *Le code géométrique d'un élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est périodique.*

Démonstration. Soient $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$ et γ son axe. On suppose que γ traverse \mathcal{D} . Supposons de plus que γ traverse la zone $\mu(\mathcal{D})$ entre \mathcal{D} et son point fixe attractif, où $\mu \in PSL_2(\mathbb{Z})$, c'est à dire que, lorsque l'on parcourt la géodésique à partir de \mathcal{D} , on passe par $\mu(\mathcal{D})$. La géodésique $\mu^{-1}\gamma$, axe de $\mu^{-1}A\mu$, traverse donc \mathcal{D} . Donc, en réalisant notre codage géométrique, on rencontre à un moment l'axe de $\mu^{-1}A\mu$.

γ traverse \mathcal{D} . De plus, A réalise une bijection sur son axe, donc, si $z \in \mathcal{D}$ appartient à γ , Az appartient toujours à γ et est dans $A(\mathcal{D})$. Donc γ passe par $A(\mathcal{D})$. D'après ce qui précède, on rencontre donc la matrice $A^{-1}AA = A$ au cours du codage géométrique (après que γ soit sortie de \mathcal{D} une première fois). Au bout d'un moment, on retombe donc sur le même axe : le code géométrique est donc bien périodique. \square

Ainsi, on peut introduire la plus petite période d'un code géométrique. Si $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$ a son axe qui passe par \mathcal{D} , et que l'axe de $\mu^{-1}A\mu$ passe également par \mathcal{D} , où $\mu = S, T$ ou T^{-1} , alors la période du code de $\mu^{-1}A\mu$ est égale à la période du code de A à permutation cyclique près. On en déduit que le codage géométrique est invariant par conjugaison, à permutation cyclique près. Pour une matrice dont l'axe ne passe pas par \mathcal{D} , son

code géométrique est tout simplement le code des matrices de sa classe de conjugaison passant par \mathcal{D} . Il en existe nécessairement car \mathcal{D} est un domaine fondamental pour $PSL_2(\mathbb{Z})$.

On peut, par conjugaison par T ou T^{-1} , supposer que le premier côté rencontré n'est pas S . De plus, on ne peut pas rencontrer le côté S deux fois de suite et, entre deux S , on obtient soit uniquement des T , soit uniquement des T^{-1} (on ne revient pas en arrière). On obtient donc une suite de la forme suivante : $(T^{n_1}, S, \dots, T^{n_m}, S, \dots)$, avec $n_i \in \mathbb{Z}$, où T^{n_i} dans la suite signifie qu'on a croisé T n_i fois consécutivement.

Si $(T^{n_1}, S, \dots, T^{n_m}, S)$ est la plus petite période du code précédent, le codage géométrique de la géodésique est alors la suite d'entiers (n_1, \dots, n_m) . On le note $[A]$.

Nous verrons plus loin que le code géométrique de $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ est $(4, 6)$. On pourrait l'obtenir en continuant de tracer des géodésiques dans \mathcal{D} mais ce processus peut vite devenir fastidieux.

3.2 Codage arithmétique

Dans le codage arithmétique, on code une matrice hyperbolique en fonction de son point fixe attractif. Pour cela, on va utiliser le développement des réels en fractions continues dites "négatives".

Soient $n_0, n_1, \dots \in \mathbb{Z}$ tels que $n_i \geq 2$ pour $i \geq 1$.

On note $(n_0, n_1, \dots, n_s) = n_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{n_s}}}$, et $(n_0, n_1, \dots) = \lim_{s \rightarrow \infty} (n_0, \dots, n_s)$ (cette limite existe bien car

la suite est bornée et décroissante).

Inversement, tout $\alpha \in \mathbb{R}$ a une unique extension en fractions continues "négatives". Pour l'obtenir, on pose $n_0 = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ et $\alpha_0 = \alpha$, puis récursivement $\alpha_i = \frac{1}{n_{i-1} - \alpha_{i-1}}$ et $n_i = \lfloor \alpha_i \rfloor + 1$.

