Université de Lille - Faculté des Sciences et Technologies

Master 2 – Mention Mathématiques
Mémoire de recherche

Petits zéros de fonctions L associées aux formes modulaires

Présenté par :
Corentin Hespel

Sous la direction de :
Didier Lesesvre
Nicole Raulf

Année universitaire 2025 - 2026,
Laboratoire Paul Painlevé - UFR de Mathématiques

Remerciements

Je tiens à exprimer des sincères remerciements à mes directeurs de recherche, Didier Lesesvre et Nicole Raulf, pour avoir accepté d'encadrer ce travail. Leurs nombreux conseils et leur aide ont été fondamentaux pour l'avancée de ce projet. Grâce à eux, j'ai pu développer ma passion pour la théorie analytique des nombres, ils ont été une source constante d'inspiration et de motivation.

Je remercie également l'ensemble du corps enseignant du Master de Mathématiques, parcours Recherche, de l'Université de Lille qui a su développer mon attrait pour la recherche en Mathématiques. Je remercie le laboratoire Paul Painlevé pour l'accueil qui m'a été fait en son sein, offrant un environnement de travail riche et stimulant.

Je remercie le CRM de Montréal pour le soutien qu'ils m'ont apporté lors de ma participation à l'école d'été "Universal Statistics in Number Theory".

Enfin, je souhaite remercier l'ensemble de mes camarades de promotion qui ont été un soutien de choix dans ce travail et avec qui il a toujours été possible d'avoir des discussions passionnantes dans de nombreux domaines des Mathématiques.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude statistique des zéros non triviaux des fonctions L au voisinage du point central $s = 1/2$, appelés zéros de petite hauteur. Dans le prolongement des travaux de Katz et Sarnak, qui prédisent des liens entre les statistiques de ces zéros et les statistiques analogues de groupes classiques issus de la théorie des matrices aléatoires, nous étudions la densité de niveau 1 pour les familles $H_k^*(N), H_k^+(N)$ et $H_k^-(N)$ des formes modulaires cuspidales sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Pour ce faire, la première partie de ce travail pose un cadre théorique, développant les formes modulaires, les opérateurs de Hecke et les séries de Poincaré afin d'obtenir la formule des traces de Petersson qui est l'outil fondamental pour l'étude de ces familles. Les termes issus de cette formule font intervenir des sommes de Kloosterman que nous contrôlons grâce aux travaux de Weil pour obtenir une estimation satisfaisante des termes d'erreur. Une fois ce cadre développé, sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée (GRH) et en nous inspirant de l'article fondamental de H. Iwaniec, W. Luo et P. Sarnak ([ILS00]) nous évaluons la densité de niveau 1 pour des fonctions de test dont la transformée de Fourier est à support compact. Notre étude a pour but de confirmer les prédictions de Katz et Sarnak en précisant pour quelle taille de support des fonctions test ces symétries s'appliquent.

Abstract

This thesis is devoted to the statistical study of the non-trivial zeros of L-functions near the central point $s = 1/2$, referred to as low lying zeros. In extension of the works of Katz and Sarnak, which predict connections between the statistics of these zeros and the behavior of classical groups from random matrix theory, we study the 1-level density for the families $H_k^*(N)$, $H_k^+(N)$, and $H_k^-(N)$ of cuspidal modular forms on $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. To do so, the first part of this work establishes a theoretical framework, developing modular forms, Hecke operators, and Poincaré series to obtain the Petersson trace formula, which is the fundamental tool for studying these families. The terms arising from this formula involve Kloosterman sums, which we control using Weil's works to obtain a satisfactory estimate of the error terms. Once this framework is developed, under the Generalized Riemann Hypothesis (GRH) and drawing inspiration from the seminal article by H. Iwaniec, W. Luo, and P. Sarnak ([ILS00]), we evaluate the 1-level density for test functions whose Fourier transform has compact support. Our study aims to confirm Katz and Sarnak's predictions by specifying for which support size of the test functions these symmetries hold.

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Cadre théorique **6**
2.1 Un peu de géométrie hyperbolique 6
2.1.1 Rappels sur le modèle de Poincaré 6
2.1.2 Groupe modulaire, groupes de congruence et domaine fondamental 6
2.2 Fonctions modulaires et Réseaux 11
2.2.1 Formes et fonctions modulaires 11
2.2.2 Réseaux 12
2.2.3 Lien entre réseaux et fonctions modulaires 13
2.2.4 L'espace des formes modulaires 15
2.3 Opérateurs de Hecke 20
2.4 Rappel sur les fonctions L 24
2.4.1 Fonctions L et conducteur analytique 24
2.4.2 Fonctions L de Hecke 25

3 Formule des traces de Petersson **27**
3.1 Sommes de Kloosterman, fonctions de Bessel et fonctions diviseurs 27
3.1.1 Sommes de Kloosterman 28
3.1.2 Fonction de Bessel 35
3.1.3 Fonction diviseur 36
3.2 Formule des traces de Petersson et séries de Poincaré 37

4 Petits zéros des fonctions L associées aux formes modulaires **42**
4.1 Cadre et objectifs 42
4.2 Décomposition spectrale et dimension de $H_k^\sigma(N)$ 45
4.3 Formule explicite pour $D(f,\phi)$ 58
4.4 Premiers résultats pour $H_k^*(N)$ 65
4.5 Exploiter la somme sur les premiers 67
4.6 Des résultats sur les familles $H_k^\pm(N)$ 74
4.7 Exploiter les poids 83

1 Introduction

Ce mémoire s'intéresse à l'étude statistique des zéros des fonctions L, plus précisément à la distribution de ces zéros proches du point central, ce qu'on appelle petits zéros (*Low-lying zeros*). Historiquement, l'étude de la fonction ζ de Riemann concentre l'attention de nombreuses études mathématiques. En étudiant cette fonction, nous pouvons montrer qu'il existe un lien profond entre les zéros de cette fonction et les nombres premiers. Alors, B. Riemann a énoncé la célèbre hypothèse de Riemann conjecturant que les zéros non triviaux de la fonction ζ sont sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Cette fonction s'avère être un cas particulier d'une grande classe de fonctions appelées fonctions L, ces objets sont liés à de nombreux problèmes algébriques et géométriques. Pour définir ce qu'est une fonction L, nous pouvons en première approche considérer des séries de Dirichlet possédant un produit d'Euler, un prolongement analytique et une équation fonctionnelle.

Il existe de nombreuses façons d'obtenir de tels objets, ce problème ayant intéressé la théorie des nombres pendant de nombreuses années (notamment les travaux de Selberg visant à donner une définition moderne et complète de ces objets). Un outil puissant pour créer de tels objets est la théorie des formes modulaires. Nous allons donc commencer notre étude par donner quelques éléments permettant de comprendre cette théorie, notamment nous donnerons une description de l'espace des formes modulaires (2.2). Nous ferons ensuite le lien entre ces objets et les fonctions L en développant quelques propriétés de la théorie des opérateurs de Hecke (2.3), ce sont des opérateurs ayant des propriétés arithmétiques fortes dont héritent les fonctions L que nous étudierons. Ensuite, nous allons étudier les séries de Poincaré. Ces séries permettent d'avoir une base des formes modulaires. Cette construction a pour but final d'obtenir la formule de trace de Petersson (3.2). Cette formule fait le lien entre les propriétés arithmétiques et les propriétés spectrales des fonctions L. Elle fait le pont entre les moyennes des valeurs propres des formes modulaires et des objets purement arithmétiques, notamment les sommes de Kloosterman. Nous donnerons quelques propriétés de ces objets qui forment un outil riche et puissant en théorie analytique des nombres (3.1), notamment nous donnerons des explications sur comment les borner afin d'obtenir un contrôle satisfaisant de ces objets. Une fois la formule des traces de Petersson acquise, nous aurons défini la majorité des outils nécessaires pour étudier les petits zéros des fonctions L.

La plupart des résultats présentés dans cette étude sont conditionnés par l'Hypothèse de Riemann généralisée (GRH) qui affirme que les zéros non triviaux des fonctions L sont sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Nous appelons petits zéros les zéros de ces fonctions proches de la valeur centrale $s = 1/2$. La densité et la distribution de ces zéros ont été étudiées par Katz et Sarnak qui ont montré qu'il existe un lien entre la théorie des matrices aléatoires et les statistiques des petits zéros de fonctions L pour certaines familles. Nous allons nous intéresser à ce qu'on appelle la **Density Conjecture**, cette conjecture prédit le comportement des zéros de fonctions L pour les familles $H_k^*(N), H_k^+(N)$ et $H_k^-(N)$. L'objectif est d'étudier cette conjecture dans le cadre des formes automorphes sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ afin de prolonger le travail de Katz et Sarnak. Pour effectuer ce travail, nous allons nous servir des travaux d'Iwaniec-Luo-Sarnak dans leur article fondamental **"Low Lying Zeros of Families of L-Functions"** ([ILS00]). Nous allons expliquer en détail cet article et mettre en évidence une erreur que nous tâcherons de corriger (4.6). Cette compréhension de cet article permet d'obtenir une nouvelle méthode afin d'améliorer des résultats récents ([HW24]) dans le cadre plus général des formes de Hilbert.

2 Cadre théorique

2.1 Un peu de géométrie hyperbolique

Le cadre naturel pour notre étude est le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$. Nous allons commencer par donner quelques résultats usuels dans ce domaine qui nous seront fortement utiles le long de notre étude.

2.1.1 Rappels sur le modèle de Poincaré

On considère ici le modèle de Poincaré pour $\mathbb{H}$. La métrique riemannienne pour cet espace est

$$ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2).$$

On désigne dans cette section par $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'action sur $\mathbb{H}$ donnée par

$$\gamma.z = \frac{az+b}{cz+d}$$

On appelle une telle action une homographie. Rappelons que cette action représente toutes les isométries directes, elle conserve donc les géodésiques. Pour chaque $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nous définissons

$$j_\gamma(z) = cz + d$$

Cette application possède de nombreuses propriétés facilement vérifiables par calcul que nous allons citer à travers la proposition suivante.

Propriété 1 : *Soient $\gamma, \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et soient $z, w \in \mathbb{H}$. L'application $j_\gamma(z)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $j_{\gamma\sigma}(z) = j_\gamma(\sigma z) j_\sigma(z)$
(ii) $\gamma.z - \gamma.w = (z-w) j_\gamma(z)^{-1} j_\gamma(w)^{-1}$
(iii) $\frac{d}{dz}\gamma.z = j_\gamma(z)^{-2}$
(iv) $\gamma.z = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)}$
(v) $\forall z, w \in C_\gamma = \{z \in \mathbb{H} \mid |j_\gamma(z)| = 1\}, |\gamma.z - \gamma.w| = |z-w|$
(vi) $|j_\gamma(z)|^2 \mathrm{Im}(\gamma.z) = \mathrm{Im}(z)$
(vii) $\mathrm{Im}(\gamma.z)^{-1} |d\gamma.z| = \mathrm{Im}(z)^{-1}|dz|$

Cette fonction j_γ sera utile plus tard pour définir les séries de Poincaré et les formes modulaires.

2.1.2 Groupe modulaire, groupes de congruence et domaine fondamental

Les fonctions L nous intéressant dans la suite seront définies à partir des groupes introduits dans cette partie. Nous effectuerons plus tard des moyennes sur ces groupes, donc afin de mieux les comprendre nous introduirons la notion de domaine fondamental. L'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ permet de définir les automorphismes sur $\mathbb{H}$, nous allons nous intéresser aux sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Le premier groupe que nous considérons ici est le groupe modulaire.

Définition 1 : Groupe modulaire *Le groupe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ est appelé le groupe modulaire, c'est l'image de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.*

Pour mieux comprendre ce groupe nous utilisons la notion de domaine fondamental :

Définition 2 : Domaine fondamental *Soit G un groupe et E un ensemble sur lequel G agit. On appelle D un domaine fondamental de E sous l'action de G un sous-ensemble de E tel que*

- $\bigcup_{g\in G} g(D) = E$
- $\forall g, g' \in G,\ g \neq g',\ g(D) \cap g'(D) = \varnothing$

Nous allons maintenant étudier le domaine fondamental de $\mathbb{H}$ sous l'action du groupe modulaire G. On considère les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices génèrent G et opèrent sur $\mathbb{H}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcll} Sz & = & -1/z, & Tz = z+1 \\ S^2 & = & 1, & (ST)^3 = 1 \end{array}$$

On considère $\mathbb{D} \subset \mathbb{H}$,

$$\mathbb{D} = \big\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geqslant 1 \text{ et } |\mathrm{Re}(z)| \leqslant 1/2 \big\}.$$

Nous allons montrer que $\mathbb{D}$ est un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{H}$.

Propriété 2 : *On a*

(i) $\forall z \in \mathbb{H},\ \exists\, g \in G$ *tel que* $gz \in \mathbb{D}$.

(ii) Soient z, z' *deux points distincts dans* $\mathbb{D}$ *congrus modulo* G *(ie* $z \equiv z' \pmod G$*). Alors*

$$\mathrm{Re}(z) = \pm\tfrac{1}{2} \text{ et } z = z' \pm 1 \text{ ou } |z| = 1 \text{ et } z' = -1/z.$$

(iii) Soit $z \in \mathbb{D}$ *et* $\mathrm{Stab}(z) = \big\{ g \mid g \in G,\ gz = z \big\}$. *Alors* $\mathrm{Stab}(z) = \{1\}$ *ou*

- $z = i$ *et* $\mathrm{Stab}(z)$ *est le groupe d'ordre 2 engendré par* S.
- $z = \rho = e^{2i\pi/3}$ *et* $\mathrm{Stab}(z)$ *est le groupe d'ordre 3 engendré par* ST
- $z = -\bar{\rho} = e^{i\pi/3}$ *et* $\mathrm{Stab}(z)$ *est le groupe d'ordre 3 engendré par* TS.

Démonstration. Commençons par montrer (i) : Soit $z \in \mathbb{H}$ et $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. D'après la proposition 1

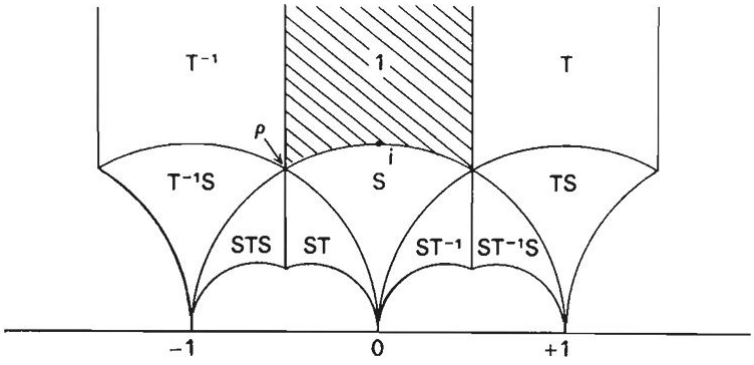
$$\mathrm{Im}(g.z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Comme $c, d \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\big\{(c,d) \mid |cz+d| \leqslant \alpha\big\}$ est fini pour tout nombre α et pour tout $z \in \mathbb{H}$. Alors il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Im}(g.z)$ est maximum (ie $|\ |cz+d|$ admet un minimum). Comme l'action de T décale horizontalement z, soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\mathrm{Re}(T^n gz)| \leqslant \frac{1}{2}$. On note $z' = T^n gz$. Si $|z'| < 1$ alors $S(z') = -1/z'$ vérifie $\mathrm{Im}(S.z') = \frac{\mathrm{Im}(z')}{|z'|^2} > \mathrm{Im}(z')$ ce qui est absurde car il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Im}(g.z)$ est maximum. Alors $|z'| \geqslant 1$ et $z' = g'z \in \mathbb{D}$ pour $g' = T^n g$.
Nous allons maintenant montrer les points (ii) et (iii) :
Soit $z \in D$ et soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ tel que $gz \in D$. Quitte à remplacer (z, g) par (gz, g^{-1}), on peut supposer que $\mathrm{Im}(gz) \geqslant \mathrm{Im}(z)$, c'est-à-dire que $|cz+d| \leqslant 1$. Ceci est impossible si $|c| \geqslant 2$, ce qui laisse les cas $c = 0, 1, -1$. Si $c = 0$, on a $d = \pm 1$ et g est la translation par $\pm b$. Comme $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Re}(gz)$ sont tous deux compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, cela implique soit $b = 0$ et $g = 1$, soit $b = \pm 1$, auquel cas l'un $\mathrm{Re}(z)$ ou $\mathrm{Re}(gz)$ doit être égal à $-\frac{1}{2}$ et l'autre à $\frac{1}{2}$.

Si $c = 1$, comme $|z+d| \leqslant 1$ alors $d = 0$, sauf si $z = \rho$ (resp. $-\bar{\rho}$), auquel cas on peut avoir $d = 0, 1$(resp. $d = 0, -1$). Le cas $d = 0$ donne $|z| \leqslant 1$, donc $|z| = 1$, d'autre part, $ad - bc = 1$

implique $b = -1$, donc $gz = a - 1/z$ et par ce qui est fait au-dessus $a = 0$ sauf si $\mathrm{Re}(z) = \pm\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $z = \rho$ ou $-\bar{\rho}$, auquel cas on a $a = 0, -1$ ou $a = 0, 1$. Le cas $z = \rho$ et $d = 1$ donne $a - b = 1$ et $g\rho = a - 1/(1+\rho) = a + \rho$, donc $a = 0, 1$. On fait de même si $z = -\bar{\rho}$ et $d = -1$. Enfin, le cas $c = -1$ se ramène au cas $c = 1$ en changeant les signes de a, b, c, d, ce qui achève la preuve. □

Cette proposition nous montre que le domaine $\mathbb{D}$ est un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{H}$. Nous pouvons le représenter par le polygone hyperbolique suivant :



Le groupe modulaire possède de nombreux sous-groupe normaux, notamment les groupes principaux de congruence. Les domaines fondamentaux que nous allons utiliser dans la suite sont définis depuis ces groupes de congruences.

Définition 3 : Groupe principal de congruence *Soit $q \in \mathbb{N}$. On appelle principal groupe de congruence de niveau q le groupe*

$$\Gamma(q) = \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \pmod{q} \right\}$$

C'est un sous-groupe normal du groupe modulaire d'indice $[G : \Gamma(q)] = q^3 \prod_{p|q}(1 - p^{-2})$ ([Iwa97]). Remarquons que le groupe modulaire peut se noter $\Gamma(1)$.

On appelle sous-groupe de congruence de niveau q n'importe quel groupe contenant $\Gamma(q)$. Nous aurons pour la suite besoin des deux groupes de congruence suivants :

— Le groupe de congruence de Hecke $\Gamma_0(q) = \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} \star & \star \\ & \star \end{pmatrix} \pmod{q} \right\}$

— Le groupe des translations $\Gamma_\infty = \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{Z} \right\}$

Il est montré dans [IK04] que les groupes de Hecke vérifient les deux points suivants :

- Les groupes $\Gamma_0(q)$ sont d'indices

$$[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(q)] = q \prod_{q|p} (1 + p^{-1}) = \nu(q), \tag{1}$$

où l'on définit $\nu(q)$ comme le volume $\mathrm{vol}(\Gamma_0(q)\backslash\mathbb{H})$.

- Un ensemble de représentants pour $\Gamma_0(q)\backslash\Gamma_0(1)$ est donné par

$$\begin{pmatrix} \star & \star \\ u & v \end{pmatrix} \in \Gamma_0(1) \quad \text{avec } v \mid q \text{ et } u \pmod{q/v}$$

Nous pouvons décrire le groupe de congruence de Hecke grâce a Γ_∞ à travers une décomposition qu'on appelle "Double coset decomposition". Cette décomposition nous sera utile pour montrer la formule des traces de Petersson

Lemme 1. Double coset decomposition *Le groupe $\Gamma_0(q)$ se décompose en union disjointe :*

$$\Gamma_0(q) = \Gamma_\infty \cup \bigcup_{\substack{c>0 \\ q|c}} \bigcup_{\substack{1\leqslant d\leqslant c \\ (c,d)=1}} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$$

En particulier

$$\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(q)/\Gamma_\infty = \{\Gamma_\infty\} \cup \{\Gamma_\infty \begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty : c > 0, 1 \leqslant d \leqslant c, q \mid c, (c,d) = 1\}$$

$$\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(q) = \{\Gamma_\infty\} \cup \{\Gamma_\infty \begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d \end{pmatrix} : c > 0, d \in \mathbb{Z}, q \mid c, (c,d) = 1\}$$

Démonstration. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$. Supposons que $\gamma \notin \Gamma_\infty$ i.e $c' \neq 0$.
Si $c' > 0$, par division euclidienne on note $d' = nc' + d$ avec $1 \leqslant d \leqslant c'$. On peut réécrire alors

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' - na' \\ c' & d \end{pmatrix}$$

Donc

$$\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' - na' \\ c' & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \begin{pmatrix} a' & b' - na' \\ c' & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$$

Si $c' < 0$, par division euclidienne $-d' = n(-c') + d$ avec $1 \leqslant d \leqslant -c'$. Donc

$$\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a' & -b' + na' \\ -c' & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \begin{pmatrix} -a' & -b' + na' \\ -c' & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$$

Donc

$$\Gamma_0(q) \subseteq \Gamma_\infty \cup \bigcup_{\substack{c>0 \\ q|c}} \bigcup_{\substack{1\leqslant d\leqslant c \\ (c,d)=1}} \Gamma_\infty$$

De plus

$$\Gamma_\infty \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b + na \\ c & d + nc \end{pmatrix} \right\}$$

Alors, le coefficient en bas à gauche de $\Gamma_\infty \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$ est $\pm c$ donc la condition $q \mid c$ permet de vérifier l'égalité

$$\Gamma_0(q) = \Gamma_\infty \cup \bigcup_{\substack{c>0 \\ q|c}} \bigcup_{\substack{1 \leqslant d \leqslant c \\ (c,d)=1}} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$$

Ce qui achève la preuve. □

Enfin, un domaine fondamental vérifie la propriété suivante, qui nous sera également utile quand nous démontrerons la formule des traces de Petersson :

Lemme 2. *Soit D un domaine fondamental pour Γ sur $\mathbb{H}$. Alors $\bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \gamma(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ est un domaine fondamental pour $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}$.*

Démonstration. $\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \Gamma_\infty \gamma$
On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentants dans $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$.
Comme $\mathbb{D}$ est un domaine fondamental pour Γ on a $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{\mathbb{D}})$ et $\gamma(\mathbb{D}^o)$ disjoints pour $\gamma \in \Gamma$.
Alors

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{\mathbb{D}}) = \bigcup_{\delta \in \Gamma_\infty} \bigcup_{\gamma \in \mathcal{R}} \delta(\gamma(\bar{\mathbb{D}}))$$

Comme $\delta \in \Gamma_\infty$, δ est une isométrie donc

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\delta \in \Gamma_\infty} \delta \left(\bigcup_{\gamma \in \mathcal{R}} \gamma(\bar{D}) \right)$$

On note

$$B = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{R}} \gamma(\mathbb{D})$$

Soient $\delta_1 \neq \delta_2 \in \Gamma_\infty$, soit $z \in \delta_1(B^o) \cap \delta_2(B^o)$.
Alors $z = \delta_1 \gamma_1 z_1 = \delta_2 \gamma_2 z_2$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^o$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{R}$. Donc

$$z_1 = \left(\delta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \delta_2 \gamma_2 \right) z_2 = \alpha z_2$$

$\alpha \in \Gamma$ et $\mathbb{D}$ est un domaine fondamental pour Γ donc $\alpha = Id$.
Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} \delta_1 \gamma_1 & = & \delta_2 \gamma_2 \\ \underbrace{\gamma_2 \gamma_1^{-1}}_{\in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} & = & \underbrace{\delta_2^{-1} \delta_1}_{\in \Gamma_\infty} \end{array}$$

Alors $\delta_2^{-1} \delta_1 = Id$ donc $\delta_2 = \delta_1$. Alors

$$\delta_1(B^o) \cap \delta_2(B^o) = \emptyset$$

Ce qui achève la preuve. □

2.2 Fonctions modulaires et Réseaux

Sur la droite réelle $\mathbb{R}$, l'analyse harmonique permet de décomposer des espaces de fonctions en utilisant la périodicité via les séries de Fourier. Un phénomène analogue se produit sur le demi-plan complexe $\mathbb{H}$, où les formes automorphes étendent cette notion de décomposition. Nous présentons dans cette partie quelques éléments fondamentaux de la théorie des formes modulaires, qui constituent le cas classique de ces formes automorphes. L'étude de l'espace de ces formes est liée à de nombreux problèmes de statistiques arithmétiques. Cette connexion profonde s'opère notamment à travers leur lien avec les fonctions L qui sera expliqué dans la section 2.3.