Propriété. Pour $\alpha = (n_0, n_1, \dots)$, on a les propriétés suivantes :

- $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \geq j$, $n_i = 2$.
- $\alpha \notin \mathbb{Q}$ est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}_2[X]$ (on dit alors que c'est un irrationnel quadratique) si et seulement si la suite (n_i) est périodique à partir d'un certain rang. Si elle est périodique à partir du rang $k+1$ et est de période m , on notera $(n_0, n_1, \dots) = (n_0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$ (cette écriture n'est pas unique et dépend du rang auquel on fait commencer la période).
- Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ est racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}_2[X]$, alors la suite (n_i) est périodique si et seulement si $\alpha > 1$ et $0 < \alpha' < 1$, où α' est l'autre racine de P .

Les points fixes des matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ sont tous des points fixes de polynômes de $\mathbb{Z}_2[X]$. Ils ont donc tous un développement en fractions continues "négatives" périodique à partir d'un certain rang.

Proposition 3.4. Soit $z, w \in \mathbb{R}$ deux irrationnels quadratiques. Alors il existe $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma(z) = w$ si et seulement si les périodes des fractions continues négatives de z et w sont des permutations cycliques l'une de l'autre.

Pour démontrer cette proposition, nous allons commencer par étudier les actions de T et S sur ces développements. Considérons un réel $\alpha = (n_0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a facilement $T^n \alpha = (n_0 + n, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$.

Si $n_0 > 2$, alors $S\alpha = (0, n_0, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$. Inversement, si $n_0 = 0$, alors $S\alpha = (n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$.

Les cas $n_0 = 1$ et $n_0 < 0$ demandent un peu plus de travail. Après quelques calculs on obtient en particulier que $S\alpha$ s'écrit sous la forme $(m_0, \dots, m_q, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$, ie $S\alpha$ est périodique à partir d'un certain rang, et sa période est une permutation cyclique de la période de α .

Certaines de ces transformations vont nous être particulièrement utiles.

On a $T^{-n_0} \alpha = (0, n_1, \dots, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$, et donc $ST^{-n_0} \alpha = (n_1, \dots, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$. Ainsi, en appliquant successivement T^{-n_i} et S , on obtient le développement $(\overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$, qui est périodique.

On obtient le fait important suivant : de tout irrationnel quadratique α , on peut obtenir un réel dont le développement est périodique à l'aide d'un nombre fini de transformations par T et S , et dont la période est égale à celle de α à permutation cyclique près. Plus précisément, si $z = (\overline{n_{k+i}, \dots, n_{k+m}, n_{k+1}, \dots, n_{k+i-1}})$, alors il existe $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma(\alpha) = z$, où $\alpha = (n_0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$. On a de plus un algorithme qui nous donne exactement les transformations par T et S qu'il faut faire.

Démonstration de la proposition. Supposons qu'il existe $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma(z) = w$. D'après l'étude précédente sur l'action de T et S , on a que si $\gamma = T$ ou $\gamma = S$, alors la période de w est une permutation cyclique de celle de z . $PSL_2(\mathbb{Z})$ étant engendré par T et S , on obtient que les périodes de z et w sont bien des permutations cycliques l'une de l'autre.

Supposons maintenant que les périodes de z et w sont des permutations cycliques l'une de l'autre. On a vu qu'en faisant agir $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur tout irrationnel quadratique α , on peut obtenir un réel dont le développement en fraction continues "négatives" est périodique, de période n'importe quelle permutation cyclique de la période de α . Ainsi il existe γ et γ' dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ tels que $\gamma z = \gamma' w$. On obtient le résultat souhaité. \square

Lemme 3.5. *Soit Γ un groupe Fuchsien, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ deux éléments hyperboliques ayant un point fixe commun. Alors leurs deuxième point fixe coïncide également et les deux éléments ont donc le même axe.*

Démonstration. Par conjugaison par $PSL_2(\mathbb{R})$ on peut supposer que γ_1 et γ_2 fixent ∞ , et que γ_1 fixe également 0. On a donc $\gamma_1 : z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda > 1$ et $\gamma_2 : z \mapsto \mu z + k$ avec $\mu > 0$ et $\mu \neq 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \gamma_1^{-n} \gamma_2 \gamma_1^n(z) &= \lambda^{-n} (\mu \lambda^n z + k) \\ &= \mu z + \lambda^{-n} k \end{aligned}$$

donc $\|\gamma_1^{-n} \gamma_2 \gamma_1^n\|^2 = \frac{1}{\mu^2} (\mu^2 + \lambda^{-2n} k^2 + 1)$, où $\|\cdot\|$ est la norme canonique sur les $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cette suite est bornée, de termes deux à deux distincts si $k \neq 0$. Mais alors on peut en extraire une suite convergente, de termes deux à deux distincts si $k \neq 0$, ce qui contredirait le caractère discret de Γ . Donc on a $k = 0$, et donc γ_1 fixe 0. \square

Proposition 3.6. *Deux matrices hyperboliques primitives $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ de même trace sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si les périodes des développement en fractions continues de leurs points fixes attractifs sont des permutations cycliques l'une de l'autre.*

Démonstration. Soient w_A et w_B les points fixes attractifs de A et B .

Supposons que les périodes de w_A et w_B diffèrent d'une permutation cyclique. Il existe alors $C \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $w_A = C(w_B)$. w_A est alors point fixe attractif de A et de CBC^{-1} . A et B étant primitives et de même trace, on en déduit grâce au lemme précédent qu'elles ont le même axe. Les axes de A et B représentent la même géodésique dans $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$, donc A et B sont bien conjuguées dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

Inversement, supposons $A = CBC^{-1}$. $C^{-1}(w_A)$ est alors un point fixe de B , et ce point fixe est attractif, donc $Cw_B = w_A$. \square

Pour une matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, on définit le code arithmétique de A , noté (A) , comme étant la plus petite période du développement en fractions continues du point fixe attractif de A . On définit ce code à permutation cyclique près, c'est donc un invariant de la classe de conjugaison de A .

Par exemple, les points fixes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ sont $2 + \frac{\sqrt{30}}{3}$ et $2 - \frac{\sqrt{30}}{3}$. Le développement en fraction continue "négative" de $2 + \frac{\sqrt{30}}{3}$ étant $(\overline{4, 6})$, le codage arithmétique de A est $(A) = (4, 6)$.

4 Lien entre les deux codages

4.1 Matrices réduites et totalement \mathcal{D} -réduite

Les deux codages étant invariants par conjugaison, nous allons introduire un ensemble privilégié de matrices, dites réduites, et montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ est conjuguée à une telle matrice dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

Définition 4.1. Une matrice hyperbolique de $SL_2(\mathbb{Z})$ est dite *réduite* si ses points fixes attractifs et répulsifs, notés respectivement w et u , satisfont $w > 1$ et $0 < u < 1$.

D'après la dernière propriété sur les développements en fractions continues "négatives", ce sont exactement les matrices dont le point fixe attractif admet un développement périodique.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ que nous avons étudié au chapitre précédent est réduite. En effet, ses points fixes sont $2 + \frac{\sqrt{30}}{3} > 1$ et $2 - \frac{\sqrt{30}}{3} \in]0, 1[$.