2.2.1 Formes et fonctions modulaires

Nous commençons par définir ces objets. Ces notions nécessitent d'avoir des connaissances sur le demi-plan de Poincaré, ces dernières ont été rappelées dans le chapitre précédent.

Définition 4 : Fonction faiblement modulaire *On dit qu'une fonction f est faiblement modulaire de poids k sur $\mathbb{H}$ si*

1. *f est méromorphe sur $\mathbb{H}$*
2. *$\forall g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ $f(z) = (cz+d)^{-k} f(g.z)$*
   Ici, l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ est donnée par :

   $\forall\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *$\forall z \in \mathbb{H}$, on a :* $g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$

Propriété 3 : *f est faiblement modulaire sur $\mathbb{H}$ si et seulement si*

1. *f est méromorphe sur $\mathbb{H}$*
2. *$f(z+1) = f(z)$*
3. *$f(\frac{-1}{z}) = z^k f(z)$*

Définition 5 : Méromorphe à l'infini *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{D}^* = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$ vérifiant $f(z+1) = f(z)$. On dit que f est méromorphe à l'infini si elle se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ méromorphe sur $\mathbb{D}$.*
En posant $q(z) = e^{2i\pi z}$ cela revient à dire que $\tilde{f}$ admet un développement de Laurent dans un voisinage de 0

$$\tilde{f}(q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n q^n$$

où $a_n \neq 0$ pour un nombre fini de termes négatifs.
Si $a_n = 0$ $\forall n < 0$ on dit que f est holomorphe à l'infini et on pose $f(\infty) = \tilde{f}(0)$.

Définition 6 : Forme modulaire et fonction modulaire *Une fonction modulaire est une fonction faiblement modulaire méromorphe à l'infini.*
Une forme modulaire est une fonction modulaire holomorphe partout (même à l'infini).

Une forme modulaire de poids k est donnée par

1. $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2i\pi nz}$
2. $f(\frac{-1}{z}) = z^k f(z)$

Si $a_0 = 0$ on parle de forme cuspidale.

2.2.2 Réseaux

Définition 7 : Réseau *On appelle réseau un sous-groupe Γ d'un espace vectoriel V qui vérifie une de ces propriétés équivalentes :*

1. *Γ est discret et V/Γ est compact*
2. *Γ est discret et engendre V en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel*
3. *Il existe une $\mathbb{R}$-base de V $(e_1, \cdots, e_n)$ qui est une $\mathbb{Z}$-base de Γ (i.e. $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}e_i$)*

On note

1. $\mathcal{R} = \{\Gamma \text{ réseau de } \mathbb{C} \text{ comme } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}\}$
2. $\mathcal{M} = \{(\omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \mathrm{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0\}$

On définit alors une application

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \Gamma(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \end{aligned}$$

Cette application est surjective.

Propriété 4 : *Nous avons l'isomorphisme suivant*

$$\mathcal{R} \cong \mathcal{M}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

Démonstration. Soit le morphisme Φ définie comme

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \Gamma(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2. \end{aligned}$$

Nous allons vérifier qu'un tel Φ est un isomorphisme.
<u>Φ est bien définie :</u>
Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}$. On définit

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2 \qquad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$$

1. $\mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2' \subseteq \Gamma(\omega_1, \omega_2)$
2. $\begin{cases} \omega_1 = d\omega_1' - b\omega_2' \\ \omega_2 = a\omega_2' - c\omega_1' \end{cases}$ Donc $\Gamma(\omega_1, \omega_2) \subseteq \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$
3. $\mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2' = \mathbb{Z}\omega_1' \oplus \mathbb{Z}\omega_2'$

Alors $\mathbb{Z}\omega_1' \oplus \mathbb{Z}\omega_2' = \Gamma(\omega_1, \omega_2)$.
De plus , on définit $z = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ et $z' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'}$ donc

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = g.z$$

Donc $\mathrm{Im}(z') > 0 \Rightarrow (\omega_1', \omega_2') \in \mathcal{M}$.
<u>Φ est injectif :</u> Soient (ω_1, ω_2) et $(\omega_1', \omega_2') \in \mathcal{M}$ qui définissent le même réseau Γ. Alors, comme ce sont deux $\mathbb{Z}$-base de Γ il existe $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ qui envoie (ω_1, ω_2) sur (ω_1', ω_2') . Donc

$det(g) = \pm 1$.
En posant z et z' de la même façon que précédemment on a

$$\text{sgn}(\text{Im}(z')) = \det(g)\text{sgn}(\text{Im}(z)) > 0$$

car (ω_1, ω_2) et $(\omega_1', \omega_2') \in \mathcal{M}$.
Donc $\det(g) = 1$ et $g \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ce qui achève la preuve.

□

Définition 8 : *On définit l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{R}$ par*

$$\Gamma \mapsto \lambda\Gamma \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Respectivement on a l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{M}$ par

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

On rappelle qu'on appelle G le groupe modulaire définie comme $G = \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$

Propriété 5 : *Il existe une bijection de $\mathcal{R}/\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{H}/G$ induite par le morphisme*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \frac{\omega_1}{\omega_2} \end{aligned}$$

2.2.3 Lien entre réseaux et fonctions modulaires

Soit $F : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On dit que F est de poids k si

$$F(\lambda\Gamma) = \lambda^{-k} F(\Gamma)$$

pour tout réseau Γ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Soient $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}$ et F de poids k. On note

$$F(\omega_1, \omega_2) = F(\Gamma(\omega_1, \omega_2)).$$

On a alors

$$F(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-k} F(\omega_1, \omega_2)$$

Propriété 6 : *$F(\omega_1, \omega_2)$ est invariant sous l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{M}$.*

Le propriété suivante permet de faire le lien entre les réseaux et les fonctions modulaires. Elle est fondamental car c'est ce lien qui permettra plus tard d'exploiter les opérateurs de Hecke pour donner leurs propriétés arithmétiques aux formes modulaires.

Propriété 7 : *Soit $F(\omega_1, \omega_2)$ une fonction de poids k. Alors il existe une fonction modulaire f de poids k associée à $F(\omega_1, \omega_2)$ telle que*

$$F(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

.

Démonstration. Soit $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Par définition de F nous avons

$$\begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2) &= F(\omega_2.\frac{\omega_1}{\omega_2}, \omega_2.1) \\ &= \omega_2^{-k} F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, 1\right) \\ &= \omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \end{aligned}$$

Où

$$f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, 1\right)$$

avec $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{H}$ car $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}$.

De plus, $\forall\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \forall z \in \mathbb{H} \quad g.z = \frac{az+b}{cz+d}$ et on définit

$$z' = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{et} \quad z' = g.z = \frac{\omega_1'}{\omega_2'}$$

De la même manière que dans la proposition 4,

$$\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 = \omega_2(cz + d)$$

Donc

$$F(\omega_1', \omega_2') = \omega_2'^{-k}(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

Or par invariance de F sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'après proposition 6

$$F(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1', \omega_2')$$

En remplaçant les deux cotés de l'égalité précédente nous obtenons que

$$\omega_2^{-k} f(z) = \omega_2'^{-k}(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

ce qui se réécrit

$$f(z) = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

Ce qui achève la preuve. □

La proposition 7 permet d'identifier une fonction modulaire de poids k avec une fonction de poids k sur un réseau.
Un bon exemple de forme modulaire sont les **séries de Eisenstein**. Ces séries sont des objets fondamentaux dans la théorie des formes automorphes, elles nous seront utiles plus tard pour décrire l'espace des fonctions modulaires. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que pour un réseau Γ de $\mathbb{C}$, la série $\sum_{\gamma \neq 0 \in \Gamma} 1/|\gamma|^\sigma$ converge si $\sigma > 2$ (on peut la majorer par la double intégrale $\iint \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\sigma/2}}$).

Définition 9 : Série d'Eisenstein *Soit $k > 1$ et Γ un réseau de $\mathbb{C}$. On appelle série d'Eisenstein de poids k la série*

$$G_k(\Gamma) = \sum_{\gamma \neq 0 \in \Gamma} 1/\gamma^k.$$

Nous pouvons voir G_k comme une fonction sur $\mathcal{M}$ donnée par :

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^k}$$

Et note de la même façon G_k la fonction sur $\mathbb{H}$ donnée grâce à la propriété 7

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k}. \tag{2}$$

Cette fonction est une forme modulaire de poids k [Ser73].
Il est notable que

$$\lim_{\mathrm{Im}(z) \to \infty} G_k(z) = \sum_n \frac{1}{n^k} = 2\zeta(k)$$

donc G_k n'est pas une forme cuspidale.
Un autre exemple de forme modulaire est la fonction Δ donnée par

$$\Delta = (60G_2)^3 - 27(140G_3)^2 \tag{3}$$

qui est une forme cuspidale de poids 12. Cette fonction nous sera également utile pour décrire l'espace des fonctions modulaires.

2.2.4 L'espace des formes modulaires

Nous voulons mieux comprendre l'espace formé par ces fonctions. Pour cela nous suivrons la même construction que [Ser73]. En exploitant les résultats que nous avons montrés sur les stabilisateurs pour le groupe modulaire nous allons montré comment il est possible de décomposer cet espace. Ces décompositions nous permettrons de trouver une formule pour la dimension de l'espace des formes modulaires de poids k. Il sera expliqué plus tard (4.2) quelques problèmes reliés à cette espace donnant naissance à une autre décomposition entre formes anciennes et formes nouvelles. Commençons par rappeler une définition classique d'analyse complexe.

Définition 10 : *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$. On suppose f non identiquement nulle. Soit $p \in \mathbb{H}$. On appelle ordre de f au point p, noté $\nu_p(f)$, le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{f}{(z-p)^n}$ soit holomorphe au point p.*

Remarque.
Il est important de noter les points suivants :

- Soit f une fonction modulaire de poids k. Comme

$$f(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

  Alors $\nu_p(f) = \nu_{g.p}(f)$ pour tout $g \in G$.
- Soit $\tilde{f}$ comme définie dans la définition 5. Alors on définit $\nu_\infty(f)$ l'ordre en q=0 de $\tilde{f}$.

Notre objectif dans cette partie est de comprendre l'espace des formes modulaires. Le théorème suivant est primordial dans cette étude car il permet par la suite de décomposer l'espace des formes modulaires selon les différentes valeurs que peut prendre $\nu_p(f)$.

Théorème 1 : *Soit $p \in \mathbb{H}$. On note e_p l'ordre du stabilisateur de p. Soit f une fonction modulaire de poids k non identiquement nulle. Alors*

$$\nu_\infty(f) + \sum_{p \in \mathbb{H}/G} \frac{1}{e_p} \nu_p(f) = \frac{k}{12}$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que

1. Si $p \equiv i \pmod G$ alors Stab(p)=$\{Id, z \mapsto -\frac{1}{z}\}$ donc $e_p = 2$.
2. Si $p \equiv \rho \pmod G$ alors Stab(p)=$\{Id, z \mapsto \rho z, z \mapsto j^2 z\}$ donc $e_p = 3$.
3. Sinon $e_p = 1$

Montrons désormais que f a un nombre fini de zéros et de pôles $\pmod G$.
f est une fonction modulaire donc il existe $\tilde{f}$ méromorphe qui prolonge f à l'infini. On pose alors $q = \exp 2i\pi z$ avec $z \in \mathbb{H}$. On prend $0 < |q| < 1$ et $\tilde{f}$ est méromorphe en $q = 0$ donc

$$\exists\ r > 0\ |\forall q \in \mathbb{D}_r = \{|q| < r\}, \exists\ g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}_r)\ \tilde{f}(q) = q^{\nu_\infty(f)} g(q)$$

avec $g(0) \neq 0$.

Comme g est holomorphe sur $\mathbb{D}_r$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $g(q) \neq 0 \ \ \forall q \in \mathbb{D}_\varepsilon$.

Donc, par un choix judicieux de $r > 0$, $\tilde{f}$ n'a ni zéro ni pôle pour $q \in \mathbb{D}_r$.

$$|q| < r \iff \mathrm{Im}(z) > \frac{\log(1/r)}{2\pi}$$

.

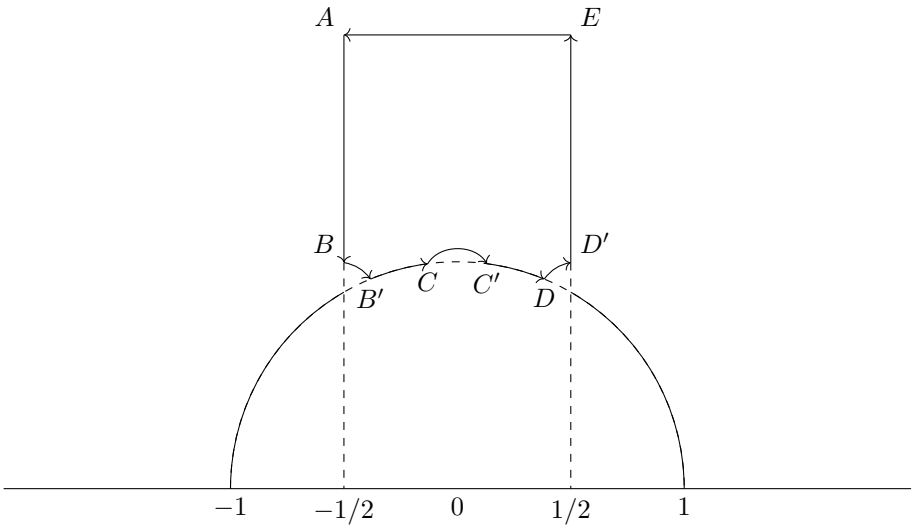
Alors f ne possède pas de zéro ni de pôle pour $\mathrm{Im}(z) > \frac{\log(1/r)}{2\pi}$.

D'après le théorème de zéros isolés, f possède un nombre fini de zéros et de pôle $\pmod G$.
Montrons maintenant la formule souhaitée. On note $\mathcal{D}$ le domaine fondamental. Soit $p \in \mathcal{D}$,

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{f}, p) = \nu_p(f).$$

On suppose dans un premier temps que f ne possède pas de zéro ni de pôle sur la bordure de $\mathcal{D}$ sauf possiblement en $i, \rho, -\bar{\rho}$. Soit $\mathcal{C}$ un contour qui contient les zéros et pôles de f non congru à i ou $\rho \pmod G$.
Par le théorème des résidus

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{df}{f} = \sum_{p \in \mathbb{H}/G}{}^* v_p(f)$$



Pour commencer, étudions $\int_E^A \frac{df}{f}$.

Le segment $[E, A]$ est situé dans la zone $\mathrm{Im}(z) > \frac{\log(1/r)}{2\pi}$ étudié précédemment. On effectue le changement de variable $q = \exp 2\pi i z$. Alors, on note ω le cercle centré en 0 qui ne comprend aucun zéro ni pôle de f. Donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_E^A \frac{df}{f} = -\frac{1}{2i\pi}\int_\omega \frac{df}{f} = -\nu_\infty(f)$$

Etudions désormais $\int_B^{B'} \frac{df}{f}$.

Soit C le cercle qui contient B et B'. Quand le rayon de ce cercle tend vers 0 alors l'angle entre B et B' tend vers $\frac{\pi}{3}$. En effet, l'angle entre la droite verticale passant par B et la tangente au cercle unité en B' est d'angle $\frac{\pi}{3}$. Alors $\int_B^{B'} \frac{df}{f} \to -\frac{1}{6}\int_C \frac{df}{f}$ (le signe - venant de l'orientation). Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_B^{B'} \frac{df}{f} \to -\frac{1}{6}\nu_\rho(f)$$

De la même manière

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C^{C'} \frac{df}{f} \to -\frac{1}{6}\nu_\rho(f)$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C^{C'} \frac{df}{f} \to -\frac{1}{2}\nu_i(f)$$

On rappelle que

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2 = (ST)^3 = 1\rangle$$

Avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall z \in \mathcal{D}, f(T.z) = f(z)$ et $T([A,B]) = T([E,D'])$. On obtient alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_A^B \frac{df}{f} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{D'}^E \frac{df}{f}$$

$\forall z \in \mathcal{D}, f(S.z) = z^k f(z)$ et $S([B',C] = S([D,C'])$. Ainsi,

$$\frac{df(Sz)}{f(Sz)} = k\frac{dz}{z} + \frac{df(z)}{f(z)}$$

Finalement

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{B'}^C \frac{df}{f} + \frac{1}{2i\pi}\int_{C'}^D \frac{df}{f} = \frac{1}{2i\pi}\int_{B'}^C \frac{df}{f} - \frac{df(Sz)}{f(Sz)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{B'}^C -k\frac{dz}{z} \to \frac{k}{12}$$

C'est pourquoi en rassemblant ces résultats nous obtenons

$$\nu_\infty(f) + \sum_{p\in\mathbb{H}/G} \frac{1}{e_p}\nu_p(f) = \frac{k}{12}$$

Si f possède un zéro ou un pôle λ sur la bordure du contour, alors on modifie le contour en contournant λ. D'après la périodicité de $\mathcal{D}$, λ et $T.\lambda$ sont des zéros ou pôles donc, comme ces deux points sont d'indices opposés, d'après le théorème des résidus, ce point n'a pas d'influence dans le calcul précédent. Ce qui achève la preuve. □

Remarque.
Cette dernière expression s'écrit aussi

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + {\sum_{p\in\mathbb{H}/G}}^* \frac{1}{e_p}\nu_p(f) = \frac{k}{12}$$

Définition 11 : *Soit $k \in \mathbb{N}$ et Γ un réseau de $\mathbb{C}$. On appelle $\mathcal{M}_k$ l'espace vectoriel des formes modulaires de dimension k holomorphes sur $\mathbb{H} \cup \{+\infty\}$. On appelle S_k le sous espace de $\mathcal{M}_k$ composé des formes cuspidales, c'est-à-dire*

$$\mathrm{S}_k = \{f(z) = \sum_n a_n e^{2i\pi nz} \in \mathcal{M}_k \mid a_0 = 0\} = \{f \in \mathcal{M}_k \mid f(\infty) = 0\}$$

On appelle $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des formes modulaires. Pour le choix de réseau $\Gamma = \Gamma_0(q)$ on note l'espace des formes cuspidales de poids k $\mathrm{S}_k(q)$ et l'espace des formes modulaires de poids k $\mathcal{M}_k(q)$

Nous pouvons donner une décomposition de $\mathcal{M}_k$ en se servant de S_k. Pour cela il est important de se souvenir que les séries d'Eisenstein ne sont pas des formes cuspidales.

Propriété 8 : *Soit $k \geq 1$, on note G_k la série d'Eisenstein de poids k pour un certain réseau Γ. Nous avons la décomposition*

$$\mathcal{M}_k = \mathrm{S}_k \oplus \mathbb{C}.G_k\,.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{M}_k$. On note de la même manière son développement de Fourier $f(z) = \sum_n a_f(n) e^{2i\pi nz}$. Soit $\lambda = \frac{a_f(0)}{2\zeta(k)}$ et $g = f - \lambda G_k$. Alors $a_g(0) = a_f(0) - \lambda.2\zeta(k) = 0$ donc $g \in \mathrm{S}_k$. C'est pourquoi

$$\mathcal{M}_k = \mathrm{S}_k + \mathbb{C}.G_k$$

De plus $G_k \notin \mathrm{S}_k$ donc $\mathrm{S}_k \cap \mathbb{C}.G_k = \{0\}$ ce qui nous permet de conclure que

$$\mathcal{M}_k = \mathrm{S}_k \oplus \mathbb{C}.G_k\,.$$

Ce qui achève la preuve. □

De plus, nous pouvons décomposer l'espace des formes linéaire selon leur poids :

Propriété 9 : *On a :*

1. $\mathcal{M} = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathcal{M}_k$
2. $\mathcal{M}$ *est une algèbre graduée vérifiant* $\mathcal{M}_k \mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}_{k+l}$

Nous pouvons également calculer la dimension de chaque $\mathcal{M}_k$

Théorème 2 : *Soit $\mathcal{M}_k$ l'espace vectoriel des formes modulaires de poids k, alors*

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} [k/12] & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ [k/12] + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Démonstration. Nous allons considérer $\mathcal{M}_k$ pour $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$. Rappelons la formule donnée par le théorème 1 :

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_{p \in \mathbb{H}/G}^{*} \frac{1}{e_p}\nu_p(f) = \frac{k}{12} \quad (\star)$$

- Si $k = 0$: d'après $(\star)$, $\nu_z(f) = 0$ pour tout z. Alors $f(z)$ est constant donc

$$\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$$

- Si $k = 2$: d'après $(\star)$, $\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_{p \in \mathbb{H}/G}^{*} \frac{1}{e_p}\nu_p(f) = \frac{1}{6}$. Cela est impossible donc il n'y a aucune forme modulaire non nulle de poids 2 donc

$$\mathcal{M}_2 = 0$$

- Si $k = 4$: La seule solution possible pour $(\star)$ est $\nu_\rho(f) = 1$ et $\nu_z(f) = 0$ pour tout $z \neq \rho$. Donc une forme non nulle de poids 4 possède un unique zéro simple en $z = \rho$. De plus G_4 vérifie cette condition et $\forall f \in \mathcal{M}_4,\ f/G_4$ est de poids 0 (donc constante). Alors

$$\mathcal{M}_4 = G_4\mathbb{C}$$

- Si $k = 6$: La seule solution possible pour $(\star)$ est $\nu_i(f) = 1$ et $\nu_i(f) = 0$ pour tout $z \neq i$. Donc une forme non nulle de poids 6 possède un unique zéro simple en $z = i$. De plus G_6 vérifie cette condition et $\forall f \in \mathcal{M}_6,\ f/G_6$ est de poids 0 (donc constante). Alors

$$\mathcal{M}_6 = G_6\mathbb{C}$$

- Si $k = 8$: La seule solution possible pour $(\star)$ est $\nu_\rho(f) = 2$ et $\nu_i(f) = 0$ pour tout $z \neq \rho$. Donc une forme non nulle de poids 8 possède un unique zéro double en $z = \rho$. De plus G_4^2 vérifie cette condition et $\forall f \in \mathcal{M}_8,\ f/G_4^2$ est de poids 0 (donc constante). Alors

$$\mathcal{M}_8 = G_4^2\mathbb{C}$$

- Si $k = 10$: La seule solution possible pour $(\star)$ est $\nu_i(f) = 1$, $\nu_\rho(f) = 1$ et $\nu_i(f) = 0$ pour tout $z \neq i, \rho$. Donc une forme non nulle de poids 10 possède un zéro simple en $z = i$ et en $z = \rho$. De plus G_4G_6 vérifie cette condition et $\forall f \in \mathcal{M}_{10},\ f/G_4G_6$ est de poids 0 (donc constante). Alors

$$\mathcal{M}_{10} = G_4G_6\mathbb{C}$$

- Si $k = 12$: Soit $f \in \mathcal{M}_{12}$, comme $G_{12}(\infty) \neq 0$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $(z \mapsto f(z) - cG_{12}(z))(\infty) = 0$. Donc $z \mapsto \frac{f(z)-cG_{12}(z)}{\Delta(z)}$ est de poids 0 (donc constante). Alors

$$\mathcal{M}_{12} = \Delta\mathbb{C} \oplus G_{12}\mathbb{C}$$

- Pour $k \geqslant 12$, on obtient alors par récurrence

$$\mathcal{M}_k = \Delta\mathcal{M}_{k-12} \oplus G_k\mathbb{C}$$

  ce qui nous donne la formule voulue.

Ce qui achève la preuve. □

2.3 Opérateurs de Hecke

Le lien entre les formes modulaires et les fonctions L se fait grâce aux opérateurs de Hecke. Ces opérateurs agissent sur les formes modulaires, leur donnant des propriétés arithmétiques. Nous allons commencer par étudier ces opérateurs puis nous ferons le lien avec les formes modulaires.

Définition 12 : *Soit E un ensemble, X_E le groupe abélien libre généré par E. On appelle correspondance sur E à coefficients entiers un homomorphisme $T : X_E \to X_E$. De plus pour chaque $x \in E$*

$$T(x) = \sum_{y \in E} n_y(x)y \qquad n_y(x) \in \mathbb{Z}$$

où $n_y(x) \neq 0$ pour un nombre fini d'éléments.

Soit $F : E \to \mathbb{Z}$. On peut prolonger F par linéarité sur X_E. On note encore F ce prolongement. Alors, l'action de T sur F, noté TF, est la restriction sur E de $F \circ T$.

Définition 13 : Opérateur de Hecke $T(n)$ *Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $T(n)$ la correspondance sur $\mathcal{R}$ qui agit de la manière suivante :*

$$\forall \Gamma \in \mathcal{R},\ T(n)\Gamma = \sum_{(\Gamma:\Gamma')=n} \Gamma'$$

Définition 14 : Opérateur d'homothétie *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on définit l'opérateur d'homothétie R_λ définie par*

$$\forall \Gamma \in \mathcal{R},\ R_\lambda\Gamma = \lambda\Gamma$$

La propriété suivante est très importante. Elle met en lumière la multiplicativité des opérateurs de Hecke. C'est cette multiplicativité qui se transmet aux valeurs propres des formes modulaires. De nombreux résultats s'appuieront sur cette propriété.

Propriété 10 : *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(m,n) = 1$. Soit p un nombre premier. Alors :*

1. $R_\lambda R_\mu = R_{\lambda\mu}$
2. $R_\lambda T(n) = T(n) R_\lambda$
3. $T(m)T(n) = T(mn)$
4. $T(p^n)T(p) = T(p^{n+1}) + pT(p^{n-1})R_p$

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 sont évidentes.
Preuve de 3 :
Soit $\Gamma \in \mathcal{R}$. Soit Γ'' un sous réseau de Γ d'indice mn. Alors, Γ/Γ'' est un groupe abélien fini d'ordre mn donc d'après le théorème de structure, il existe une unique décomposition

$$\Gamma/\Gamma'' \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \qquad \prod_{i=1}^{r} d_i = mn$$

Or $(m,n) = 1$ alors nous pouvons décomposer ce produit entre $d_i \mid m$ et $d_i \mid n$. Ainsi

$$\prod_{\substack{i=1 \\ d_i \mid m}}^{r} d_i = m \qquad \prod_{\substack{i=1 \\ d_i \mid n}}^{r} d_i = n$$

On réarrange les d_i de telle manière que

$$m = \prod_{i=1}^{l} d_i \qquad n = \prod_{i=l+1}^{r} d_i$$

Or par le théorème de structure il existe G_1 et G_2 groupes abéliens d'ordre respectif n et m tels que $G_1 \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/d_l\mathbb{Z}$ et $G_2 \cong \mathbb{Z}/d_{l+1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.
Ainsi Γ/Γ'' se décompose de façon unique en somme direct d'un groupe d'ordre m et un groupe d'ordre n. Finalement, comme Γ'' est un sous réseau d'indice mn de Γ, par théorème d'isomorphisme, il existe un unique sous réseau Γ' de Γ contenant Γ'' vérifiant $(\Gamma : \Gamma') = n$ et $(\Gamma' : \Gamma'') = m$.
Preuve de 4 :
Soit $\Gamma \in \mathcal{R}$. Alors $T(p^n)T(p)\Gamma, T(p^{n+1})\Gamma, T(p^{n-1})R_p\Gamma$ sont des combinaisons linéaires de sous-réseaux de Γ.

$$(\star) \qquad T(p^n)T(p)\Gamma = T(p^n) \sum_{(\Gamma:\Gamma')=p} \Gamma' = \sum_{(\Gamma:\Gamma')=p} \sum_{(\Gamma':\Gamma'')=p^n} \Gamma'' = \sum_{(\Gamma:\tilde{\Gamma})=p^{n+1}} a\tilde{\Gamma}$$

$$(\triangle) \qquad T(p^{n-1})R_p\Gamma = \sum_{(p\Gamma:\Gamma')=p^{n-1}} \Gamma' = \sum_{(\Gamma:\Gamma^*)=p^{n+1}} c\Gamma^* \qquad \text{car } [\Gamma : p\Gamma] = p^2$$

En dénombrant les sous réseaux d'indice $n+1$ dans chaque membre de l'équation 4 on obtient la relation

$$a = 1 + pc$$

Soit Γ'' un sous réseau d'indice $n+1$ de Γ, on distingue 2 cas :

1. Si $\Gamma'' \not\subset p\Gamma$. Alors, dans $(\triangle)$ on obtient $c = 0$. Soit Γ' un sous réseau d'indice p de Γ. Alors
$$\Gamma/\Gamma' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
Soit $x \in p\Gamma$, il existe $y \in \Gamma$ tel que $x = py$.
On dénote par π la projection canonique sur Γ/Γ'. Alors
$$\pi(x) = p\pi(y)$$
Or Γ/Γ' est d'ordre p donc par le théorème de Lagrange,
$$\pi(x) = \bar{0}$$
Donc
$$x \in \ker(\pi) = \Gamma'$$
C'est pourquoi $p\Gamma \subset \Gamma'$.
$\pi(\Gamma')$ est un sous-groupe d'indice p de $\Gamma/p\Gamma$ et $\pi(\Gamma'') \subset \pi(\Gamma')$ est d'indice p.
Or $\Gamma'' \not\subset p\Gamma$, $\Gamma'' \subset \Gamma'$ et $(\Gamma : \Gamma')(\Gamma' : \Gamma'') = p^2$ donc a=1 ce qui donne la relation voulue.
2. Si $\Gamma'' \subset p\Gamma$ alors par construction $c = 1$.
Soit Γ' un sous réseau d'indice p de Γ. Alors $p\Gamma \subset \Gamma'$ donc $\Gamma'' \subset \Gamma'$. Ainsi a=p+1 (nombre de sous-groupe d'ordre p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$) ce qui donne la relation voulue.

Ce qui achève la preuve. □

La façon dont les opérateurs de Hecke agissent sur les développements de Fourier des formes modulaires est expliquée à travers la propriété suivante :

Propriété 11 : *Soit f une fonction modulaire de poids k. On note*
$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m)q^m$$
Alors $T(n)f$ est une fonction modulaire de poids k et
$$T(n)f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma(m)q^m$$
avec
$$\gamma(m) = \sum_{a\geqslant 1, a|(n,m)} a^{k-1}c(\frac{mn}{a^2})$$

Les formes propres pour ces opérateurs de Hecke ont des propriétés mimant celles des opérateurs de Hecke, il est donc naturel de chercher si de telles formes propres existent et quelles propriétés elles possèdent.

Théorème 3 : *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n$ une forme modulaire de poids $k > 0$ non identiquement nulle. On suppose que f est une fonction propre de chaque $T(n)$ donc*
$$\exists\lambda(n) \in \mathbb{C} \mid T(n)f = \lambda(n)f \quad \forall n \geqslant 1$$
Alors

1. $c(1) \neq 0$

2. *Si* $c(1) = 1$ *alors*

$$c(n) = \lambda(n) \quad \forall n > 1$$

On en déduit en particulier des informations sur les coefficients de Fourier qui découlent des propriétés des opérateurs de Hecke ([Ser73]) :

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses*

$$c(m)c(n) = c(mn) \quad si\ (m,n) = 1$$

$$c(p)c(p^n) = c(p^{n+1}) + p^{k-1}c(p^{n-1})$$

Soit

$$L(s,f)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$$

la série de Dirichlet définie par les $c(n)$ pour $\mathrm{Re}(s) > k$. Grâce aux propriétés sur les coefficients de Fourier on en peut réécrire $L(s,f)$ sous la forme suivante :

Propriété 12 : *Soit* f *une forme modulaire de poids* k *non identiquement nulle qui est fonction propre de* $T(n)$*, alors*

$$L(s,f)(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - c(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}}$$

Démonstration. Par multiplicativité de $n \mapsto c(n)$, on utilise la décomposition en facteurs premiers de n pour obtenir

$$L(s,f)(s) = \prod_{\text{p prime}} \sum_{n=1}^{\infty} c(p^n)p^{-ns}$$

On pose $p^{-s} = T$ et on veut montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(p^n)T^n = \frac{1}{\Phi_{f,p}(T)} \qquad \text{avec } \Phi_{f,p}(T) = 1 - c(p)T + p^{k-1}T^2$$

On pose alors

$$\Psi(T) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c(p^n)T^n\right)(1 - c(p)T + p^{k-1}T^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

On regarde les coefficients de T^n :

— n=1 : $a_1 = c(p) - c(p) = 0$

— $n \geqslant 1$: on regarde le coefficient a_{n+1} :

$$a_{n+1} = c(p^{n+1}) - c(p)c(p^n) + p^{k-1}c(p^{n-1}) = 0$$

Donc $\Psi = 1$ et

$$L(s,f)(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - c(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}}$$

Ce qui achève la preuve. □

2.4 Rappel sur les fonctions L

Les fonctions L sont les objets principaux de notre étude. Nous souhaitons dans ce mémoire étudier la distribution de leurs zéros. Afin d'effectuer cette étude nous rappelons quelques-unes de leurs propriétés qui vont nous servir par la suite.

2.4.1 Fonctions L et conducteur analytique

Nous allons dans un premier temps donner une définition plus abstraite de ce qu'est une fonction L. Nous notons $L(s, f)$ une fonction L où la dépendance en f aura un sens plus profond dans le cas des fonctions L associées aux formes modulaires (comme défini précédemment).
En suivant la définition suggérée dans [IK04], nous appelons $L(s, f)$ une fonction L si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $L(f, s)$ est une série de Dirichlet qui possède un produit d'Euler de degré $d \geqslant 1$,

$$L(f,s) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \alpha_1(p)p^{-s})^{-1} \cdots (1 - \alpha_d(p)p^{-s})^{-1}$$

  avec $\lambda_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$. La série et le produit doivent converger pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.
- Il existe un facteur $\gamma(f, sz)$ défini par

$$\gamma(f,s) = \pi^{-ds/2} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(\frac{s + \kappa_j}{2}\right)$$

  avec $\kappa_j \in \mathbb{C}$. Ces nombres sont réels ou viennent par pairs conjuguées.
- Il existe un entier $ıı(f) \geqslant 1$ appelé conducteur de $L(f, s)$ tel que $\alpha_i(p) \neq 0$ pour $p \nmid ıı(f)$ et $1 \leqslant i \leqslant d$. Un tel nombre premier $p \nmid ıı(f)$ est appelé non ramifié.

On définit à partir de ça la fonction L complétée

$$\Lambda(f,s) = ıı(f)^{s/2} \gamma(f,s) L(f,s).$$

Cette fonction est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et doit posséder un prolongement analytique méromorphe avec au plus des pôles en $s = 0$ et $s = 1$ ([IK04]). Enfin, la fonction complétée doit satisfaire l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Lambda(f,s) = \varepsilon(f)\Lambda(\bar{f}, 1 - s).$$

où $\bar{f}$ est le dual de f pour lequel $\lambda_{\bar{f}}(n) = \bar{\lambda}_f(n)$, $\gamma(\bar{f}, s) = \gamma(f, s)$, $ıı(\bar{f}) = ıı(f)$ et $\varepsilon(f)$ est un nombre complexe de module 1. La valeur de ce facteur $\varepsilon(f)$ est importante pour la distribution des zéros, par exemple si $\varepsilon(f) = -1$ cette équation force l'existence d'un zéro en $s = 1/2$.
Enfin, de nombreux résultats peuvent s'exprimer en définissant un objet appelé conducteur analytique $q(f, s)$,

$$q(f,s) = ıı(f) \prod_{j=1}^{d} (|s + \kappa_j| + 3),$$

on note aussi

$$q(f) = q(f,0) = ıı(f) \prod_{j=1}^{d} (|\kappa_j| + 3).$$

2.4.2 Fonctions L de Hecke

Nous allons plus particulièrement étudier les fonctions L associées aux opérateurs de Hecke comme nous les avons définies plus tôt.

Définition 15 : *Soit $f \in H_k^*(N)$, on associe a f la fonction L de Hecke définie par*

$$L(s,f) = \sum_1^\infty \lambda_f(n) n^{-s}$$

En utilisant les propriétés de Hecke, nous pouvons associer à $L(s,f)$ le produit eulérien $L(s,f) = \prod_p L_p(s,f)$ avec

$$L_p(s,f) = (1 - \lambda_f(p)p^{-s} + \chi_0(p)p^{-2s})^{-1}$$

Où χ_0 est le caractère principal modulo N.
On définit également

$$L_\infty(s,f) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right)$$

Alors en posant $\Lambda(s,f) = L_\infty(s,f)L(s,f)$, cette fonction est entière et vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Lambda(s,f) = \varepsilon_f \Lambda(1-s,f)$$

Avec

$$\varepsilon_f = i^k \mu(N)\lambda_f(N)N^{1/2} = \pm 1 \tag{4}$$

.

On peut de plus écrire les facteurs locaux

$$L_p(s,f) = \left(1 - \alpha_f(p)p^{-s}\right)^{-1}\left(1 - \beta_f(p)p^{-s}\right)^{-1}$$

Avec α_f et β_f vérifiant :

1. $\alpha_f(p) + \beta_f(p) = \lambda_f(p)$
2. $\alpha_f(p)\beta_f(p) = \chi_0(p)$
3. Si $p \nmid N$, $|\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1$ (Ramanujan conjecture)

Propriété 13 : *Pour tout p premier et $m \geqslant 0$*

$$\lambda_f(p^m) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant m} \alpha_f(p)^m \beta_f(p)^{m-l}$$

Démonstration. D'après les relations de Hecke

$$\lambda_f(p^m) = \lambda_f(p)\lambda_f(p^{m-1}) - \lambda_f(p^{m-2})$$

En posant $u_n = \lambda(p^m)$ nous obtenons une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique

$$X^2 - \lambda_f(p)X + 1 = (X - \alpha_f(p))(X - \beta_f(p))$$

Alors

$$u_m = A\alpha_f(p)^m + B\alpha_f(p)^m$$

Avec

1. $u_0 = \lambda_f(p) = 1 \Rightarrow A + B = 1$
2. $u_1 = \lambda_f(p) = \alpha_f(p) + \beta_f(p) \Rightarrow A\alpha_f(p) + B\beta_f(p) = \alpha_f(p) + \beta_f(p)$

Alors

$$A = \frac{\alpha_f(p)}{\alpha_f(p) - \beta_f(p)} \qquad B = \frac{-\beta_f(p)}{\alpha_f(p) - \beta_f(p)}$$

Donc

$$u_m = \lambda_f(p^m) = \frac{\alpha_f(p)^{m+1} - \beta_f(p)^{m+1}}{\alpha_f(p) - \beta_f(p)} = \sum_{0 \leqslant l \leqslant m} \alpha_f(p)^m \beta_f(p)^{m-l}$$

Ce qui achève la preuve. □

La fonction Γ possède de nombreuses propriétés bien connues. Elle possède en particulier une équation fonctionnelle. Cette propriété nous sert à réécrire $L_\infty(s, f)$.

Propriété 14 : Formule de duplication *La fonction* Γ *vérifie l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2z)\sqrt{\pi}2^{1-2z}$$

Démonstration. Soit

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

On montre dans un premier temps que

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^\infty y^{z-1}e^{-u}du \int_0^\infty v^{w-1}e^{-v}dv \\
&= 4\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-x^2}dx \int_0^\infty y^{2w-1}e^{-y^2}dy \\
&= 4\iint_{[0,\infty[^2} x^{2z-1}y^{2w-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2(z+w)-1}\cos(\theta)^{2z-1}\sin(\theta)^{2w-1}e^{-r^2}drd\theta \\
&= \int_0^\infty x^{z+w-1}e^{-x}dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta)^2)^{w-1}(\cos(\theta)^2)^{z-1}2\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta \\
&= \Gamma(z+w)\int_0^1 t^{w-1}(1-t)^{z-1}dt \\
&= \Gamma(z+w)B(z, w)
\end{aligned}$$

Finalement

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

En prenant $z = w$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} &= B(z,z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^{z-1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{z-1} dx \\
&= 2^{1-2z}\int_{-1}^1 (1-x^2)^{z-1}dx \\
&= 2^{1-2z}\int_0^1 u^{1/2-1}(1-u)^{z-1}du \\
&= 2^{1-2z}B(\frac{1}{2},z) \\
&= 2^{1-2z}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} \\
&= 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z)$$

Ce qui achève la preuve. □

En appliquant cette formule à $L_\infty(s,f)$ nous obtenons une nouvelle forme

Corollaire 2.

$$L_\infty(s,f) = \left(\frac{2^k}{8\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\sqrt{N}}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{k-1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{k+1}{4}\right)$$

3 Formule des traces de Petersson

La formule des traces de Petersson est un outil puissant qui permet de faire le lien entre les propriétés spectrales et les propriétés arithmétiques des formes modulaires. C'est une formule fondamentale pour notre étude. Elle affirme que

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} \omega_f(n)\overline{\omega_f(m)} = \delta_{m,n} + 2\pi i^k \sum_{\substack{c>0 \\ q|c}} c^{-1}S(m,n,c)J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right).$$

Nous allons expliquer les différentes composantes de cette formule puis nous tâcherons de la démontrer.

3.1 Sommes de Kloosterman, fonctions de Bessel et fonctions diviseurs

Au cours de notre étude, certaines fonctions apparaissent naturellement au cours des calculs. Nous allons dans cette partie donner un peu de contexte aux plus importantes d'entre-elles. Ces fonctions vont porter des informations arithmétiques ou spectrales qui vont pouvoir être exploitées plus tard.

3.1.1 Sommes de Kloosterman

On s'intéresse aux sommes de Kloosterman. Elles apparaissent dans la formule des traces de Petersson et nous allons regarder dans cette partie comment les borner. La borne triviale étant $S(m,n,c) \ll c$ nous allons voir comment il est possible d'améliorer ce résultat.