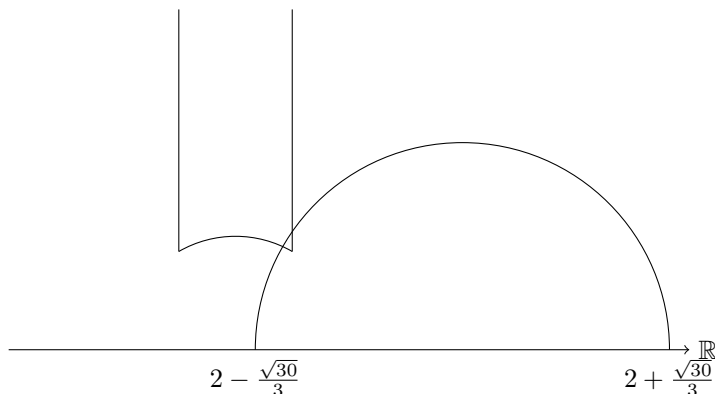
On introduit également ces autres définitions :

Définition 4.2. On définit le *A-cycle* d'une matrice hyperbolique A comme étant l'ensemble des matrices réduites conjuguées à A .

Le *A-cycle* de $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ est composé de 2 matrices. Il y a A , qui est déjà réduite, et la matrice de point fixe attractif $(\overline{6, 4})$.

Définition 4.3. Soit \mathcal{D} un domaine fondamental pour $SL_2(\mathbb{Z})$. Une matrice hyperbolique est dite *\mathcal{D} -réduite* si elle est réduite et si son axe intersecte \mathcal{D} .

La matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ est \mathcal{D} -réduite. On peut le vérifier analytiquement, mais on peut également le voir en traçant la géodésique associée :



Définition 4.4. Une matrice hyperbolique A de $SL_2(\mathbb{Z})$ est dite *totalement \mathcal{D} -réduite* si toutes les matrices du *A-cycle* sont \mathcal{D} -réduites.

Notre matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ est même totalement \mathcal{D} -réduite. L'unique autre matrice réduite qui lui est conjuguée à pour point fixe attractif $(\overline{6, 4}) = 3 + \frac{\sqrt{30}}{2}$. Son deuxième point fixe est le conjugué de $3 + \frac{\sqrt{30}}{2}$ dans un corps du type $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ avec $\Delta \in \mathbb{Z}$. C'est donc $3 - \frac{\sqrt{30}}{2}$. On obtient de même analytiquement ou graphiquement que la géodésique rejoignant ces deux points croise bien \mathcal{D} .

Toute matrice hyperbolique est conjuguée à un nombre fini et non nul de matrices réduites, comme le montre la proposition suivante. La preuve fournira un algorithme pour réduire n'importe quelle matrice hyperbolique.

On a d'abord besoin du lemme technique suivant, dont la preuve est détaillée dans [3] :

Lemme 4.5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $a+d > 0$. A est réduite si et seulement si $c > 0$, $a+b-c-d > 0$ et $b < 0$.

Proposition 4.6. Pour $t \in \mathbb{Z}$ donné, il n'y a qu'un nombre fini de matrices réduites de trace t (non nul si $|t| > 2$). Toute matrice hyperbolique de $SL_2(\mathbb{Z})$ peut être réduite par un nombre fini de conjugaisons par S et T .

Toute matrice réduite conjuguée à A s'obtient à partir de A par un nombre fini de conjugaisons par S et T . On en déduit que l'ensemble des matrices réduites se décomposent en cycles disjoints de matrices conjuguées.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{Z}$, montrons tout d'abord qu'il y a un nombre fini de matrices réduites de trace t .

Supposons que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est réduite. Soit $k = a - d - 2c$ et $D = (d-a)^2 + 4bc = t^2 - 4$ (c'est le discriminant du polynôme associé à A). Un calcul montre que $|k| < \sqrt{D}$, et donc k ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs pour un t donné. De plus, $D - k^2 = 4c(a+b-c-d) > 0$ (d'après le lemme précédent), donc c divise $\frac{D-k^2}{4}$ et donc ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. On peut exprimer a , b et d en fonction de c et k comme suit :

$$\begin{aligned} a &= \frac{t+k+2c}{2} \\ b &= \frac{D-k^2}{4c} - (k+c) \\ d &= \frac{t-k-2c}{2}. \end{aligned}$$

On obtient donc la finitude de a , b et d , et donc du nombre de matrices réduites de traces t .

Montrons maintenant que l'on peut réduire toutes les matrices hyperboliques. Soit $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique. Son point fixe attractif s'écrit sous la forme $(n_0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$.

La matrice $A_0 = S^{-1}T^{-n_0}AT^{n_0}S$ a alors pour point fixe attractif $(n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$.

On définit par récurrence $A_i = S^{-1}T^{-n_i}A_{i-1}T^{n_i}S$, de point fixe $(n_{i+1}, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$ pour $0 \leq i \leq k$. La matrice A_k a donc pour point fixe le point $(\overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$ qui est purement périodique. A_k est donc réduite.

En appliquant la même procédure à A_k , on obtient m matrices réduites. Inversement, si 2 matrices réduites sont conjuguées, leurs points fixes attractifs sont purement périodiques de même périodes à permutation cyclique près, donc les deux matrices sont dans le même cycle. \square

La proposition suivante va nous permettre de connaître les générateurs d'une matrice A réduite en fonction du développement de son point fixe.

Proposition 4.7. Soient $n_1, \dots, n_m \geq 2$ des entiers, et A une matrice hyperbolique primitive de trace positive et de point fixe attractif $(\overline{n_1, \dots, n_m})$. Alors $A = T^{n_1}ST^{n_2}S \dots T^{n_m}S$.

Démonstration. On pose $A_0 = A$, $w_0 = w$, puis, pour $s \in \mathbb{N}^*$, $A_s = S^{-1}T^{-n_s}A_{s-1} = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{pmatrix}$ et $w_s = S^{-1}T^{-n_s}(w_{s-1}) = (\overline{n_{s+1}, \dots, n_m, n_1, \dots, n_s})$. On veut montrer que $A_m = I_2$.

Une récurrence permet de montrer que, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $c_s \leq c_{s-1}$, et cette inégalité est stricte si $s \leq m$. De plus, cette même récurrence montre que $c_s \geq 0$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

On a donc une suite (c_s) d'entiers, strictement décroissante jusqu'au rang m . De plus, A_m fixe w_0 donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $A_m = A^n$. Or $0 \leq c_m < c$: on montre que cette condition impose $n = 0$, d'où $A_m = I_2$. [3] donne une démonstration plus complète de ce résultat. \square

On obtient par exemple que $\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = T^4ST^6S$.

4.2 Coïncidence des deux codages

Finalement, étudions le lien entre ces deux codages. Comme le montre le théorème suivant, les deux coïncident si et seulement si on étudie une géodésique issue d'une matrice totalement \mathcal{D} -réduite.

Théorème 4.8. *Soit A une matrice hyperbolique de $PSL_2(\mathbb{Z})$.*

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

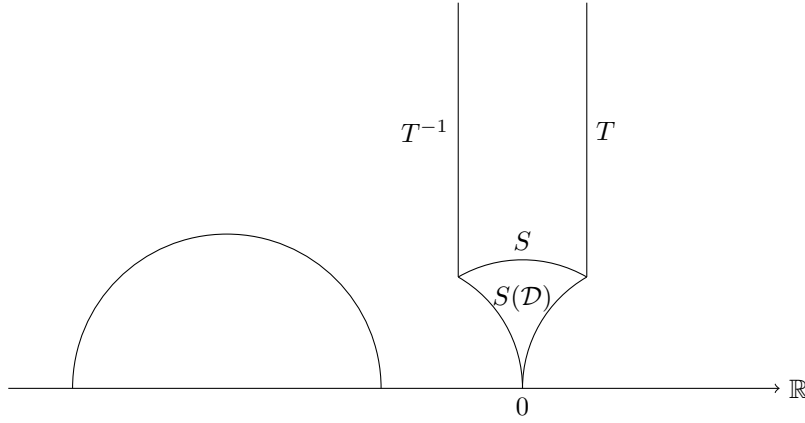
- A est totalement \mathcal{D} -réduite.
- Les codes géométriques et arithmétiques de A coïncident.