Définition 16 : Somme de Kloosterman *On appelle somme de Kloosterman la somme*

$$S(m,n,c) = \sideset{}{^*}\sum_{ad\equiv 1 \ (mod\ c)} e\left(\frac{ma+nd}{c}\right)$$

Elles possèdent les propriétés suivantes, ce qui nous sera utile pour les borner :

Propriété 15 : *Soient m,n,c,a des entiers positifs. Alors S vérifie les propriétés suivantes :*

1. $S(m,n,c) = S(n,m,c)$
2. *Si* $(a,c)=1$, $S(am,n,c) = S(n,am,c)$
3. *(Identité de Selberg)* $S(m,n,c) = \sum_{d|(c,m,n)} dS(mnd^{-2},1,cd^{-1})$

Démonstration. Les points 1. et 2. suivent de la définition de S, nous allons nous concentrer sur l'identité de Selberg. Pour cela nous allons utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 3. *On note $P(q)$ le fait que l'identité de Selberg est vraie pour tout $m,n \in \mathbb{Z}$ et pour c=q. Soient $q_1,q_2 \in \mathbb{N}$ avec $(q_1,q_2)=1$ alors $P(q_1)$ et $P(q_2)$ implique $P(q_1q_2)$.*

Démonstration. On note $q=q_1q_2$, soient $m,n \in \mathbb{Z}$. Soit $x \in \mathbb{Z}$. D'après le théorème de Bézout, il existe x_1,x_2 uniquement déterminés tels que

$$x = x_1q_2 + x_2q_1$$

Par ailleurs, on a le système de congruence suivant $\begin{cases} x\bar{x} = 1 \ (\text{mod } q_1) \\ x\bar{x} = 1 \ (\text{mod } q_2) \end{cases}$

Donc

$$\bar{x} = \overline{x_1q_2} \ (\text{mod } q_1) \qquad \bar{x} = \overline{x_2q_1} \ (\text{mod } q_2)$$

D'après le théorème des restes chinois :

$$\bar{x} = \bar{q_2}^2\bar{x_1}q_2 + \bar{q_1}^2\bar{x_2}q_1 \ (\text{mod } q)$$

Donc

$$e\left(\frac{mx+n\bar{x}}{q}\right) = e\left(\frac{mx_1+n\bar{q_2}^2\bar{x_1}}{q_1}\right)e\left(\frac{mx_2+n\bar{q_1}^2\bar{x_2}}{q_2}\right)$$

C'est pourquoi

$$S(m,n,c) = S(m,n\bar{q_2}^2,q_1)S(m,n\bar{q_1}^2,q_2)$$

On applique $P(q_1)$ et $P(q_2)$ ce qui nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} S(m,n,q) &= \sum_{\substack{d_1|(m,n\bar{q_2}^2,q_1)\\ d_2|(m,n\bar{q_1}^2,q_2)}} d_1 d_2 S\big(1, \frac{mn\bar{q_2}^2}{d_1^2}, \frac{q_1}{d_1}\big) S\big(1, \frac{mn\bar{q_1}^2}{d_2^2}, \frac{q_2}{d_2}\big) \\ &= \sum_{\substack{d_1|(m,n,q_1)\\ d_2|(m,n,q_2)}} d_1 d_2 S\big(1, \frac{mn\bar{q_2}^2 d_2^2}{d_2^2 d_1^2}, \frac{q_1}{d_1}\big) S\big(1, \frac{mn\bar{q_1}^2 d_1^2}{d_1^2 d_2^2}, \frac{q_2}{d_2}\big) \end{aligned}$$

Comme $(q_1, q_2) = 1$ alors $(m, n\bar{q_2}^2, q_1) = (m, n, q_1)$, $(m, n\bar{q_1}^2, q_2) = (m, n, q_2)$ par le théorème de Gauss. On pose $d = d_1 d_2$ donc

$$S(m,n,q) = \sum_{d|(m,n,q)} d S\big(1, \frac{mn}{d^2}, \frac{q}{d}\big)$$

Ce qui achève la preuve. □

Lemme 4. *$P(p^\alpha)$ est vraie pour tout p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$*

Démonstration. Soit p un nombre premier. On effectue une récurrence sur α :
Si $\alpha = 0$ le résultat est évident donc on suppose $\alpha \geqslant 1$.
Si $\alpha = 1$ et $P(p^{\alpha-1})$. On pose $q = p^\alpha$ et soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Si $(m, p) = 1$ ou $(n, p) = 1$:

$$\begin{aligned} S(m,n,c) &= \sum_{ad=1 \pmod q} e\left(\frac{ma+nd}{q}\right) \\ &= \sum_{\frac{ad}{m}=1 \pmod q} e\left(\frac{a+mnd}{q}\right) \\ &= S(1, mn, q) \end{aligned}$$

Ce qui correspond à l'identité de Selberg dans ce cas. Pour la suite on peut donc supposer que p divise m et n. En utilisant l'hypothèse de recurrence il faut montre

$$S(m,n,q) = S(1,mn,q) + pS\big(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}, \frac{q}{p}\big)$$

Si $\alpha = 1$, on a $q = p$.
La condition $ad = 1 \pmod p$ signifie que a est inversible. Il y a $p-1$ inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. De plus comme p divise m et n on note $m = pu \quad n = pv$.
Donc

$$S(m,n,p) = \sum_{k=1}^{p-1} e(ku + v\bar{k}) = p - 1$$

$$S(1,mn,p) = \sum_{k=1}^{p-1} e\left(\frac{k}{p}\right) = -1$$

$$S\left(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}, 1\right) = e(uv) = 1$$

Donc l'inégalité de Selberg est vrai pour $\alpha = 1$.
On suppose pour la suite $\alpha \geqslant 2$:
Comme $(x,q) = 1 \iff (x, \frac{q}{p}) = 1$, on a

$$S(m,n,c) = pS\left(\frac{m}{p}, \frac{n}{p} n \frac{q}{p}\right)$$

Alors, on obtient $S(1, mn, q) =$. Alors on souhaite montrer

$$S(1,r,q) = 0 \qquad p|r \quad \alpha \geqslant 2$$

Par définition

$$S(1,r,q) = \sum_{x \pmod q} e\left(\frac{x + r\bar{x}}{q}\right)$$

Soit $\varphi : x \mapsto x + r\bar{x}$. Si $\varphi(x) = \varphi(y) \pmod q$ avec $(x,q) = (y,q) = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(y) &= 0 \pmod q \\ (x-y) + r(\bar{x} - \bar{y}) &= 0 \pmod q \\ xy(x-y) + r(y-x) &= 0 \pmod q \\ (xy - r)(x-y) &= 0 \pmod q \end{aligned}$$

Or $p \mid r$ donc $r \neq 1 \pmod q \Rightarrow (xy - r) \neq 0 \pmod q$
Donc

$$x = y \pmod q$$

Alors φ est injective mod q donc

$$\begin{aligned} S(1,r,q) &= \sum_{k \pmod q}^{*} e\left(\frac{k}{q}\right) \\ &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant q} e\left(\frac{k}{q}\right) - \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ p|k}} e\left(\frac{k}{q}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Alors, en utilisant la décomposition en nombre premier et les deux lemmes nous obtenons l'identité de Selberg. □

Une première borne sur ces sommes peut-être obtenue en considérant leur moment d'ordre 4. Cette propriété vient de Kuznetsov.

Propriété 16 : *Soit p un nombre premier. Alors, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \nmid 2mn$,*

$$|S(m,n,p)| < 2p^{\frac{3}{4}}$$

Démonstration. On note $V_k(p) = \sum_{a \pmod p} S^k(a,1,p)$

Or $S(am,n,p) = S(m,an,p)$ si $(a,p)=1$ donc

$$\begin{aligned}(p-1)V_k(p) &= \sum_{a,b\not\equiv 0 \pmod p} S^k(a,b,p) \\ &= \sum_{a \pmod p}\sum_{b \pmod p} S^k(a,b,p) - T(a\equiv 0[p]) - T(b\equiv 0[p]) - T(ab\equiv 0[p])\end{aligned}$$

$ab \equiv 0 \pmod p \Rightarrow S^k(0,0,p) = \left(\sum_1^{p-1} 1\right)^k = (p-1)^k$

$a \equiv 0 \pmod p \Rightarrow S^k(0,b,p) = \left(\sum_{x[p]} e\left(\frac{\bar{x}b}{p}\right)\right)^k = (-1)^k$

On a $(p-1)$ possibilités (a étant fixé il reste $p-1$ choix pour b). On effectue la même chose pour le cas $b \equiv 0 \pmod p$. Alors

$$(p-1)V_k(p) = \sum_{a,b \pmod p} S^k(a,b,p) - (p-1)^k - 2(-1)^k(p-1)$$

De plus,

$$\left(\sum_{x[p]} e\left(\frac{ax+b\bar{x}}{p}\right)\right)^k = \sum_{x_1,\dots,x_k[p]} e\left(\frac{a(x_1+\cdots+x_k)+b(\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_k)}{p}\right)$$

On utilise le fait que

$$\sum_{a \pmod p} e\left(\frac{a(x_1+\cdots+x_k)}{p}\right) = \begin{cases} p & \text{si } x_1+\cdots+x_k \equiv 0 \pmod p \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Donc

$$\sum_{a,b \pmod p} S^k(a,b,p) = \nu_k(p)\cdot p \times p$$

Où $\nu_k(p)$ est le nombre de solutions du système $\begin{cases} x_1+\cdots+x_k \equiv 0 \pmod p \\ \bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_k \equiv 0 \pmod p\end{cases}$

Alors

$$(p-1)V_k(p) = \nu_k(p)p^2 - (p-1)^k - 2(-1)^k(p-1)$$

Pour la suite nous prendrons $\underline{k=4}$
Nous allons montrer que

$$\nu_4(p) = \sum_{u,v[p]} \eta(u,v)^2$$

Par définition

$$\nu_4(p) = \#\text{solutions}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \equiv 0 \pmod p \\ \bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4 \equiv 0 \pmod p\end{cases}$$

On pose

$$\eta(u,v) = \#\text{solutions} \begin{cases} x_1 + x_2 \equiv u \pmod p \\ x_1^{-1} + x_2^{-1} \equiv v \pmod p \end{cases}$$

Alors

$$\nu_4(p) = \sum_{u,v \pmod p} \eta(u,v)\eta(-u,-v) = \sum_{u,v \pmod p} \eta(u,v)^2$$

Si $u \not\equiv 0$ alors $v \not\equiv 0$ et $\bar{x} + \bar{y} \equiv v \pmod p \Rightarrow y + x \equiv v(xy) \pmod p \Rightarrow u \equiv v(xy) \pmod p$ Donc

$$\begin{cases} xy \equiv uv^{-1} \pmod p \\ x + y \equiv u \pmod p \end{cases}$$

En utilisant les relations coefficients-racines on obtient

$$x, y \text{ racines de } z^2 - uz + uv^{-1} \equiv 0 \pmod p$$

On calcule $\Delta \equiv u^2 - 4uv^{-1} \pmod p$

Si $\Delta = 0$ l'équation a 1 solution.
Si Δ n'est pas un carré il n'y a aucune solution.
Si Δ est un carré il y a 2 solutions et il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En utilisant le symbole de Legendre on obtient

$$\eta(u,v) = 1 + \left(\frac{1 - 4/(uv)}{p}\right)$$

Remarquons que cette solution ne dépend que du produit uv donc

$$\eta(u,v) = \eta(uv,1)$$

De plus $\eta(0,0) = (p-1)$ car les solutions du système sont $\{(x,-x) \mid x \not\equiv 0\}$. Finalement

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v \not\equiv 0 \pmod p} \eta(u,v)^2 &= \sum_{u,v \not\equiv 0[p]} \eta(uv,1)^2 \\
&= (p-1) \sum_{u \not\equiv 0 \pmod p} \eta(u,1)^2 \\
&= (p-1) \sum_{w \not\equiv 1 \pmod p} \left(1 + (\frac{w}{p})\right)^2 \qquad \text{en posant } w = 1 - \frac{4}{u} \\
&= (p-1)\left(1 + \sum_{w \not\equiv 0,1 \pmod p} (2 + 2(\frac{w}{p}))\right) \\
&= (p-1)(1 + 2p - 4 - 2) \\
&= (p-1)(2p-5)
\end{aligned}$$

Alors

$$\nu_4(p) = (p-1)^2 + (p-1)(2p-5) = (p-1)(p-1+2p-5) = 3(p-1)(p-2)$$

Donc

$$(p-1)V_4(p) = \nu_4(p)p^2 - (p-1)^4 - 2(p-1) \Longrightarrow V_4(p) = 2p^3 - 3p^2 - p - 1$$

On obtient en ne gardant que le premier terme :

$$|S(m,n,p)| \leq 2p^{3/4}$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons obtenir une meilleur borne sur $S(m,n,c)$ en donnant des conditions sur m,n,c. Nous avons vu à travers la preuve de l'identité de Selberg que les sommes de Kloosterman sont multiplicative pour la troisième variable. C'est une propriété puissante qui permet d'obtenir de meilleures bornes, c'est ce que nous allons voir à travers les deux lemmes suivants.

Lemme 5. *Soit $\alpha \geqslant 1$, p un nombre premier. On pose $c = p^{2\alpha}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(c, 2n) = 1$. Alors*

$$S(n,n,c) = c^{\frac{1}{2}} \left(e\left(\frac{2n}{c}\right) + e\left(-\frac{2n}{c}\right)\right)$$

Démonstration. On pose $d = a(1+bp^\alpha)$ avec $a \in \mathbb{Z}/p^{2\alpha}\mathbb{Z}$, $(a,p) = 1$ et $b \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$.
Si $a_1(1+b_1p^\alpha) = a_2(1+b_2p^\alpha) \pmod{p^{2\alpha}}$ alors $a_1 = a_2 \pmod{p^\alpha}$.
De plus $a = 1 \pmod{p^{2\alpha}}$ donc $(d, p^{2\alpha}) = 1$ pour tout couple (a,b). Donc il y a p^α couples (a,b) représentant les classes primitives $\pmod{p^{2\alpha}}$ (c'est-à-dire $a \in \mathbb{Z}/p^{2\alpha}\mathbb{Z}$ et $(a, p^\alpha) = 1$).
De plus $\bar{d} = \bar{a}(1-bp^\alpha) \pmod{p^{2\alpha}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
S(n,n,p^{2\alpha}) &= \sum_{\substack{k \,(\mathrm{mod}\ p^{2\alpha}) \\ (p,k)=1}} e\left(\frac{n(k+\bar{k})}{p^{2\alpha}}\right) \\
&= p^{-\alpha} \sum_{\substack{a \,(\mathrm{mod}\ p^{2\alpha}) \\ (a,p)=1}} \sum_{b \,(\mathrm{mod}\ p^\alpha)} e\left(n\frac{d+\bar{d}}{p^{2\alpha}}\right) \\
&= p^{-\alpha} \sum_{\substack{a \,(\mathrm{mod}\ p^{2\alpha}) \\ (a,p)=1}} \sum_{b \,(\mathrm{mod}\ p^\alpha)} e\left(n\frac{a+\bar{a}}{p^{2\alpha}}\right) e\left(n\frac{(a-\bar{a})b}{p^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

On rappelle la propriété suivant

$$\sum_{x \in A \subset \mathbb{N}} e\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} \#A & \text{si } x \mid p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici elle devient

$$\sum_{b \,(\mathrm{mod}\ p^\alpha)} e\left(n\frac{(a-\bar{a})b}{p^\alpha}\right) = \begin{cases} p^\alpha & \text{si } n(a-\bar{a}) \mid p^\alpha \leftrightarrow a = \bar{a} \,(\mathrm{mod}\ p^\alpha) \ \mathrm{car}(n,p) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$S(n,n,p^{2\alpha}) = \sum_{\substack{a \,(\mathrm{mod}\ p^{2\alpha}) \\ (a,p)=1 \\ a=\bar{a} \,(\mathrm{mod}\ p^\alpha)}} e\left(n\frac{a+\bar{a}}{p^{2\alpha}}\right)$$

La condition $a = \bar{a} \pmod{p^\alpha}$ implique $a = \pm 1 \pmod{p^\alpha} = \pm 1 + tp^\alpha$ avec $t \in \{0, \cdots, p^\alpha - 1\}$. Alors $\bar{a} = \pm 1 - tp^\alpha$. Il y a p^α choix pour t et $a + \bar{a} = \pm 2$ donc

$$S(n, n, p^{2\alpha}) = p^\alpha \left(e\left(\frac{2n}{c}\right) + e\left(-\frac{2n}{c}\right)\right)$$

Ce qui achève la preuve. □

Lemme 6. *Soit $\alpha \geqslant 1$, p un nombre premier. On pose $c = p^{2\alpha+1}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(c, 2n) = 1$.Alors*

$$S(n, n, c) = 2\left(\frac{n}{c}\right) c^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}(\varepsilon_c e\left(\frac{2n}{c}\right))$$

Avec $\left(\frac{n}{c}\right)$ désignant le symbole de Legendre et $\varepsilon_c = 1, i$ si $c = 1, -1$ (mod 4)

Démonstration. De la même manière que dans le lemme précédent

$$S(n, n, p^{2\alpha+1}) \sum_{\substack{a \pmod{p^{2\alpha+1}} \\ (a,p)=1 \\ a=\bar{a} \pmod{p^\alpha}}} e\left(n\frac{a + \bar{a}}{p^{2\alpha+1}}\right)$$

La condition $a = \bar{a} \pmod{p^\alpha}$ se réécrit $a = \pm 1 + tp^\alpha$ avec $t \in \{0, \cdots, p^{\alpha+1} - 1\}$.
Alors $\bar{a} = \pm 1 - tp^\alpha \pm t^2 p^{2\alpha}$ et $a + \bar{a} = \pm(2 + t^2 p^{2\alpha})$. On obtient

$$\begin{aligned} S(n, n, p^{2\alpha+1}) &= 2\mathrm{Re} \sum_{t \pmod{p^{\alpha+1}}} e\left(n\frac{2 + t^2 p^{2\alpha}}{p^{2\alpha+1}}\right) \\ &= 2\mathrm{Re}\left(e\left(\frac{2n}{p^{2\alpha+1}}\right) \sum_{t \pmod{p^{\alpha+1}}} e\left(\frac{nt^2}{p}\right)\right) \end{aligned}$$

On note $t' = t + kp$ avec $0 \leqslant k < p$. Alors $\frac{t'^2}{p} = \frac{t^2}{p} + 2k + k^2 p$. Donc $e(t') = e(t)$ pour $t \pmod{p}$. Donc

$$S(n, n, p^{2\alpha+1}) = 2\mathrm{Re}\left(e\left(\frac{2n}{p^{2\alpha+1}}\right) p^\alpha \sum_{t \pmod{p}} e\left(\frac{nt^2}{p}\right)\right)$$

De plus, dans [Iwa97], il est montré la formule suivante sur les symboles de Legendre

$$\sum_{t \pmod{p}} e\left(\frac{nt^2}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right) p^{\frac{1}{2}} \varepsilon_p$$

Ce qui achève la preuve. □

Ainsi, en réunissant les deux résultats précédents nous obtenons la proposition et le corollaire suivant :

Propriété 17 : *Soit $\beta \geqslant 2$, p un nombre premier. On pose $c = p^\beta$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(c, 2n) = 1$.Alors*

$$S(n, n, c) = 2\left(\frac{n}{c}\right) c^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}(\varepsilon_c e\left(\frac{2n}{c}\right))$$

Corollaire 3. *Soient $\beta \geqslant 2$, $c = p^\beta$ et $(c, 2mn) = 1$ alors*

$$|S(m, n, c)| \leqslant 2c^{\frac{1}{2}}$$

Avec des méthodes *beaucoup* plus difficiles et puissantes, Weil réussit à prouver une borne de la même qualité pour les premiers (et pas seulement les plus grandes puissances), comme conséquence de l'Hypothèse de Riemann Généralisée (GRH) pour les courbes (Deligne).

Théorème 4 : *Pour tout $c > 1, m, n$, on note $\tau(c)$ la fonction nombre de diviseur, alors*

$$|S(m, n, c)| \leqslant (m, n, c)^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \tau(c) \tag{5}$$

En supposant cette borne nous obtenons alors la proposition suivante. C'est cette borne qui nous sera utile pour la suite de l'étude.

Propriété 18 :

$$|S(m, n, c)| \leqslant (m, n, c) \min\left(\frac{c}{(m, c)}, \frac{c}{(n, c)}\right)^{\frac{1}{2}} \tau(c) \tag{6}$$

Démonstration. D'après le théorème des restes chinois, il suffit de montrer la propriété pour $c = p^\alpha$. Alors, par décomposition en facteurs premiers, il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $(n, p^\beta) = 1$ et $n = n' p^\beta$. Alors, par la proposition 15, $S(m, n, p^\alpha) = S(m, n'.p^\beta, p^\alpha) = S(mn', p^\beta, p^\alpha)$. Donc il suffit de montrer la propriété pour $c = p^\alpha$ et $n = p^\beta$.
Si $\alpha \leqslant \beta$, comme $p^\beta = 0 \pmod{p^\alpha}$,

$$S(m, p^\beta, p^\alpha) = S(m, 0, p^\alpha)$$

En utilisant les propriétés des sommes de Ramanujan ([IK04]),

$$|S(m, 0, p^\alpha)| \leqslant (m, p^\alpha)(\alpha + 1)$$

Si $\alpha > \beta$, en utilisant l'identité de Selberg

$$S(m, p^\beta, p^\alpha) = p^\beta S(mp^{-\beta}, 1, p^{\alpha-\beta})$$

ce qui donne le résultat en appliquant

$$|S(m, n, c)| \leqslant (m, n, c)^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \tau(c)$$

Ce qui achève la preuve. □

3.1.2 Fonction de Bessel

Les fonctions de Bessel sont des fonctions qui apparaissent naturellement dans la formule des traces de Petersson. Nous allons donner ici quelques informations sur ces fonctions. Les résultats présentés ici sont démontrés dans [IK04] et [Wat66], ils seront des résultats fondamentaux pour notre étude des zéros de fonctions L.

Définition 17 : *Les fonctions de Bessel sont les solutions de l'équation différentielle*

$$z^2 f'' + z f' - (z^2 - \nu^2) f = 0,$$

où ν est un nombre complexe. Une telle fonction est notée $J_\nu(z)$ et ν est appelé l'ordre de $J_\nu(z)$.