Démonstration. Supposons A totalement \mathcal{D} -réduite. Toutes les matrices du A -cycle sont \mathcal{D} -réduites : leurs axes sont orientés de gauche à droite, ont un point de départ dans $]0, 1[$, et traversent \mathcal{D} . Ils entrent donc dans \mathcal{D} du côté S et sortent par le côté T .

On peut supposer sans perte de généralité que A est réduite. Notons $(\overline{n_1, \dots, n_m})$ le développement en fractions continues négatives du point fixe attractif de A .

En conjuguant A par T^{-1} , on décale l'axe de A de 1 vers la gauche. L'axe de $T^{-1}AT$ entre donc dans \mathcal{D} par le côté T^{-1} et ressort par le côté T . Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $1 \leq i < k$, $T^{-k}AT^k$ entre dans \mathcal{D} du côté T^{-1} et sort du côté S . Montrons que $k = n_1$.

Supposons $k < n_1$. L'axe de $T^{-n_1}AT^{n_1}$ ne traverse donc pas \mathcal{D} et ne peut donc pas non plus traverser $S(\mathcal{D})$.



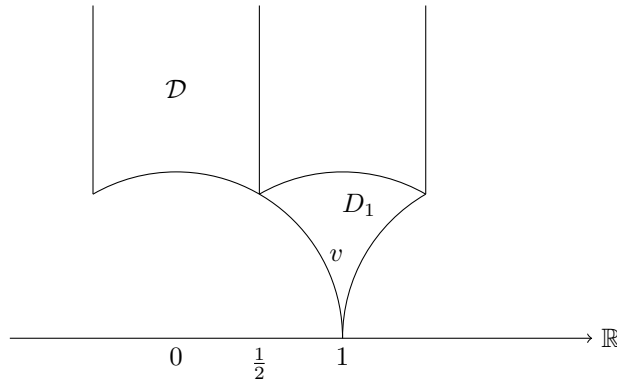
Donc l'axe de $ST^{-n_1}AT^{n_1}S$ ne traverse pas \mathcal{D} . Mais $ST^{-n_1}AT^{n_1}S$ a pour point fixe attractif $ST^{-n_1}(\overline{n_1, \dots, n_m}) = (\overline{n_2, \dots, n_m, n_1})$, donc c'est une matrice réduite mais pas \mathcal{D} -réduite. Cela contredit le caractère totalement \mathcal{D} -réduit de A .

De plus, $T^{-(n_1+1)}AT^{n_1+1}$ a pour point fixe attractif $(-1, \overline{n_2, \dots, n_m, n_1})$ qui est strictement inférieur à -1 , donc $T^{-(n_1+1)}AT^{n_1+1}$ ne peut pas traverser \mathcal{D} . On en déduit que k est bien égal à n_1 .

Donc $T^{-n_1}AT^{n_1}$ entre dans \mathcal{D} par le côté T^{-1} et sort par le côté S . On en déduit que le code géométrique de A commence par (n_1, \dots) . $ST^{-n_1}AT^{n_1}S$ est \mathcal{D} -réduite et totalement \mathcal{D} -réduite, de point fixe attractif $(\overline{n_2, \dots, n_m, n_1})$. On peut donc appliquer le même procédé à cette matrice, et ainsi de suite. On obtient bien (n_1, \dots, n_m) comme code géométrique.

Montrons le sens réciproque par contraposée. Supposons que A n'est pas totalement \mathcal{D} -réduite. Il existe donc une matrice dans le A -cycle qui n'est pas \mathcal{D} -réduite. On peut supposer que A est réduite mais pas \mathcal{D} -réduite.

Notons $D_1 = TS(\mathcal{D})$ et introduisons le côté v :



A est alors nécessairement D_1 -réduite, car elle a un point fixe dans $]0, 1[$ et un autre strictement plus grand que 1. Elle entre dans D_1 par le côté v (on part du point fixe répulsif, celui dans $]0, 1[$). L'axe de $(TS)^{-1}ATS$ entre donc dans $(TS)^{-1}(D_1) = \mathcal{D}$ par le côté $(TS)^{-1}(v)$, qui n'est autre que le côté T .

L'axe entre donc dans \mathcal{D} dans le sens anti-horaire, et donc l'axe de $T(TS)^{-1}ATST$ va sortir de \mathcal{D} par le côté T^{-1} , ce qui implique qu'il y a des nombres négatifs dans le code géométrique de $T(TS)^{-1}ATST$, et donc dans celui de A .

On en déduit que les codes arithmétiques et géométriques de A ne coïncident pas, le code arithmétique n'ayant que des entiers positifs. \square

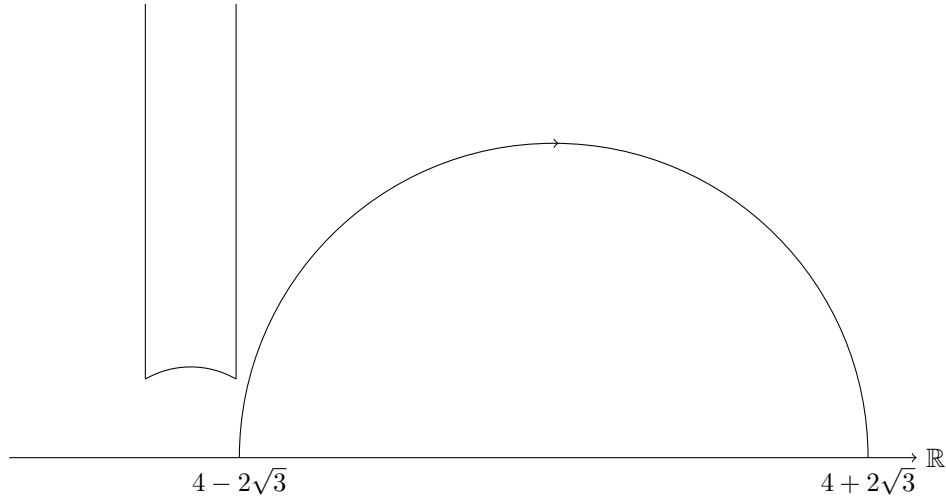
4.3 Deux exemples

Premier exemple :

Reprenons l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ que nous avons déjà étudié. Son code arithmétique est $(A) = (4, 6)$. De plus, on a vu qu'elle était totalement \mathcal{D} -réduite. Grâce au théorème précédent, on obtient facilement son code géométrique. Il coïncide avec le code arithmétique, c'est donc $[A] = (4, 6)$. On connaît donc facilement les zones du plan par lesquelles passe notre géodésique.