L'équation différentielle est singulière en $z = 0$ donc on coupe le plan complexe le long du segment $(-\infty, 0]$. L'équation différentielle possède alors 2 solutions linéairement indépendantes qui sont holomorphes en $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. L'une d'elle est donnée par la série entière

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k},$$

qui converge absolument sur le plan. En changeany ν en $-\nu$ nous trouvons une autre solution $J_{-\nu}(z)$ qui est linéairement indépendante de $J_\nu(z)$. Si ν est un entier nous avons la relation

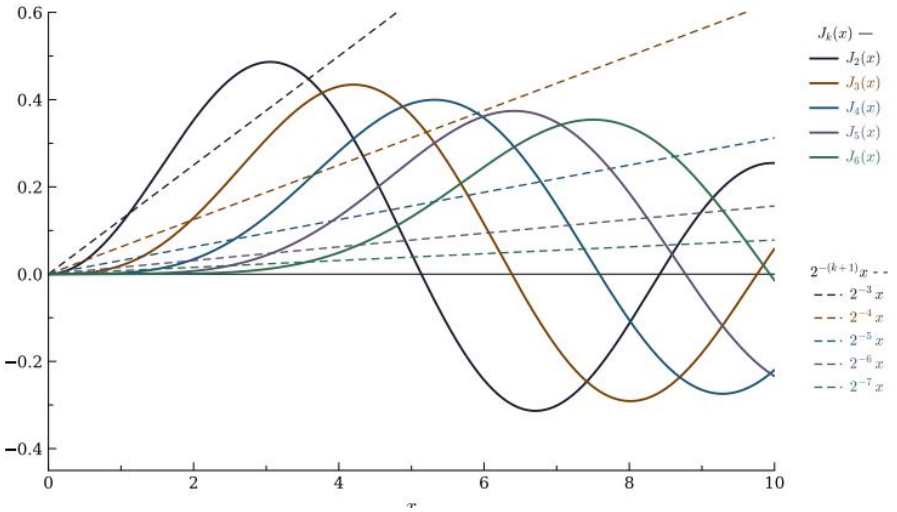
$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z).$$

Nous allons par la suite considérer $\nu \geqslant 2$. Alors $J_\nu(z)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$2\nu z^{-1} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) \tag{7}$$
$$2J'_{\nu-1}(z) = J_{\nu-2}(z) - J_\nu(z) \tag{8}$$
$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) \tag{9}$$

Nous avons également les bornes suivantes pour $k \geqslant 2$:

$$J_{k-1}(x) \ll \min\left(1, \frac{x}{k}\right) k^{-1/3} \tag{10}$$
$$J_k(x) \ll x^{-1/4}(|x-k| + k^{1/3})^{-1/4} \tag{11}$$
$$J_k(x) \ll \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k \quad \text{si } x > 0 \tag{12}$$
$$J_{k-1}(x) \ll 2^{-k}x \quad \text{si } 0 < x \leqslant \frac{k}{3} \tag{13}$$



3.1.3 Fonction diviseur

Une autre fonction qui nous sera utile dans la suite est la fonction diviseur τ_k. Elle apparaît dans les formules d'approximation seront énoncées dans la suite. Nous évoquerons principalement ici comment l'approximer.

Définition 18 : *Soit $k \in \mathbb{N}$, on appelle fonction diviseur la somme des diviseurs de n :*

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

Par définition, pour deux fonctions , g on a la convolution de Dirichlet donnée par

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

Alors nous pouvons reformuler

$$\tau(n) = (1 * 1)(n)$$

Cela nous permet de définir la fonction diviseur d'ordre k :

$$\tau_k(n) = (1 * \cdots * 1)(n) = (\tau_{k-1} * 1)(n)$$

En particulier, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_3((m,n)) = (\tau * 1)((m,n)) = \sum_{d|(m,n)} \tau(d) \tag{14}$$

Nous allons dans la suite utiliser une borne montrée dans [Apo76] sur cette fonction diviseur :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \tau(n) \ll n^{\varepsilon} \tag{15}$$

Enfin, on peut montrer en utilisant le théorème principal montré par [CK62] que

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x\left[(2\gamma - 1) + \log(x)\right] + O\left(x^{\frac{1}{3}} \log(x)\right) \tag{16}$$

3.2 Formule des traces de Petersson et séries de Poincaré

Nous avons expliqué les principaux outils pour obtenir la formule des traces de Petersson. Cette formule permet de faire le lien entre les informations spectrales issues des formes modulaires et leurs propriétés arithmétiques. Ce lien se fait par les sommes de Kloosterman. Afin d'obtenir une telle formule nous avons besoin d'introduire les séries de Poincaré qui permettent générer l'espace des formes cuspidales.

Afin de mieux comprendre l'espace des formes modulaire nous allons essayer de construire une base de cette espace. Pour cela nous allons nous inspirer de la construction des séries d'Eisenstein en moyennant une certaine quantité. Pour la suite de l'étude, nous notons

$$e(z) = e^{2i\pi z}$$

Définition 19 : Série de Poincaré *on définit la série de Poincaré de poids k, de niveau q et de caractère χ par*

$$P_m(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(q)} \bar{\chi}(\gamma) j_\gamma(z)^{-k} e(m\gamma z)$$

Propriété 19 : *$P_m(z)$ est bien définie, converge absolument sur $\mathbb{H}$ et vérifie*

$$\forall \tau \in \Gamma_0(q) \quad P_m(\tau z) = \chi(\tau) j_\tau(z)^k P_m(z)$$

Propriété 20 : *Le développement en série de Fourier des séries de Poincaré est donné par*

$$P_m(z) = \sum_{n\geqslant 1}\left(\delta(m,n) + (\frac{n}{m})^{\frac{k-1}{2}} 2\pi i^k \sum_{\substack{c>0\\ q|c}} c^{-1} S(m,n,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right) e(nz)$$

Démonstration. Par soucis de simplification, nous prendrons $\chi = 1$. En utilisant la double coset decomposition (lemme 1), :

$$\begin{aligned} P_m(z) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(q)} j_\gamma(z)^{-k} e(m\gamma z) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(q)/\Gamma_\infty} \sum_{\tau\in\Gamma_\infty} j_{\tau\gamma}(z)^{-k} e(m\tau\gamma z) \\ &= e(z) + \sum_{1\neq\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(q)/\Gamma_\infty} \sum_{\tau\in\Gamma_\infty} j_{\tau\gamma}(z)^{-k} e(m\tau\gamma z) \end{aligned}$$

Soit $c > 0$ on pose

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Par calcul immédiat

$$\gamma\tau = \begin{pmatrix} a & an+b \\ c & cn+d \end{pmatrix}$$

Donc

$$j_{\gamma\tau}(z) = c(z+n)+d \qquad \gamma\tau z = \frac{a(z+n)+b}{c(z+n)+d}$$

Or $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ donc $ad - bc = 1$ donc

$$\frac{a(z+n)+b}{c(z+n)+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c(z+n)+d)}$$

On pose

$$I_\gamma(z) = \sum_{\tau\in\Gamma_\infty} j_{\gamma\tau}(z)^{-k} e(\gamma\tau z) = \sum_{n=1}^{\infty} (c(c(z+n)+d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c(z+n)+d)}\right)$$

Par formule de sommation de Poisson

$$I_\gamma(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} (c(c(z+v)+d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c(z+v)+d)}\right) e(-nv)dv$$

En posant $z = x + iy$, on effectue le changement de variable $cw = c(z+v)+d$ et alors

$$I_\gamma(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e\left(\frac{am}{c} + \frac{nd}{c} + nz\right) \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} (cw)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 w} - nw\right) dw$$

On note par $J_c(m,n)$ cette dernière intégrale. D'après les propriétés de la fonction de Bessel ([IK04]) on a

- Si $n \leqslant 0$: $J_c(m,n) = 0$
- Si $n > 0, m = 0$: $J_c(m,n) = \left(\frac{2\pi}{ic}\right)^k \frac{n^{k-1}}{\Gamma(k)}$
- Si $n > 0, m > 0$: $J_c(m,n) = \frac{2\pi}{i^k c}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c})$

En combinant ces résultats on obtient

$$P_m(z) = \sum_{n\geqslant 1}\left(\delta(m,n) + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} 2\pi i^k \sum_{\substack{c>0\\ q|c}} c^{-1} S(m,n,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right) e(nz)$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons maintenant montrer que l'espace des formes cuspidales est un espace de Hilbert. Pour cela nous allons construire un produit scalaire (produit scalaire de Petersson). C'est ce produit scalaire qui permet d'obtenir la formule des traces de Petersson en projetant les séries de Poincaré sur une certaine base.

Propriété 21 : *On rappelle sur $\mathbb{H}$ la mesure $d\mu(z) = \frac{dxdy}{y^2}$. Cette mesure est invariant sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ie*

$$\forall \text{ Borel } A \subseteq \mathbb{H}\ \forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \quad \mu(A) = \mu(\gamma A).$$

C'est donc une mesure de Haar normalisée par la taille du domaine fondamental $\mathbb{D}$.

Démonstration. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, soit $z = x_2 + iy_2 \in \mathbb{H}^2$. On pose $\gamma z = x_1 + iy_1$.
$\forall$ Borel $A \subseteq \mathbb{H}^2$:

$$\begin{aligned} \mu(\gamma A) &= \int_{\gamma A} \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} \\ &= \int_A \frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(x_2,y_2)} \frac{dx_2 dy_2}{y_1^2} \end{aligned}$$

Soit une fonction holomorphe $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Alors, d'après les équations de Cauchy-Riemann, $|Jac_z(f)| = |f'(z)|^2 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.
Dans notre cas

$$\gamma'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

Par calcul nous obtenons

$$y_1 = \mathrm{Im}\left(\frac{a(x_2+iy_2)+b}{cz+d}\right) = \frac{y_2}{(cz+d)^2}$$

Alors

$$\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(x_2,y_2)} \frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{(cz+d)^4 y_1^2} = \frac{1}{y_2^2}$$

On introduit cette formule dans $\mu(\gamma A)$ ce qui nous permet de réécrire

$$\mu(\gamma A) = \int_A \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2} = \mu(A)$$

Ce qui achève la preuve. □

Définition 20 : Produit scalaire de Petersson *Soient $f, g \in M_k(q)$ avec f ou g une forme cuspidale. Soit $\Gamma_0(q)$ un domaine fondamental sur $\mathbb{H}$. On définit alors*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma_0(q)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k d\mu$$

Ce produit est bien défini, en effet soit $\gamma \in \Gamma_0(q)$

$$\begin{aligned} f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}\mathrm{Im}(\gamma z)^k &= (cz+d)^k f(z)\overline{(cz+d)^k g(z)}\frac{\mathrm{Im}(z)^k}{|cz+d|^{2k}} \\ &= f(z)\overline{g(z)}\mathrm{Im}(z)^k \end{aligned}$$

Une propriété fondamentale de ces séries de Poincaré est leur capacité à projeter sur les coefficients de Fourier d'une forme cuspidale.

Propriété 22 : *Soit $f \in S_k(q)$ telle que $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_f(n)e(nz)$. Alors, pour tout $m \geqslant 1$,*

$$\langle f, P_m\rangle = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}}a_f(m)$$

Démonstration. Nous allons montrer le résultat pour $\Gamma_0(q) = \Gamma_0(1) = \Gamma$ pour ne pas alourdir les notations. La même preuve s'applique pour un choix plus général de groupe de congruence. D'après la définition du produit scalaire, des séries de Poincaré et en utilisant la décomposition montrée dans le lemme 1 nous pouvons réécrire

$$\langle f, P_m\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\overline{j_\gamma(z)^{-k}e(m\gamma z)}\right)y^k\frac{dxdy}{y^2}$$

Comme $f \in M_k(q)$, $f(z) = f(\gamma z)j_\gamma(z)^{-k}$. Donc

$$\langle f, P_m\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}|j_\gamma(z)|^{-2k}f(\gamma z)\overline{e(m\gamma z)}y^{k-2}dxdy$$

Par la proposition 1 sur $j_\gamma(z)$ nous avons

$$\mathrm{Im}(\gamma z)^k = y^k|j_\gamma(z)|^{-2k}$$

Donc

$$\langle f, P_m\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\mathrm{Im}(\gamma z)^k f(\gamma z)\overline{e(m\gamma z)}\frac{dxdy}{y^2}$$

D'après le théorème de Fubini nous pouvons inverser somme et intégrale. De plus on effectue le changement de variable $\gamma z \to z$ et comme $\frac{dxdy}{y^2}$ est Γ-invariant on obtient

$$\begin{aligned} \langle f, P_m\rangle &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\int_{\gamma(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\mathrm{Im}(z)^k f(z)\overline{e(mz)}\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int_{\bigcup_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\gamma(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\mathrm{Im}(z)^k f(z)\overline{e(mz)}\frac{dxdy}{y^2} \end{aligned}$$

D'après le lemme 2, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\gamma\left(\Gamma\backslash\mathbb{H}\right)$ est un domaine fondamental sur $\mathbb{H}$. Il coïncide avec la zone $1>x\geqslant 0 \quad y>0$. Donc

$$\langle f,P_m\rangle=\int_0^\infty\int_0^1 y^{k-2}f(x+iy)\overline{e(m(x+iy))}dxdy$$

On pose $f(z)=\sum_{n\geqslant 1}a_f(n)e(nz)$.
Par multiplicativité

$$e(nz)\overline{e(mz)}=e^{2i\pi(n-m)x}e^{-2\pi(n+m)y}$$

Donc

$$\langle f,P_m\rangle=\sum_{n\geqslant 1}a_f(n)\int_0^\infty\int_0^1 y^{k-2}e^{2i\pi(n-m)x}e^{-2\pi(n+m)y}dxdy$$

Nous savons néanmoins que

$$\int_0^1 e^{2i\pi(n-m)x}dx=\delta_{n,m}.$$

Nous pouvons allons écrire le produit scalaire comme suit

$$\langle f,P_m\rangle=a_f(m)\int_0^\infty y^{k-2}e^{-4\pi my}dy$$

On pose $x=4\pi my$ ce qui donne

$$\langle f,P_m\rangle=a_f(m)\int_0^\infty\left(\frac{x}{4\pi m}\right)^{k-2}e^{-x}\frac{dx}{4\pi m}$$

Finalement

$$\langle f,P_m\rangle=a_f(m)\frac{1}{(4\pi m)^{k-1}}\Gamma(k-1)$$

Ce qui achève la preuve. □

Corollaire 4. *Les séries de Poincaré engendrent en particulier l'espace des formes cuspidales*

$$S_k(q)=\mathrm{vect}(P_m\mid m\geqslant 1)$$

La formule suivante est fondamentale, elle donne une quasi relation d'orthogonalité des coefficients de Fourier au sein de la famille des formes cuspidales. De plus, ces coefficients sont, en général, très difficiles à étudier, notamment dû au fait qu'ils peuvent provenir de problèmes complexes (compter le nombre de solutions à des problèmes , compter le nombre de points sur une courbe elliptique, ...), mais il est possible, grâce à cette formule, de les étudier en moyenne sur les formes modulaires.

Théorème 5 : Formule des traces de Petersson *Soit $\mathcal{F}$ une base orthonormale de $S_k(q)$. Alors, pour tout $n,m\geqslant 1$, on a*

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi\sqrt{mn})^{k-1}}\sum_{f\in\mathcal{F}}a_f(n)\overline{a_f(m)}=\delta_{m,n}+2\pi i^k\sum_{\substack{c>0\\ q|c}}c^{-1}S(m,n,c)J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\qquad(17)$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F}$ est une base orthonormale nous pouvons décomposer P_m selon cette base, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} P_m &= \sum_{f\in\mathcal{F}} \langle P_m, f\rangle f \\ &= \sum_{f\in\mathcal{F}} \overline{\langle f, P_m\rangle} f \\ &= \sum_{f\in\mathcal{F}} \overline{a_f(m)\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}}} \sum_{n\geqslant 1} a_f(n)e(nz) \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{f\in\mathcal{F}} \overline{a_f(m)}\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}} a_f(n)\right) e(nz) \end{aligned}$$

En égalisant les coefficients de Fourier on obtient

$$\delta(m,n) + (\frac{n}{m})^{\frac{k-1}{2}} 2\pi i^k \sum_{\substack{c>0\\ q|c}} c^{-1} S(m,n,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) = \sum_{f\in\mathcal{F}} \overline{a_f(m)}\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}} a_f(n)$$

On multiplie des deux cotés par $\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{k-1}}$

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi\sqrt{mn})^{k-1}} \sum_{f\in\mathcal{F}} a_f(n)\overline{a_f(m)} = \delta_{m,n} + 2\pi i^k \sum_{\substack{c>0\\ q|c}} c^{-1} S(m,n,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)$$

Ce qui achève la preuve. □

On introduit maintenant des coefficients pour normaliser cette équation afin d'avoir une version plus lisible de cette formule, on pose

$$\omega_f(n) = \left(\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi n)^{k-1}}\right)^{1/2} a_f(n)$$

Avec ces coefficients la formule des traces de Petersson s'écrit

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} \omega_f(n)\overline{\omega_f(m)} = \delta_{m,n} + 2\pi i^k \sum_{\substack{c>0\\ q|c}} c^{-1} S(m,n,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)$$

4 Petits zéros des fonctions L associées aux formes modulaires

4.1 Cadre et objectifs

Nous avons défini la majorité des outils nécessaires à étudier les petits zéros des fonctions L associés aux formes modulaires. L'un des plus fondamentaux est la formule des traces de Petersson. Nous allons commencer par poser le cadre de l'étude et expliquer les objectifs de ce mémoire. Pour commencer, nous démontrerons un premier résultat de densité. Nous verrons

ensuite comment améliorer ce résultat en effectuant un travail plus poussé sur les sommes de Kloosterman et les fonctions de Bessel. Commençons par présenter le problème : dans cette étude nous allons nous intéresser à certaines familles $\mathcal{F}$ de formes automorphes, plus précisément les familles $H_k^*(N), H_k^+(N)$ et $H_k^-(N)$ qui sont des sous-familles des formes modulaires de poids k. A chacune de ces formes automorphes nous associons la fonction L donnée par les opérateurs de Hecke

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s}. \tag{18}$$

Dans cette étude nous supposons que $L(s,f)$ est entière et, en posant la fonction complète associée $\Lambda(s,f) = L_\infty(s,f)L(s,f)$ avec $L_\infty(s,f)$ permettant d'ecrire l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s,f) = \varepsilon_f \Lambda(1-s,f) \tag{19}$$

avec $\varepsilon_f = \pm 1$.La forme précise de ε_f est donnée par (4). Ce facteur epsilon a un impact sur la distribution des zéros de $L(s,f)$ comme cela a été suggéré dans la section 2.4.1 .
Dans cette étude, nous supposerons l'Hypothèse de Riemann Généralisée (GRH). Elle généralise aux fonctions L l'hypothèse de Riemann sur la fonction zêta.
Hypothèse de Riemann Généralisée (GRH) : Les zéros non triviaux des fonctions L sont sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, ou de façon équivalente, si $L(f,s) = 0$ pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ alors $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Dans la suite, en supposant GRH, on note les zéros non triviaux de $L(s,f)$ $\rho_f = \frac{1}{2} + i\gamma_f$ avec $\gamma_f \in \mathbb{R}$. Il est montré dans [IK04] que le nombre de zéros avec $|\gamma_f| \leqslant A$ pour A suffisamment grand est d'ordre $\log c_f$ où c_f est le conducteur analytique (cf 2.4.1). Les petits zéros sont alors les premiers zéros pour la normalisation $\gamma_f \mapsto \frac{\gamma_f}{2\pi} \log c_f$. Cette normalisation permet d'uniformiser la distribution de ces zéros.
Les travaux de Katz et Sarnak suggèrent une description de la densité de niveau 1 de ces zéros, en particulier dans le cadre des corps de fonctions et des matrices aléatoires, ([KS1], [KS2]).

Définition 21 : *La densité de niveau 1 d'une fonction $f \in \mathcal{F}$ est la distribution définit par*

$$D(f,\phi) = \sum_{\gamma_f} \phi\left(\frac{\gamma_f}{2\pi} \log c_f\right) \tag{20}$$

où ϕ est une fonction de Schwartz paire qui possède une transformée de Fourier à support compact.

Ici, la transformée de Fourier d'une fonction ϕ est donnée par

$$\hat{\phi}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Comme ϕ est une fonction de Schwartz, elle est décroit rapidement. Le facteur $\frac{1}{2\pi} \log c_f$ signifie que $D(f,\phi)$ mesure la densité de zéros de $L(s,f)$ proche du point central. Comme dans de nombreux problèmes de statistiques arithmétiques, il est compliqué, en général, d'obtenir une formule asymptotique de $D(f,\phi)$ c'est pourquoi nous allons moyenner sur $\mathcal{F}$. Pour effectuer cette moyenne nous tronquons l'espace $\mathcal{F}$ en deux selon le conducteur analytique et on note

$$\mathcal{F}(Q) = \{f \in \mathcal{F}, c_f \leqslant Q\}$$

et nous allons regarder le comportement quand $Q \to +\infty$. La moyenne est donnée par

$$\mathbb{E}(\mathcal{F}(Q), \phi) = \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{f \in \mathcal{F}(Q)} D(f, \phi). \tag{21}$$

La Density Conjecture prévoit le comportement de cette moyenne quand $Q \to \infty$

Conjecture : *(Density Conjecture) Soit $\mathcal{F}$ une famille de formes automorphes et $\mathcal{F}(Q)$ comme définie au-dessus. Pour toute fonction de Schwartz ϕ paire sur $\mathbb{R}$ qui possède une transformée de Fourier à support compact dans $\mathbb{R}$, il existe un groupe G tel que*

$$\lim_{Q \to \infty} \mathbb{E}(\mathcal{F}(Q), \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \mathrm{W(G)}(x) dx. \tag{22}$$

$\mathrm{W(G)}$ *est une fonction dépendant du groupe G. G est un des groupes parmi* $\mathrm{U}, \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}, \mathrm{O}$.

Il est montré dans [KS1] les valeurs de W(G) pour ces groupes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W(O)}(x) &= 1 + \frac{1}{2}\delta_0(x) \\
\mathrm{W(SO(even))}(x) &= 1 + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \\
\mathrm{W(SO(odd))}(x) &= 1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} + \delta_0(x) \\
\mathrm{W(Sp)}(x) &= 1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \\
\mathrm{W(U)}(x) &= 1
\end{aligned}$$

Durant la suite nous supposons que k est un entier pair et que N est sans facteur carré. On note $H_k^*(N)$ l'ensemble des formes cuspidales nouvelles de niveau N (c'est-à-dire pour le choix de groupe de congruence $\Gamma_0(N)$) (Une explication de ce qu'est cet espace est donnée dans le chapitre suivant). Pour toute fonction $f \in H_k^*(N)$ nous définissons le conducteur analytique par

$$c_f = k^2 N. \tag{23}$$

Nous pouvons séparer cet ensemble $H_k^*(N)$ en deux selon le signe de ε_f dans l'équation fonctionnelle. On note les ensembles associés $H_k^{\pm}(N)$.

Les résultats que nous présenterons ici seront de cette forme : Pour ϕ une fonction de Schwartz paire qui possède une transformée de Fourier à support compact dans $(-v, v)$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{|H_k^\sigma(N)|} \sum_{f \in H_k^\sigma(N)} D(f, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \mathrm{W}(\mathrm{G}_\sigma)(x) dx$$

où $\mathrm{G}_\sigma = \mathrm{O}, \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}$ pour $\sigma = *, +, -$.
Notre objectif sera d'évaluer quel support $(-v, v)$ permet d'obtenir un tel résultat. D'après le principe d'incertitude, si $\hat{\phi}$ a un support large alors ϕ sera concentrée autour d'un point. Un tel phénomène permettrait alors d'isoler les zéros c'est pourquoi nous souhaitons avoir un support le plus grand possible. Dans un premier temps nous obtiendrons un résultat pour v autour de 1. Néanmoins, d'après le théorème de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \mathrm{W(G)}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(y) \hat{\mathrm{W}}(\mathrm{G})(y) dy$$

Et en notant $\eta(y)$ la fonction la fonction caractéristique de $[-1,1]$,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{W}}(\mathrm{O})(x) &= \delta_0(x) + \frac{1}{2} \\
\hat{\mathrm{W}}(\mathrm{SO(even)})(x) &= \delta_0(x) + \frac{1}{2}\eta(x) \\
\hat{\mathrm{W}}(\mathrm{SO(odd)})(x) &= \delta_0(x) - \frac{1}{2}\eta(x) + 1 \\
\hat{\mathrm{W}}(\mathrm{Sp})(x) &= \delta_0(x) - \frac{1}{2}\eta(x) \\
\hat{\mathrm{W}}(\mathrm{U})(x) &= \delta_0(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons remarquer que dans la zone $(-1,1)$ il n'est pas possible de différencier le comportement de O, SO(odd) et SO(even). C'est pourquoi nous allons montrer qu'un travail plus approfondi sur les sommes de Kloosterman et les fonctions de Bessel permet d'élargir le support de $\hat{\phi}$ au-delà de $v=1$. Nous montrerons à la fin qu'exploiter les poids k permet même d'avoir un support dans $(-2,2)$ si l'on effectue ce travail approfondi sur les fonctions de Bessel et les sommes de Kloosterman mais aussi un support dans $(-3/2,3/2)$ sans avoir besoin d'effectuer de tels efforts. Cette observation pourrait motiver des travaux sur les poids similaires dans des contextes plus généraux notamment en regardant les formes modulaires de Hilbert en prolongeant les récents travaux de [HW24].

4.2 Décomposition spectrale et dimension de $H_k^\sigma(N)$

Dans la suite nous considérerons des formes cuspidales associées au groupe de congruence de Hecke $\Gamma_0(N)$. Nous allons exploiter la formule des traces de Petersson pour estimer la taille des familles $H_k^\sigma(N)$ pour $\sigma = *, +, -$. Au cours de l'étude k est un entier pair et N est un entier (la plupart du temps supposé sans facteur premier). Rappelons quelques résultats prouvés depuis le début :
L'espace $S_k(N)$ des formes cuspidales de poids k et de niveau N est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de Petersson

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\bar{g}(z)y^{k-2}dxdy. \tag{24}$$

Chaque $f \in S_k(N)$ possède un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)e(nz) \tag{25}$$

avec $e(z) = e^{2i\pi z}$. On introduit les coefficients normalisés

$$\Psi_f(n) = \left(\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi n)^{k-1}}\right)^{1/2} \|f\|^{-1} a_f(n) \tag{26}$$

Deligne a prouvé par des méthodes sophistiquées que

$$\Psi_f(n) \ll \tau(n). \tag{27}$$

On a également

$$\nu(N) = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)] = N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right). \tag{28}$$

De même que dans la section 3.2, on note le k-ème coefficient de Fourier de la série de Poincaré normalisée P_m par

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \sum_{f \in \mathcal{B}_k(N)} \bar{\Psi}_f(m)\Psi_f(n) \tag{29}$$

où $\mathcal{B}_k(N)$ est une base orthogonale de $S_k(N)$.

La proposition suivante est une version quantitative de la formule des traces de Petersson, conséquence des propriétés que nous avons montrées sur les sommes Kloosterman et sur la fonction de Bessel.

Propriété 23 : *Pour tout $m, n \geqslant 1$,*

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \delta_{m,n} + O\left(\frac{\tau(N)}{Nk^{\frac{5}{6}}} \frac{(m,n,N)\tau_3((m,n))}{((m,N)+(n,N))^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{mn}{\sqrt{mn}+kN}\right)^{\frac{1}{2}} \log(2mn)\right)$$

Démonstration. Nous pouvons reformuler

$$\min\left(\frac{c}{(m,c)}, \frac{c}{(n,c)}\right) = \frac{c}{\max((m,c),(n,c))} \ll \frac{c}{(m,c)+(n,c)}$$

Donc en se servant de la proposition 18

$$R = \sum_{c=0 \,(\mathrm{mod}\ N)} c^{-1} S(m,n,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \ll \sum_{c=0 \,(\mathrm{mod}\ N)} \frac{(m,n,c)}{\sqrt{(m,c)+(n,c)}} c^{-\frac{1}{2}} \tau(c) \min(1, \frac{\sqrt{mn}}{ck}) k^{-\frac{1}{3}}$$

Or $c = 0 \,(\mathrm{mod}\ N)$ donc on peut écrire $c = bN$ pour p parcourant $\mathbb{N}^*$. Alors, par propriété du PGCD,

$$R \ll k^{-\frac{1}{3}} \frac{(m,n,N)}{\sqrt{(m,N)+(n,N)}} N^{-\frac{1}{2}} \tau(N) S$$

Avec

$$S = \sum_{b=1}^{\infty} (m,n,b)^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} \tau(b) \min\left(1, \frac{\sqrt{mn}}{bkN}\right) \leqslant \sum_{b=1}^{\infty} b^{-\frac{1}{2}} \tau(b) \min\left(1, \frac{\sqrt{mn}}{bkN}\right) \sum_{\substack{d|(m,n) \\ d|b}} (m,n)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$S \leqslant \sum_{d|(m,n)} \tau(d) \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\tau(b)}{\sqrt{b}} \min\left(1, \frac{\sqrt{mn}}{bkN}\right)$$

Dans cette dernière somme,

$$\sum_{d|(m,n)} \tau(d) = \tau_3((m,n))$$

On découpe la somme sur b selon $b \leqslant \frac{\sqrt{mn}}{kN}$ auquel cas le min vaut 1 et $b > \frac{\sqrt{mn}}{kN}$ auquel cas $\min = \frac{\sqrt{mn}}{bkN}$. On pose $X = \frac{\sqrt{mn}}{kN}$.

De plus

$$\sum_{b \leqslant x} \tau(b) = x\left[(2\gamma - 1) + \log(x)\right] + O\left(x^{\frac{1}{3}} \log(x)\right)$$

Donc par sommation d'Abel

$$\sum_{b\leqslant X}\frac{\tau(b)}{\sqrt{b}}\ll\sqrt{X}\log(X)$$

Par sommation d'Abel on obtient aussi

$$\sum_{b>X}\frac{\tau(b)}{\sqrt{b}}\frac{X}{b}\ll\sqrt{X}\log(X)$$

Donc finalement

$$S\ll\tau_3((m,n))\left(\frac{mn}{kN}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{mn}+kN\right)^{-\frac{1}{2}}\log(2mn)$$

Ce qui achève la preuve. □

L'espace des formes cuspidales de niveau N $S_k(N)$ contient des formes déjà existantes comme formes venant de niveaux inférieurs. En effet, si $M \mid N$ alors toute forme $g \in S_k(M)$ donne naissance à des formes $f \in S_k(N)$ en posant $f(z) = g(dz)$ avec $d \mid (M/N)$. Ces formes sont appelés formes anciennes. Comme elles sont des objets venant de niveaux inférieurs elles n'apportent pas d'information arithmétique intéressante. On appelle alors naturellement forme nouvelle tout forme cuspidale dans $S_k(N)$ qui n'est pas une forme ancienne et on appelle $H_k^*(N)$ l'espace des formes nouvelles, il s'agit du supplémentaire orthogonal de l'espace engendré par les formes anciennes pour le produit scalaire de Petersson. En utilisant l'équation fonctionnelle des fonctions L associées à ces formes nouvelles on peut diviser l'espace $H_k^*(N)$ selon le signe de ε_f. On note $H_k^+(N) = \{f \in H_k^*(N) \mid \varepsilon_f = +1\}$ et $H_k^-(N) = \{f \in H_k^*(N) \mid \varepsilon_f = -1\}$. Cette théorie à été étudiée par Atkin et Lener ([AL70]) et nous utiliserons ici leurs résultats à ce sujet.

Afin de faire ressortir les informations arithmétiques de $\Delta_{k,N}$, nous voulons maintenant exprimer $\Delta_{k,N}(m,n)$ selon des valeurs propres de Hecke d'éléments de $H_k^*(N)$. Nous avons la décomposition orthogonale

$$S_k(N)=\bigoplus_{LM=N}\bigoplus_{f\in H_k^*(M)}S_k(L,f) \tag{30}$$

où $S_k(L,f)$ est l'espace engendré linéairement par les formes

$$f_{|l}(z)=l^{k/2}f(lz)\qquad\text{avec } l\mid L.$$

Une forme nouvelle f de niveau M est une fonction propre de l'opérateur de Hecke $T_M(n)$ définie par

$$(T_M(z)f)(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{ad=n\\(a,M)=1}}\left(\frac{a}{d}\right)^{k/2}\sum_{b\,(\mathrm{mod}\ d)}f\left(\frac{az+b}{d}\right). \tag{31}$$

Pour $f \in H_k^*(M)$ on définit $\lambda_f(n)$ comme la valeur propre de $T_M(n)$

$$T_M(n)f=\lambda_f(n)f \tag{32}$$

pour tout $n \geqslant 1$. On a la normalisation

$$a_f(n)=\lambda_f(n)n^{(k-1)/2} \tag{33}$$

avec la convention $a_f(1) = 1$. Ces valeurs propres λ_f possèdent des propriétés fortes qui découlent des propriétés des opérateurs de Hecke. Ces propriétés sont montrées dans [IK04]. Tout d'abord, ces valeurs propres sont multiplicatives :

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d|(m,n)\\(d,M)=1}} \lambda_f(mn/d^2). \tag{34}$$

Elles vérifient également les propriétés suivantes :

— $|\lambda_f(n)| \ll \tau(n)$

— $\lambda_f^2(n) = p^{-1}$ si $p \mid M$.

Nous pouvons maintenant construire la base voulue à travers les propriétés suivantes

Lemme 7. *Soit $N = LM$ sans facteur premier, soient $l_1 \mid L$ et $l_2 \mid L$, soit $f \in H_k^*(M)$.Alors*

$$\langle f_{|_{l_1}}, f_{|_{l_2}} \rangle = \lambda_f(l)\nu(l)^{-1} l^{\frac{1}{2}} \langle f, f \rangle$$

Où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de Petersson et $\nu(N) = N \prod_{p|N}(1 + \frac{1}{p})$

Démonstration. En utilisant la méthode du méthode du déploiement du produit triple on pose

$$F(s) = \langle E(z,s) f(l_1 z), f(l_2 z) \rangle$$

Où $E(z,s)$ est la série d'Eisenstein

$$E(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_o(N)} \mathrm{Im}(\gamma z)^s = P_0(s)$$

D'après le lemme 1 :

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_o(N)} \mathrm{Im}(\gamma z)^s f(l_1 z)\overline{f(l_2 z)} y^{k-2} dxdy \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_o(N)} \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} \mathrm{Im}(\gamma z)^s f(l_1 z)\overline{f(l_2 z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \end{aligned}$$

Par invariance sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_o(N)} \int_{\gamma(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})} \mathrm{Im}(z)^s f(l_1 z)\overline{f(l_2 z)} y^k \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int_0^\infty y^{s+k-2} \left(\int_0^1 f(l_1 z)\overline{f(l_2 z)} dx \right) dy \end{aligned}$$

Par définition nous avons

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} a_f(n) e(nz) \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy$$

On introduis ces formules dans $F(s)$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty y^{s+k-2}\left(\int_0^1 \sum_{n_1\geqslant 1} a_f(n_1)e(n_1l_1z)\sum_{n_2\geqslant 1}\overline{a_f(n_2)e(l_2n_2z)}dx\right)dy \\ &= \sum_{n_1,n_2\geqslant 1} a_f(n_1)\overline{a_f(n_2)}\int_0^\infty y^{(s+k-1)-1}\int_0^1 e^{2i\pi(n_1l_1-n_2l_2)z}dxdy \end{aligned}$$

Par calcul

$$\int_0^1 e^{2i\pi(n_1l_1-n_2l_2)x}dx = \delta_{n_1l_1,n_2l_2}$$

Donc

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n_1,n_2\geqslant 1}\sum_{n_1l_1=n_2l_2} a_f(n_1)\overline{a_f(n_2)}\int_0^\infty y^{(s+k-1)-1}e^{-4\pi n_1l_1y}dy \\ &= (4\pi)^{1-k-s}\,\Gamma(s+k-1)\sum_{n_1,n_2\geqslant 1}\sum_{l_1n_1=n_2l_2} a_f(n_1)\overline{a_f(n_2)}(l_1n_1)^{1-k-s} \end{aligned}$$

On pose

$$n_1 = l''n,\quad n_2 = l'n,\quad l' = \frac{l_1}{(l_1,l_2)},\quad l'' = \frac{l_2}{(l_1,l_2)}$$

Alors

$$n_1l_1 = n_2l_2 = \frac{l_1l_2}{(l_1,l_2)}n$$

On rappelle que $a_f(n) = n^{\frac{k-1}{2}}\lambda_f(n)$ et on obtient

$$F(s) = (4\pi)^{1-k-s}\,\Gamma(s+k-1)\frac{(l_1l_2)^{\frac{k-1}{2}}}{(l_1,l_2)^s}\sum_{n\geqslant 1}\lambda_f(l'n)\lambda_f(l''n)n^{-s}$$

Notons

$$R_f(l'l'',s) = \sum_{n\geqslant 1}\lambda_f(l'n)\lambda_f(l''n)n^{-s}$$

Comme l est sans facteur premier, pour $n = p^\alpha$ alors $p \mid l$ implique $p \mid l'$ et $p \nmid l''$ ou $p \mid l''$ et $p \nmid l'$. Notons alors l'_p et l''_p comme étant (l',p) et (l'',p). Par multiplicativité des $\lambda_f(p^\alpha)$ on obtient

$$R_f(l'l'',s) = \prod_p\sum_{\alpha\geqslant 0}\lambda_f(l'_pp^\alpha)\lambda_f(l''_pp^\alpha)p^{-\alpha s}$$

Si $p \nmid l$ alors $l'_p = l''_p = 1$

$$\prod_{p\nmid l}\sum_\alpha \lambda_f(p^\alpha)^2p^{-\alpha s} = \sum_{(n,l)=1}\lambda_f(n)^2n^{-s}$$

Si $p \mid l$ alors $l'_pp^\alpha = p^{\alpha+1}$ et $l''_pp^\alpha = p^\alpha$ ou $l''_pp^\alpha = p^{\alpha+1}$ et $l'_pp^\alpha = p^\alpha$ Donc

$$R(l'l'',s) = \left(\sum_{(n,l)=1}\lambda_f(n)^2n^{-s}\right)\prod_{p\mid l}\left(\sum_{\alpha\geqslant 0}\lambda_f(p^{\alpha+1})\lambda_f(p^\alpha)p^{-\alpha s}\right)$$

En utilisant les relations de Hecke

$$\lambda(p^{\alpha+1}) = \lambda_f(p)\lambda_f(p^\alpha) - \lambda_f(p^{\alpha-1})$$

On introduit la fonction de Rankin-Selberg

$$L(s, f \otimes f) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n)^2 n^{-s}$$

Cette fonction est largement étudiée dans [IK04]. Nous utiliserons ici les propriétés classiques de cette fonction. En utilisant cette fonction on peut réécrire

$$R_f(l, s) = \lambda_f(l) \prod_{p|l} (1 + p^{-s})^{-1} L(s, f \otimes f)$$

Donc

$$F(s) = (4\pi)^{1-k-s}\, \Gamma(s + k - 1) \frac{(l_1 l_2)^{\frac{1-k}{2}}}{(l_1, l_2)^s} \lambda_f(l) L(s, f \otimes f) \prod_{p|l} (1 + p^{-s})^{-1}$$

De plus, d'après les propriétés de la fonction de Rankin-Selberg,

$$\langle f, f \rangle = (4\pi)^{-k} \Gamma(k) \frac{\pi}{3} \nu(N) \mathrm{Res}(L(s, f \otimes f), 1)$$

Et

$$\mathrm{Res}(E(z, s), 1) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H})}$$

En prenant le résidu en $s = 1$ des deux cotés on obtient

$$\langle f_{|_{l_1}}, f_{|_{l_2}} \rangle = \lambda_f(l) \nu(l)^{-1} l^{\frac{1}{2}} \langle f, f \rangle$$

Ce qui achève la preuve. □

On introduit

- $Z(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n^2) n^{-s}$
- $\zeta_M(s) = \sum_{m|M} m^{-s} = \prod_{p|M} (1 - p^{-s})^{-1}$

Les fonctions de Rankin-Selberg possèdent les propriétés suivantes qui nous seront utiles pour déterminer une base de $S_k(N)$

Propriété 24 :

$$L(s, f \otimes f) = Z(s, f) \zeta(s) / \zeta_M(s)$$
$$\mathrm{Res}(L(s, f \otimes f), 1) = Z(1, f) M / \varphi(M)$$

Alors, en assemblant la proposition 24 et le lemme 7 nous obtenons le lemme suivant qui nous permet de réécrire la norme d'une forme nouvelle.

Lemme 8. *Soit f une forme nouvelle de poids k et de niveau $M \mid N$, alors*

$$\langle f, f \rangle = (4\pi)^{1-k} \Gamma(k) \frac{\nu(N) \varphi(M)}{12M} Z(1, f)$$

On souhaite désormais choisir une base orthonormée de $S_k(L,f)$, on la note

$$H_k^*(L,f) = \{f_d, d \mid L\}$$

avec

$$f_d = \sum_{l|L} x_d(l) f_l$$

On pose

$$\begin{aligned}\delta_f(d_1,d_2) &= \langle f_{d_1}, f_{d_2}\rangle / \langle f, f\rangle \\ &= \sum_{l_1}\sum_{l_2} x_{d_1}(l_1)\overline{x_{d_2}(l_2)}\lambda_f(l)\frac{\sqrt{l}}{\nu(l)}\end{aligned}$$

On pose $l_1 = al'$ et $l_2 = al''$ avec $(l',l'') = 1$ alors par multiplicativité de ν et λ_f on obtient

$$\delta_f(d_1,d_2) = \sum_a \sum_{(l',l'')=1} \sum x_{d_1}(al')\overline{x_{d_2}(al'')}\lambda_f(l')\lambda_f(l'')\frac{\sqrt{l'l''}}{\nu(l')\nu(l'')}$$

De plus,

$$\mathbb{1}_{(l',l'')=1} = \sum_{b|(l',l'')} \mu(b)$$

Alors

$$\sum_{(l',l'')=1} f(l',l'') = \sum_{l'}\sum_{l''}\sum_{d|(l',l'')} \mu(d) f(l',l'') = \sum_d \mu(d) \sum_{\substack{l' \\ d|l'}}\sum_{\substack{l'' \\ d|l''}} f(l',l'') = \sum_d \mu(d)\sum_{l'}\sum_{l''} f(dl',dl'')$$

On applique cela à δ_f donc, en appliquant encore la multiplicativité de λ et ν

$$\delta_f(d_1,d_2) = \sum_a\sum_b \mu(b) b \left(\frac{\lambda(b)}{\nu(b)}\right)^2 \sum_{l'} x_{d_1}(abl')\lambda_f(l')\frac{\sqrt{l'}}{\nu(l')}\sum_{l''} x_{d_2}(abl'')\lambda_f(l'')\frac{\sqrt{l''}}{\nu(l'')}$$

En regroupant les termes selon $ab = c$, cela s'écrit

$$\delta_f(d_1,d_2) = \sum_{c|L} \rho_f(c) y_{d_1}(c)\overline{y_{d_2}(c)}$$

Où l'on a posé

$$\rho_f(c) = \sum_{b|c} \mu(b) b \left(\frac{\lambda_f(b)}{\nu(b)}\right)^2$$

$\forall p, q$ premiers, $\alpha, \beta \geqslant 0$,

$$\mu(p^\alpha q^\beta) p^\alpha q^\beta \left(\frac{\lambda_f(p^\alpha q^\beta)}{\nu(p^\alpha q^\beta)}\right)^2 = \mu(p^\alpha)\mu(p^\beta) p^\alpha q^\beta \left(\frac{\lambda_f(p^\alpha)}{\nu(p^\alpha)}\right)^2 \left(\frac{\lambda_f(q^\beta)}{\nu(q^\beta)}\right)^2$$

Donc par décomposition en facteurs premiers

$$\begin{aligned}\rho_f(c) &= \prod_p \sum_{\alpha \geqslant 0} \mu(p^\alpha) p^\alpha \left(\frac{\lambda_f(p^\alpha)}{\nu(p^\alpha)}\right)^2 \\ &= \prod_p (1 - p\left(\frac{\lambda_f(p)}{p+1}\right)^2)\end{aligned}$$

Rappelons que par définition de la fonction de Möbius

$$\mu(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ -1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha \geqslant 2 \end{cases}$$

Et on définit aussi

$$y_d(c) = \sum_{l|L} x_d(cl)\lambda(l)\frac{\sqrt{l}}{\nu(l)}$$

Par inversion de Möbius

$$x_d(l) = \sum_{c|L} y_d(cl)\mu(c)\lambda_f(c)\frac{\sqrt{c}}{\nu(c)}$$

Afin d'obtenir une base orthonormée on souhaiterait que $\delta_f(d_1, d_2)$ soit le symbole de Kronecker. C'est-à-dire que la matrice $\left(y_d(c)\sqrt{\rho_f(c)}\right) = Id$.
Cela se traduit par

$$x_d(l) = \begin{cases} \mu(c)\sqrt{c}\lambda_f(c)\frac{\sqrt{\rho_c(d)}}{\nu(c)} & \text{si } d = cl \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient alors la proposition suivante :

Propriété 25 : *Soit $N = LM$ sans facteur carré, soit $f \in H_k^*(M)$. Soit*

$$f_d(z) = \left(\frac{d}{\rho_f(d)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{cl=d} \mu(c)\nu(c)^{-1}\lambda_f(c) l^{\frac{k-1}{2}} f(lz)$$

Alors $\{f_d; d \mid L\}$ est une base orthogonal de $S_k(L, f)$.