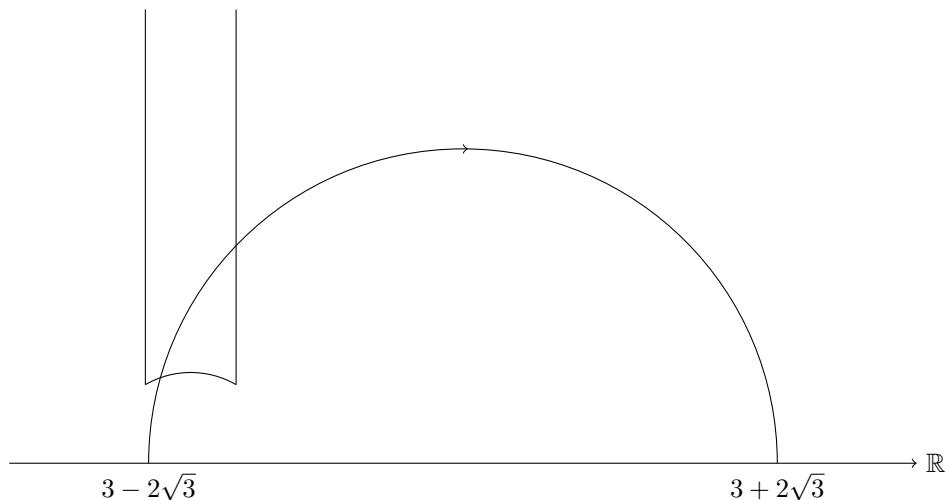
Deuxième exemple :

Regardons maintenant la matrice $B = \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ses points fixes sont $4 \pm 2\sqrt{3}$. Son axe est le suivant :

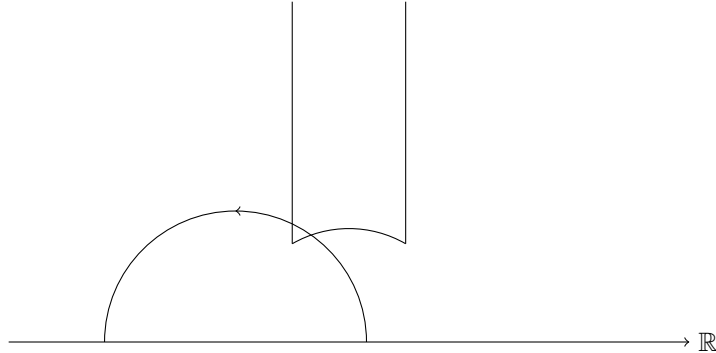


B n'est pas \mathcal{D} -réduite (on a $4 - 2\sqrt{3} > \frac{1}{2}$). Ses codages arithmétiques et géométriques ne vont alors pas coïncider.

Pour le code géométrique, on conjugue une première fois par T^{-1} pour que notre géodésique traverse \mathcal{D} . La matrice associée est $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.



Ensuite, en réalisant la procédure décrite plus haut, on obtient 6 passages par T avant de croiser S . Le début du code est donc (T^6, S) , puis on continue en étudiant la géodésique qui est l'axe de la matrice $B' = \begin{pmatrix} -13 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, obtenue en conjuguant par T^{-6} puis par S . Son axe est le suivant :



On remarque que la géodésique croise maintenant le côté T^{-1} : il y a donc des entiers négatifs dans le code géométrique de B , donc il ne peut pas être égal au code arithmétique. On croise deux fois T^{-1} avant de croiser S , donc la suite du code est (T^{-2}, S) . En conjuguant pour rester dans \mathcal{D} , on obtient de nouveau la matrice $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que le code géométrique de B est $[B] = (6, -2)$.

Le code arithmétique de B se calcule à partir du point fixe attractif. On obtient $(B) = (8, 2)$, qui est bien différent de $[B] = (6, -2)$.

Conclusion

Ce stage a ainsi été l'occasion d'explorer le monde de la géométrie hyperbolique, mais aussi de se familiariser avec de nombreux outils de théorie des nombres, notamment l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} . Nous avons réussi à décrire les géodésiques de $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ géométriquement et analytiquement grâce à tous ses outils, et étudier le lien entre les deux codages.

Pour aller plus loin, on pourrait, comme l'évoque Katok dans [3], réaliser un codage géométrique similaire pour les géodésiques de $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, où Γ est un groupe Fuchsien quelconque, en considérant le domaine de Dirichlet de Γ . Le codage arithmétique est cependant plus difficilement adaptable à un groupe Fuchsien quelconque, les fractions continues étant étroitement liées aux polynômes à coefficients entiers et donc aux matrices à coefficients entiers.