Nous avons ainsi créé une base orthogonale de $S_k(L, f)$. Cela va nous permettre d'écrire $\Delta_{k,N}(m, n)$ selon cette base.
Soit $f \in H_k^*(M)$, f possède un développement en série de Fourier avec comme coefficients de Fourier $a_f(n)$, nous pouvons exprimer les coefficients de Fourier de f_d ainsi :

$$a_{f_d}(n) = \left(\frac{d}{\rho_f(d)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{cl=d \\ l|n}} \frac{\mu(c)}{\nu(c)}\lambda_f(c) l^{\frac{k-1}{2}} a_f\left(\frac{n}{l}\right)$$

On rappelle (29)

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \sum_{f \in \mathcal{B}_k(N)} \overline{\Psi_f(m)} \Psi_f(n)$$

Où $\mathcal{B}_k(N)$ est une base orthogonale de $S_k(N)$ et (25)

$$\Psi_f(n) = \left(\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi n)^{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}} ||f||^{-1} a_f(n).$$

En utilisant la base ainsi construite on obtient

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \sum_{LM=N} \sum_{f \in H_k^*(M)} \sum_{d|L} (4\pi)^{1-k} \Gamma(k-1) \|f\|^{-2} \frac{d}{\rho_f(d)}$$
$$\left(\sum_{\substack{c_1 l_1 = d \\ l_1 | m}} \frac{\mu(c_1)}{\nu(c_1)} \lambda_f(c_1) \lambda_f\left(\frac{m}{l_1}\right) \right) \left(\sum_{\substack{c_2 l_2 = d \\ l_2 | n}} \frac{\mu(c_2)}{\nu(c_2)} \lambda_f(c_2) \lambda_f\left(\frac{n}{l_2}\right) \right)$$

On suppose désormais $(m,n,N) = 1$. Alors $(l_1, l_2) = 1$ et on pose $c_1 = bl_2, c_2 = bl_1$. On peut donc rassembler les deux dernières sommes :

$$\left(\sum_{l_1} \right) \left(\sum_{l_2} \right) = \sum_{\substack{bl_1 l_2 = d \\ l_1 \mid m, l_2 \mid n}} \left(\frac{\lambda_f(b)}{\nu(b)} \right)^2 \frac{\mu(l_1 l_2)}{\nu(l_1 l_2)} \lambda_f(l_1 l_2) \lambda_f(\frac{m}{l_1}) \lambda(\frac{n}{l_2})$$

De plus, par multiplicativité, soit p un nombre premier,

$$\frac{1}{\rho_f(p)} = 1 - p \frac{\lambda_f(p)^2}{(p+1)^2}$$

$$\sum_{b|p} \frac{b}{\rho_f(b)} \frac{\lambda_f(b)^2}{\nu(b)^2} = 1 + \frac{p}{\rho_f(p)} \frac{\lambda_f(p)^2}{\nu(p)^2} = \frac{1}{\rho_f(p)}$$

Alors

$$\sum_{b|B} \frac{b}{\rho_f(b)} \left(\frac{\lambda_f(b)}{\nu(b)} \right)^2 = \frac{1}{\rho_f(B)}$$

Donc

$$\sum_{d|L} \frac{d}{\rho_f(d)} \left(\sum_{l_1} \right) \left(\sum_{l_2} \right) = \frac{1}{\rho_f(L)} A_f(m,L) A_f(n,L)$$

Avec

$$A_f(m,L) = \sum_{l|(m,L)} l \frac{\mu(l)}{\nu(l)} \lambda_f(l) \lambda_f(\frac{m}{l})$$

Or, d'après les relations de Hecke

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d|(m,n)\\(d,M)=1}} \lambda_f(\frac{mn}{d^2})$$

Comme $l \mid (m,L), d \mid (m/l,l)$ alors $d^2 \mid (m,dL)$. On peut réécrire A_f de la façon suivante :

$$A_f(m,L) = \frac{1}{\nu((m,L))} \sum_{\delta^2|(m,\delta L)} \mu(\delta)\delta\lambda_f(\frac{m}{\delta^2})$$

Donc, d'après le lemme 8, on obtient

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \frac{12}{(k-1)\nu(N)} \sum_{LM=N} \frac{M}{\varphi(M)} \sum_{f\in H_k^*(M)} \frac{A_f(m,L)A_f(n,L)}{\rho_f(L)Z(1,f)}$$

On pose

$$Z_N(1,f) = \sum_{l|N^\infty} \lambda_f(l^2)l^{-1} = \frac{MN}{\varphi(M)\nu(N)\rho_f(L)}$$

Où $l \mid N^\infty \Leftrightarrow [p \mid l \Rightarrow p \mid N]$ Donc

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \frac{12}{(k-1)N} \sum_{LM=N} \sum_{f\in H_k^*(M)} A_f(m,L)A_f(n,L)\frac{Z_N(1,f)}{Z(1,f)}$$

Si $(m,n,N) = 1$ et $(mn,N^2) \mid N$ $A_f(m,L)$ ne présente qu'un terme dans la somme donc se simplifie en

$$A_f(n,L) = \frac{\lambda_f(n)}{\nu((n,L))}$$

Lemme 9. *Soit N sans facteur premier, $(m,n,N) = 1$ et $(mn,N^2) \mid N$, alors*

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \frac{12}{(k-1)N} \sum_{LM=N} \sum_{f\in H_k^*(M)} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(m)}{\nu(mn,L))}\frac{Z_N(1,f)}{Z(1,f)}$$

Dans le but de transformer cette expression en une somme sur les formes nouvelles, on définit

$$\Delta_{k,N}^\sigma(m,n) = \sum_{f\in H_k^\sigma(N)} \lambda_f(m)\lambda_f(n)\frac{Z_N(1,f)}{Z(1,f)}$$

avec $\sigma = *, +, -$.

Propriété 26 : *Soit N sans facteur premier, $(m,N) = 1$ et $(n,N^2) \mid N$, alors*

$$\Delta_{k,N}^*(m,n) = \frac{k-1}{12} \sum_{LM=N} \frac{\mu(L)M}{\nu((n,L))} \sum_{l|L^\infty} l^{-1}\Delta_{k,M}(ml^2,n)$$

Démonstration. Nous allons traiter le terme de droite dans cette égalité, nous le notons RHS. En utilisant le lemme précédent,

$$\Delta_{k,M}(ml^2,n)=\frac{12}{(k-1)M}\sum_{L'M'=M}\sum_{f\in H_k^*(M')}\frac{1}{\nu((n,L'))}\frac{\lambda_f(ml^2)\lambda_f(n)Z_M(1,f)}{Z(1,f)}$$

Comme $l \mid L^\infty$ et $(m,N)=1$ alors $(m,l)=1$ donc $\lambda_f(ml^2)=\lambda_f(m)\lambda_f(l^2)$. Donc

$$\text{RHS}=\sum_{LM=N}\frac{\mu(L)}{\nu((n,L))}\sum_{l|L^\infty}l^{-1}\sum_{L'M'=M}\sum_{f\in H_k^*(M')}\frac{1}{\nu((n,L'))}\frac{\lambda_f(m)\lambda_f(l^2)Z_M(1,f)}{Z(1,f)}$$

Par définition

$$\sum_{l|L^\infty}l^{-1}\lambda_f(l^2)$$

Donc

$$\text{RHS}=\sum_{LM=N}\frac{\mu(L)}{\nu((n,L))}\sum_{L'M'=M}\sum_{f\in H_k^*(M')}\frac{1}{\nu((n,L'))}\lambda_f(m)\lambda_f(n)\frac{Z_M(1,f)Z_L(1,f)}{Z(1,f)}$$

Comme N est sans facteur premier, $Z_M(1,f)Z_L(1,f)=Z_N(1,f)$. On pose $LL'=L''$ et

$$\text{RHS}=\sum_{L''M'=N}\sum_{L|L''}\mu(L)\frac{1}{\nu((n,L''))}\sum_{f\in H_k^*(M')}\lambda_f(m)\lambda_n(f)\frac{Z_N(1,f)}{Z(1,f)}$$

Or

$$\sum_{L|L''}\mu(L)=\begin{cases}1 & \text{si } L''=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Donc $L=L'=1$ ce qui implique $N=M'$.

$$\text{RHS}=\sum_{f\in H_k^*(N)}\lambda_f(m)\lambda_f(n)\frac{Z_N(1,f)}{Z(1,f)}=\Delta_{k,N}^*(m,n)$$

Ce qui achève la preuve. □

De plus, selon [ILS00], si $(n,N)=1$ en utilisant (4)

$$2\Delta_{k,N}^{\pm}(m,n)=\Delta_{k,N}^*(m,n)\pm i^k\mu(N)\sqrt{N}\Delta_{k,N}^*(m,nN)$$

Donc, si $(mn,N)=1$

$$\Delta_{k,N}^{\pm}(m,n)=\frac{k-1}{24}N\sum_{LM=N}\sum_{l|L^\infty}\frac{\mu(L)}{lL}\Delta_{k,M}(ml^2,n)\pm i^k\frac{k-1}{24}\sqrt{N}\sum_{LM=N}\sum_{l|L^\infty}\frac{\mu(M)M}{l\nu(L)}\Delta_{k,M}(ml^2,n)$$

En combinant la proposition 23 et la proposition 26 on obtient

Propriété 27 : *Soit N sans facteur premier, $(m,N)=1$ et $(n,N^2) \mid N$. Alors*

$$\Delta_{k,N}^*(m,n)=\frac{k-1}{12}\varphi(N)\delta_{m,n}+O\left(k^{\frac{1}{6}}(mn)^{\frac{1}{4}}(n,N)^{-\frac{1}{2}}\tau^2(N)\tau_3((m,n))\log(2mnN)\right)$$

Définition 22 : *On définit de manière équivalente*

$$\Delta_{k,N}^{\sigma}(n) = \sum_{f \in H_k^{\sigma}(N)} \lambda_f(n) \qquad \sigma = *, +, -$$

En utilisant (4) nous pouvons relier $\Delta_{k,N}^{\pm}$ et $\Delta_{k,N}^{*}$:

Propriété 28 : *Si* $(n, N) = 1$ *:*

$$2\Delta_{k,N}^{\pm}(n) = \Delta_{k,N}^{*}(n) \pm i^k \mu(N)\sqrt{N}\Delta_{k,N}^{*}(nN)$$

Et si N *est sans facteur premier avec* $(n, N^2) \mid N$

$$\Delta_{k,N}^{*} = \frac{k-1}{12} \sum_{LM=N} \frac{\mu(L)M}{\nu((n,L))} \sum_{(m,M)=1} m^{-1}\Delta_{k,M}(m^2, n)$$

Afin de pouvoir travailler avec ces objets nous allons diviser les sommes en deux termes

$$\Delta_{k,N}^{*}(n) = \Delta_{k,N}^{'}(n) + \Delta_{k,N}^{\infty}(n)$$

Avec

$$\Delta_{k,N}^{'}(n) = \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L \leqslant X}} \frac{\mu(L)M}{\nu((n,L))} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m \leqslant Y}} m^{-1}\Delta_{k,M}(m^2, n) \tag{35}$$

Avec X, Y des paramètres que l'on choisit pour couper ces sommes. Typiquement, X et Y sont petits.

Lemme 10. *Soit* N *sans facteur premier,* $(n, N^2) \mid N$ *et supposons* $\sum_{(q,nN)=1} \lambda_f(q)a_q \ll (nkN)^{\varepsilon}$ *pour tout* $f \in H_k^*(M), M \mid N$*. Alors*

$$\sum_{(q,nN)=1} \Delta_{k,N}^{\infty}(nq)a_q \ll (n,N)^{-1/2}kN(X^{-1} + Y^{-1/2})(nkNXY)^{\varepsilon}$$

Démonstration. Rappelons

$$\Delta_{k,N}(m,n) = \frac{12}{(k-1)N} \sum_{LM=N} \sum_{f \in H_k^*(M)} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(m)}{\nu(mn,L))} \frac{Z_N(1,f)}{Z(1,f)}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{k,N}^{\infty}(nq) &= \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L>X}} \frac{\mu(L)M}{\nu((n,L))} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m \leqslant Y}} m^{-1}\Delta_{k,M}(m^2, n) \\
&+ \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L \leqslant X}} \frac{\mu(L)M}{\nu((n,L))} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m>Y}} m^{-1}\Delta_{k,M}(m^2, n) \\
&= \sum_{\substack{KLM=N \\ L>X}} \frac{\mu(L)}{\nu((n,KL))} \sum_{f \in H_k^{\infty}(M)} \lambda_f(nq) \\
&+ \sum_{\substack{KLM=N \\ L \leqslant X}} \frac{\mu(L)}{\nu((n,KL))} \sum_{f \in H_k^*(M)} \lambda_f(nq)r_f(KM, Y)
\end{aligned}$$

Avec

$$r_f(KM,Y) = \frac{Z_{KM}(1,f)}{Z(1,f)} \sum_{\substack{(m,KM)=1 \\ m>Y}} m^{-1}\lambda_f(m^2)$$

D'après [ILS00]

$$r_f(KM,Y) \ll Y^{-1/2}(kMY)^{\varepsilon}$$

Et

$$|\lambda_f(n)| \ll \tau(n)(n,N)^{-1/2}$$

Ce qui achève la preuve. □

En sortant le terme $q = 1$ de la somme on obtient finalement

$$\Delta^{\infty}_{k,N}(n) \ll (n,N)^{-1/2}kN(X^{-1} + Y^{-1/2})(nkNXY)^{\varepsilon}$$

De plus, en appliquant la proposition 27 a chaque $\Delta_{k,M}(m^2,n)$ dans la définition de $\Delta'_{k,N}(n)$, on obtient

$$\Delta'_{k,N}(n) = \frac{k-1}{12}\frac{\varphi(N)}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{\tau(N)N}{\varphi(N)X}\right)\right) + O\left(k^{-1/3}\left(\frac{nXY^2}{(n,N)N}\right)^{1/2}(nkNXY)^{\varepsilon}\right)$$

Où le premier terme n'existe que si $m^2 = n$

Propriété 29 : *Soit N sans facteur premier et $(n,N^2) \mid N, (n,N) = 1$ alors*

$$\Delta^{*}_{k,N}(n) = \frac{k-1}{12}\frac{\varphi(N)}{\sqrt{n}} + O\left((n,N)^{-1/2}n^{1/6}(kN)^{2/3}\right)$$

où le terme principal n'existe que si $n = m^2$

Démonstration. On spécifie $X = Y^{1/2} = n^{-1/7}k^{8/21}N^{3/7}$ dans les formules précédentes. □

Remarque.
En réalité, ce choix de X permet d'avoir une borne légerement meilleure

$$\Delta^{*}_{k,N}(n) = \frac{k-1}{12}\frac{\varphi(N)}{\sqrt{n}} + O\left((n,N)^{-1/2}n^{1/6}k^{13/21}N^{4/7}\right)$$

mais ce gain n'est pas pertinent pour la suite de notre étude.

Nous pouvons maintenant estimer la taille des espaces $H^{\sigma}_{k}(N)$.

Théorème 6 : *Soit $k \geqslant 2$ pair et N sans facteur premier, alors*

$$|H^{*}_{k}(N)| = \frac{k-1}{12}\varphi(N) + O((kN)^{2/3})$$

Et, si $N \neq 1$

$$|H^{\pm}_{k}(N)| = \frac{k-1}{24}\varphi(N) + O((kN)^{5/6})$$

Démonstration. En prenant $n = 1$ dans la proposition 29 on obtient

$$\Delta^*_{k,N}(1) = \frac{k-1}{12}\varphi(N) + O\left((kN)^{2/3}\right)$$

Or

$$\Delta^*_{k,N}(1) = \sum_{f \in H^*_k(N)} 1 = |H^*_k(N)|$$

Donc

$$|H^*_k(N)| = \frac{k-1}{12}\varphi(N) + O((kN)^{2/3})$$

De plus

$$2|H^{\pm}_k(N)| = |H^*_k(N)| + \Delta^*_{k,N}(N)$$

Et

$$\Delta^*_{k,N}(N) = O((kN)^{5/6})$$

Donc

$$|H^{\pm}_k(N)| = \frac{k-1}{24}\varphi(N) + O((kN)^{5/6})$$

Ce qui achève la preuve. □

4.3 Formule explicite pour $D(f, \phi)$

Nous voulons maintenant établir une formule explicite pour $D(f, \phi)$. Nous avons presque aucune information sur les zéros, il est donc compliqué d'étudier $D(f, \phi)$ directement c'est pourquoi voulons reformuler $D(f, \phi)$ en fonction de paramètres sur lesquels nous avons plus d'informations. Nous reprenons les propriétés sur les fonctions L expliquées dans la section 2.4.1.
Soit $\Lambda(s) = \prod_p L_p(s)$ un produit Eulerien avec les facteurs locaux

$$L_p(s) = (1 - \alpha_1(p)p^{-s})^{-1} \cdots (1 - \alpha_m(p)p^{-s})^{-1}$$

Avec $|\alpha_j(p)| \leqslant 1$ (Conjecture de Ramanujan) pour $p \neq \infty$ et

$$L_\infty(s) = AQ^s\Gamma\left(\frac{s}{2} + \alpha_1\right)\cdots\Gamma\left(\frac{s}{2} + \alpha_m\right)$$

Avec $A \neq 0 \in \mathbb{C}$, $Q > 0, \alpha_1 \cdots, \alpha_m \geqslant 0$. On suppose que $\Lambda(s)$ est entière d'ordre 1 et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s) = \varepsilon\Lambda(1-s)$$

Soit $G(s)$ une fonction holomorphe dans la bande $-1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 2$ qui vérifie :

$$G(s) = G(1-s) \qquad \text{et} \qquad s^2G(s) \ll 1$$

Lemme 11. *Soit $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ décrivant les zéros de $\Lambda(s)$ avec multiplicité. Alors*

$$\sum_\rho G(\rho) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds$$

Démonstration. On applique le théorème des résidus a $2G(s)\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C 2G(s)\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}ds = \sum_{\rho\in C}\mathrm{Res}(G\frac{\Lambda'}{\Lambda},\rho))$$

Avec C rectangle de coins $(-1,-iT);(2,-iT);(2,iT);(-1,iT)$.
De plus, en notant m la multiplicité de ρ , $\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)} = \frac{d}{ds}(\log(\Lambda)) = (\frac{m}{s-\rho}+\cdots)$ donc

$$\mathrm{Res}(2G\frac{\Lambda'}{\Lambda},\rho) = 2mG(\rho)$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds = \sum_{\rho} 2G(\rho)$$

On décompose

$$\int_C = \int_{-1+iT}^{-1-iT} + \int_{2-iT}^{2+iT} + \int_{2+iT}^{-1+iT} + \int_{-1-iT}^{2-iT}$$

D'après l'équation fonctionnelle

$$\int_{(-1)} = -\int_{(2)}$$

Traitons maintenant les intégrales horizontales :

$$\int_{-1-iT}^{2-iT} 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds = \int_{-1}^{2} 2G(t+iT)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(t+iT)dt$$

Or

1. $|\frac{\Lambda'}{\Lambda}(t+iT)| \ll \log(T)$
2. $G(t+iT) \ll \frac{1}{T^2}$

Donc

$$\int_{-1-iT}^{2-iT} 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds \ll \frac{\log T}{T^2} \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De même

$$\int_{2+iT}^{-1+iT} 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement

$$\lim_{T\to\infty}\int_C 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds = 2\int_{(2)} 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds$$

Donc en rassemblant les intégrales on trouve que

$$\sum_{\rho} G(\rho) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds$$

Ce qui achève la preuve. □

On peut réécrire cette propriété dans une forme qui nous sera plus facilement exploitable plus tard à travers la propriété suivante

Propriété 30 : *Avec* $\Lambda(s) = \prod_p L_p(s)$ *on a*

$$\sum_\rho G(\rho) = \sum_p H(p) \tag{36}$$

Où

1. *Si* $p \neq \infty, H(p) = -2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_j \alpha_j^\nu(p)\right) F(p^\nu)\log p$
2. $H(\infty) = 2F(1)\log Q + \sum_j F_j$

Et

$$F(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\frac{1}{2})} G(s)y^{-s}ds \qquad F_j = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\frac{1}{2})} G(s)\Psi(\frac{s}{2}+\alpha_j)ds$$

Et $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

Démonstration. Soit $\Lambda(s) = \prod_p L_p(s)$, alors, pour $p \neq \infty$, $\log(\Lambda(s)) = \sum_p \sum_j -\log(1-\alpha_j(p)p^{-s})$ donc

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s) = \sum_p \sum_j \sum_\nu (-\alpha_j^\nu(p)\log(p))p^{-\nu s}$$

Finalement, en utilisant l'holomorphie de G pour déplacer l'intégrale,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} 2G(s)\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s)ds &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} 2G(s)\sum_p\sum_j\sum_\nu(-\alpha_j^\nu(p)\log(p))p^{-\nu s}\\ &= -2\sum_p\log(p)\sum_\nu\left(\sum_j\alpha_j^\nu(p)\right)\frac{1}{2i\pi}\int_{(\frac{1}{2})}G(s)p^{-\nu s}ds\end{aligned}$$

Si $p = \infty$, comme $L_\infty(s) = AQ^s\prod_{i=1}^m \Gamma(\frac{s}{2}+\alpha_i)$,

$$\log(L_\infty(s)) = \log(AQ^s) + \sum_{j=1}^m \Psi(\frac{s}{2}+\alpha_j)$$

On obtient de la même façon

$$H(\infty) = 2F(1)\log Q + \sum_j F_j$$

Ce qui achève la preuve. □

Afin d'obtenir une bonne normalisation pour étudier la densité de niveau 1 on specifie

$$G(s) = \phi\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)\frac{\log R}{2i\pi}\right)$$

Avec $R > 1$ et ϕ une fonction de Schwartz paire telle que $\hat{\phi}$ est à support compact.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(\frac{1}{2})} G(s)y^{-s} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{\log R}{2\pi}t\right) y^{-(\frac{1}{2}+it)}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}\log R}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)e^{-iu\frac{\log y}{\log R}2\pi}du \\ &= \frac{1}{\log R\sqrt{y}}\hat{\phi}\left(\frac{\log y}{\log R}\right) \end{aligned}$$

Et

$$F(1) = \frac{1}{\log R}\hat{\phi}(0)$$

Donc, en supposant GRH $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ (36) devient :

$$\sum_{\rho}\phi\left(\frac{\gamma}{2\pi}\log R\right) = \frac{A}{\log R} - 2\sum_{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{j}\alpha_j^{\nu}(p)\right)\hat{\phi}\left(\frac{\nu\log p}{\log R}\right)p^{-\nu/2}\frac{\log p}{\log R} \tag{37}$$

Avec

$$A = 2\hat{\phi}(0)\log Q + \sum_{j} A_j \qquad A_j = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi\left(\alpha_j + \frac{1}{4} + \frac{2\pi i x}{\log R}\right)\phi(x)dx$$

Par développement de Taylor,

$$\begin{aligned} \Psi(a+ib) &= \Psi(a) + ib\Psi'(a) - \frac{b^2}{2}\Psi''(a) + o(b^2) \\ \Psi(a-ib) &= \Psi(a) - ib\Psi'(a) - \frac{b^2}{2}\Psi''(a) + o(b^2) \end{aligned}$$

Pour avoir un meilleur aperçu de ce terme nous pouvons utiliser le lemme suivant

Lemme 12. *Nous avons la formule d'approximation pour $a > 0$*

$$\Psi''(a) \sim -\frac{1}{a^2}$$

Démonstration. Nous utilisons la formule de Weierstrass pour la fonction Γ :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)z^{-z/k}$$

En utilisant la dérivée logarithmique nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right] \\ &= -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{z+k}\right] \end{aligned}$$

Donc

$$\Psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2} \qquad \Psi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(z+k)^3}$$

On en déduit donc le résultat.

□

On utilise cette formule d'approximation et le développement de Taylor pour déduire que

$$\Psi(a+ib) + \Psi(a-ib) = 2\Psi(a) + O\left(a^{-2}b^2\right)$$

Cette formule permet d'obtenir le lemme suivant qui donne une approximation de A

Lemme 13. *Nous avons la formule d'approximation*

$$A_j = \hat{\phi}(0)\Psi\left(\alpha_j + \frac{1}{4}\right) + O\left(((\alpha_j+1)\log R)^{-2}\right)$$

Démonstration. Nous partons de la définition de A_j et nous utilisons la parité de ϕ pour pouvoir appliquer la formule d'approximation :

$$\begin{aligned}
A_j &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\alpha_j + \frac{1}{4} + \frac{2\pi i x}{\log R}\right)\phi(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[\Psi\left(\alpha_j + \frac{1}{4} + \frac{2\pi i x}{\log R}\right) + \Psi\left(\alpha_j + \frac{1}{4} - \frac{2\pi i x}{\log R}\right)\right]\phi(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[2\Psi\left(\alpha_j + \frac{1}{4}\right) + O\left((\alpha+\frac{1}{4})^{-2}\frac{(\pi x)^2}{\log(R)^2}\right)\right]\phi(x)dx \\
&= \Psi\left(\alpha_j + \frac{1}{4}\right)\hat{\phi}(0) + O\left(((\alpha_j+1)\log R)^{-2}\right)
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir le $O(\cdots)$ nous utilisons le fait que ϕ soit une fonction de Schwartz, ainsi $\int_0^\infty x^2\phi(x)dx$ converge d'où le résultat. □

D'après le lemme 12, $\Psi(\alpha + \frac{1}{4}) = \log\alpha + O(1)$ si $\alpha \geqslant \frac{1}{4}$ donc

$$A = \hat{\phi}(0)\log(\alpha_1 \cdots \alpha_m Q^2) + O(1)$$

Alors, pour $\Lambda(s) = \Lambda(s,f)$ et $f \in H_k^*(N)$, d'après la forme de $L_\infty(s,f)$ on obtient

$$A = \hat{\phi}(0)\log k^2 N + O(1)$$

On déduit de cette expression une formule d'approximation de $D(f,\phi)$ donné dans la proposition suivante :

Propriété 31 : *Soit ϕ une fonction de Schwartz paire sur $\mathbb{R}$ de transformée de Fourier $\hat{\phi}$ à support compact, et $R > 1$. Alors, pour $f \in H_k^*(N)$ on a*

$$D(f,\phi) = \hat{\phi}(0)\frac{\log k^2 N}{\log R} + \frac{1}{2}\phi(0) - \sum_{p\nmid N} \lambda_f(p)\hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right)\frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R} \tag{38}$$

$$- \sum_{p\nmid N} \lambda_f(p^2)\hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right)\frac{2\log}{p\log R} + O\left(\frac{\log\log 3N}{\log R}\right)$$

Démonstration. Par définition, nous avons

$$D(f,\phi) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+i\gamma_f} \phi\left(\frac{\gamma_f}{2\pi}\log R\right)$$

Nous allons utiliser la formule que nous venons de prouver sur cette somme (37)

$$\sum_{\rho}\phi\left(\frac{\gamma}{2\pi}\log R\right) = \frac{A}{\log R} - 2\sum_{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{j}\alpha_j^{\nu}(p)\right)\hat{\phi}\left(\frac{\nu\log p}{\log R}\right)p^{-\nu/2}\frac{\log p}{\log R}$$

Avec

$$A = \hat{\phi}(0)\log k^2 N + O(1)$$

ce qui nous donne le premier terme dans (38). Nous rappelons que nous avons vu dans la propriété 13 que $\forall \nu \geqslant 0$, $\left|\sum \alpha_j^{\nu}(p)\right| \leqslant 2$ et

$$\sum \alpha_j(p) = \alpha_f(p) + \beta_f(p) = \lambda_f(p)$$

$$\sum \alpha_j^2(p) = \alpha_f^2(p) + \beta_f^2(p) = \lambda_f(p^2) - \chi_0(p)$$

De plus, si $p \mid N$,

$$\alpha_f(p)\beta_f(p) = \chi_0(p) = 0$$

Donc $\alpha_f(p) = 0$ ou $\beta_f(p) = 0$, or $\lambda_f(p) = \alpha_f(p) + \beta_f(p)$, on va supposer $\beta_f(p) = 0$, ce qui amène $\lambda_f(p) = \alpha_f(p)$. Rappelons que pour $p \mid N$ $|\alpha_f(p)| = p^{-1/2}$ donc pour $p \mid N$ on a $\lambda_f^2(p) = p^{-1}$. Nous allons alors estimer les différents termes pour $\nu = 1, 2$ et $\nu \geqslant 3$.

- Pour $\nu = 1$: nous avons le terme $\sum_p \lambda_f(p)\hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right)\frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R}$. Nous séparons les cas $p \mid N$ et $p \nmid N$. Si $p \mid N$, on a $|\lambda_f(p)| = p^{-1/2}$ donc $\left|\sum_p \lambda_f(p)\hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right)\frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R}\right| \ll \frac{1}{\log R}\sum_{p\mid N} p^{-1}\log p$. D'après le premier théorème de Mertens,

  $$\sum_{p\mid N} p^{-1}\log p \ll \log N$$

  On décompose N en facteurs premiers, on note $N = p_1 ... p_k$ donc $\log N \ll \log p_k$. D'après le théorème des nombres premiers $p_k \sim_\infty \log N$ donc $\sum_{p\mid N} p^{-1}\log p \ll \log\log 3N$ (On prend $3N$ pour éviter les problèmes $N = 1, 2$). Finalement on obtient le terme

  $$\sum_{p\nmid N} \lambda_f(p)\hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right)\frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R} + O\left(\frac{\log\log 3N}{\log R}\right)$$

- Pour $\nu = 2$: nous avons le terme $\sum_p(\lambda_f(p^2) - \chi_0(p))\hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right)\frac{2\log p}{p\log R}$. Nous séparons les cas $p \mid N$ et $p \nmid N$. Si $p \nmid N$, $\chi_0(p) = 1$. Si $p \mid N$, $\chi_0(p) = 0$ et comme la somme est finie on obtient grossièrement que c'est $O\left(\frac{1}{\log R}\right)$. Finalement, on a le terme

  $$\sum_{p\nmid N}(\lambda_f(p^2) - 1)\hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right)\frac{2\log p}{p\log R} + O\left(\frac{1}{\log R}\right)$$

- Pour $\nu \geqslant 3$: Nous cherchons à borner le terme $\sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_j \alpha_j^\nu(p)\right) \hat{\phi}\left(\frac{\nu \log p}{\log R}\right) p^{-\nu/2} \frac{\log p}{\log R}$. Comme $\left|\sum \alpha_j^\nu(p)\right| \leqslant 2$ il nous reste à estimer $\sum_p \hat{\phi}\left(\frac{\nu \log p}{\log R}\right) p^{-\nu/2} \frac{\log p}{\log R}$. $\hat{\phi}$ étant à support compact nous pouvons borner grossièrement cette somme par $\frac{1}{\log R}$ car la somme est finie. Donc

$$\forall \nu \geqslant 3, \quad \sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_j \alpha_j^\nu(p)\right) \hat{\phi}\left(\frac{\nu \log p}{\log R}\right) p^{-\nu/2} \frac{\log p}{\log R} \ll \frac{1}{\log R}$$

Afin d'obtenir la formule finale, il nous reste a traiter $-\sum_{p\nmid N} \hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{p \log R}$. De la même manière que pour le cas $\nu = 1$, nous complétons cette somme car $\sum_{p|N} \hat{\phi}(\frac{2\log p}{\log R}) \frac{2\log p}{p\log R} \ll \frac{\log\log 3N}{\log R}$ donc on va estimer $\sum_p \hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{p\log R}$. Par sommation d'Abel

$$\sum_p \hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{p\log R} = \frac{2}{\log R} \int_1^\infty \hat{\phi}\left(\frac{2\log t}{\log R}\right) \frac{d\theta(t)}{t}$$

Avec $\theta(t) = \sum_{p\leqslant t} \log p = t + O\left(x \exp(-c\sqrt{\log x})\right)$ d'après le Théorème des Nombres Premiers. Alors, en posant $u = \frac{2\log t}{\log R}$,

$$\frac{2}{\log R} \int_1^\infty \hat{\phi}\left(\frac{2\log t}{\log R}\right) \frac{d\theta(t)}{t} = \int_0^\infty \hat{\phi}(u) du + O\left(\frac{1}{\log R}\right)$$

Comme $\hat{\phi}$ est paire, par formule d'inversion de Fourier $\int_0^\infty \hat{\phi}(u)du = \frac{1}{2}\phi(0)$.

En mettant bout à bout ces résultats on obtient alors

$$\begin{aligned} D(f,\phi) &= \hat{\phi}(0)\frac{\log k^2 N}{\log R} + \frac{1}{2}\phi(0) - \sum_{p\nmid N} \lambda_f(p)\hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R} \\ &- \sum_{p\nmid N} \lambda_f(p^2)\hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right) \frac{2\log}{p\log R} + O\left(\frac{\log\log 3N}{\log R}\right) \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Pour la suite nous notons

- $E(\phi) = \hat{\phi}(0) + \frac{1}{2}\phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\left(1 + \frac{1}{2}\delta_0(x)\right) dx$
- $P(f,\phi) = \sum_{p|N} \lambda_f(p)\hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R}$

En utilisant GRH sur $L(s, \mathrm{sym}^2(f))$, ([ILS00] chap.4) montre que

$$\sum_{p\nmid N} \lambda_f(p^2)\hat{\phi}\left(\frac{2\log p}{\log R}\right) \frac{2\log}{p\log R} \ll \frac{\log\log kN}{\log R}$$

En choisissant $R = k^2 N$, ce qui correspond au conducteur analytique de f avec $f \in H_k^*(N)$, nous obtenons la formule

$$D(f,\phi) = E(\phi) - P(f,\phi) + O\left(\frac{\log\log kN}{\log kN}\right) \tag{39}$$

4.4 Premiers résultats pour $H_k^*(N)$

L'objectif de cette partie est de donner un premier résultat sur la Density Conjecture à partir d'estimations qui n'exploitent que les outils déjà énoncés. Nous allons montrer que le résultat s'applique à $H_k^*(N)$ pour une fonction ϕ de Schwartz paire ayant une transformée de Fourier à support dans $(-v, v)$. Nous allons montrer dans cette partie quel v permet d'obtenir un premier résultat.

Dans un premier temps, nous allons utiliser les résultats des précédentes parties pour estimer la somme

$$\mathscr{B}_k^*(\phi) = \sum_{f \in H_k^*(N)} D(f, \phi)$$

On utilise ici l'équation équation (38) et le théorème 6. Alors :

$$\mathscr{B}_k^*(\phi) = \frac{k-1}{12}\varphi(N)E(\phi) - \mathscr{P}_k^*(\phi) + O\left(k\varphi(N)\frac{\log\log kN}{\log kN}\right)$$

Où l'on pose

$$\mathscr{P}_k^*(\phi) = \sum_{f \in H_k^*(N)} P(f, \phi)$$

Par définition de $P(f, \phi)$ on réécrit

$$\mathscr{P}_k^*(\phi) = \sum_{p \nmid N} \left(\sum_{f \in H_k^*(N)} \lambda_f(p) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R}$$

On rappelle que $\Delta_k^*(n) = \sum_{f \in H_k^*(N)} \lambda_f(n)$ et qu'on a définit la décomposition

$$\Delta_k^*(n) = \Delta_k'(n) + \Delta_k^\infty(n)$$

Nous avons montré (35) que

$$\Delta_k'(n) = \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L \leqslant X}} \frac{\mu(L)M}{\nu((n,L))} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m \leqslant Y}} m^{-1}\Delta_{k,M}(m^2, n)$$

Et, avec le choix de paramètre $X = Y = (kN)^\varepsilon$,

$$\Delta_k^\infty(n) \ll \frac{k\varphi(N)}{\log kN}$$

En utilisant la définition de $\Delta_{k,M}(m^2, n)$ nous trouvons une autre forme pour $\Delta_k'(n)$ qui sera plus facilement exploitable :

$$\Delta_k'(n) = \frac{k-1}{12}\frac{\varphi(N)}{\sqrt{n}} + \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L \leqslant X}} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m \leqslant Y}} \frac{\mu(L)M}{\nu((l,L))m} 2\pi i^k \sum_{c \equiv 0(M)} c^{-1} S(m^2, n, c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi m\sqrt{n}}{c}\right)$$

En assemblant ces résultats, nous pouvons reformuler $\mathscr{P}_k^*(\phi)$ de la manière suivante :

$$\mathscr{P}_k^*(\phi) = \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L\leqslant X}} \mu(L) M \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m\leqslant Y}} m^{-1} \sum_{c\equiv 0(M)} c^{-1} Q_k^*(m,c) + O\left(\frac{k\varphi(N)}{\log kN}\right)$$

Avec

$$Q_k^*(m,c) = 2\pi i^k \sum_{p\nmid N} S(m^2,p,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi m}{c}\sqrt{p}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R}$$

Rappelons que nous avons les bornes suivantes :

$$|S(m,n,c)| \leqslant (m,n,c) \min\left(\frac{c}{(n,c)}, \frac{c}{(m,c)}\right)^{1/2} \tau(c)$$

Et si $k \geqslant 2$ et $0 < x \leqslant \frac{k}{3}$

$$J_{k-1}(x) \ll 2^{-k} x$$

Dans les sommes il y a les conditions $m \leqslant Y$ et $c \equiv 0(M)$ donc $c \equiv 0(\frac{N}{L})$ alors $c \gg \frac{N}{X}$. De plus,$\hat{\phi}$ est à support compact, on nous $(-v, v)$ ce support $\frac{\log p}{\log R} \leqslant v$ ce qui est équivalent à $p \leqslant P = R^{v'}$ avec $v' < v$. Ainsi la contrainte $\frac{4\pi m}{c} P^{1/2} \leqslant \frac{k}{3}$ se réécrit $\frac{4\pi}{N} XY P^{1/2} \leqslant \frac{k}{3}$ c'est-à-dire

$$12\pi XY P^{1/2} \leqslant kN \tag{40}$$

Sous cette contrainte nous pouvons estimer $Q_k^*(m,c)$:

$$\begin{aligned} Q_k^*(m,c) &= 2\pi i^k \sum_{p\nmid N} S(m^2,p,c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi m}{c}\sqrt{p}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R} \\ &\ll \sum_{p\leqslant P} 2^{-k} \frac{4\pi m}{c} \sqrt{p}\sqrt{c} \frac{\log p}{\sqrt{p}\log R} \tau(c) \\ &\ll 2^{-k} m c^{\varepsilon - 1/2} P \end{aligned}$$

où nous utilisons $\forall \varepsilon, \tau(c) \ll c^{\varepsilon}$.

Maintenant nous allons nous servir de cette majoration pour estimer $\mathscr{P}_k^*(\phi)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_k^*(\phi) &= \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L\leqslant X}} \mu(L) M \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m\leqslant Y}} m^{-1} \sum_{c\equiv 0(M)} c^{-1} Q_k^*(m,c) + O\left(\frac{k\varphi(N)}{\log kN}\right) \\ &\ll 2^{-k} kP \sum_{\substack{LM=N \\ L\leqslant X}} M \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m\leqslant Y}} \sum_{c\equiv 0(M)} c^{-3/2+\varepsilon} + \frac{k\varphi(N)}{\log kN} \end{aligned}$$

On note $c = CM$ et comme la série $\sum_C C^{-3/2+\varepsilon}$ converge on obtient

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_k^*(\phi) &\ll 2^{-k} kP \sum_{\substack{LM=N \\ L\leqslant X}} M^{\varepsilon-1/2} (kN)^{\varepsilon} + \frac{k\varphi(N)}{\log kN} \\ &\ll 2^{-k} kP N^{\varepsilon-1/2} + \frac{k\varphi(N)}{\log kN} \end{aligned}$$

Afin qu'il n'y ait pas de contribution de $\mathscr{P}_k^*(\phi)$ dans $\mathscr{B}_k^*(\phi)$ il faut que les deux termes dans $\mathscr{P}_k^*(\phi)$ soient bornés par $k\frac{\varphi(N)}{\log kN}$. On utilise $R = k^2N$ donc on nécessite

$$\begin{aligned} 2^{-k}PN^{\varepsilon-1/2} &\asymp k\frac{\varphi(N)}{\log kN} \\ R^{v'} &\asymp 2^k\frac{N^{3/2}}{\log kN} \\ v' &\leqslant k\frac{\log 2}{\log k^2N} + \frac{\log N}{\log k^2N} + \frac{\log N}{2\log k^2N} \\ v' &\leqslant 1 + \frac{\log N}{2\log k^2N} \end{aligned}$$

Et nous obtenons donc un premier théorème de densité

Théorème 7 : *Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ une fonction de Schwartz paire dont la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ est à support compact dans $(-v, v)$ avec*

$$v = 1 + \frac{\log N}{2\log(k^2N)}.$$

Alors, N parcourant les entiers sans facteur carré et k fixé pair :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|H_k^*(N)|} \sum_{f\in H_k^*(N)} D(f;\phi) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, W(O)(x)\, dx$$

où $W(O)(x) = 1 + \delta_0(x)$

Remarque.
Asymptotiquement, nous obtenons un support dans $(-3/2, 3/2)$ en aspect niveau et $(-1, 1)$ en aspect poids. Nous allons maintenant voir comment des méthodes plus poussées permettent d'améliorer à un support dans $(-2, 2)$.

Dans la suite nous allons chercher à améliorer ce support et nous allons aussi donner un tel résultat pour les familles $H_k^{\pm}(N)$.

4.5 Exploiter la somme sur les premiers

Nous allons dans cette partie exploiter la somme sur les premiers dans $\mathscr{P}_k^{\sigma}(\phi)$. Pour cela nous utiliserons l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de Dirichlet sous la forme suivante ([IK04],chap 5) :

$$\sum_{p\leqslant x} \chi(p)\log p = \delta_\chi x + O(x^{1/2}(\log cx)^2)$$

où χ est un caractère modulo c et δ_χ est la fonction indicatrice du caractère principal. Nous aurons besoin des deux objets suivants :

Définition 23 : *Soient n, c des entiers, soit χ un caractère modulo c. On appelle somme de Gauss l'objet*

$$G_\chi(n) = \sum_{a\ (mod\ c)} \chi(a) e\left(\frac{an}{c}\right)$$

Si χ est le caractère principal cette somme devient une somme de Ramanujan

$$R(n,c) = \sideset{}{^*}\sum_{a \pmod c} e\left(\frac{an}{c}\right) = \sum_{d|(c,n)} \mu(\frac{c}{d})d$$

En exploitant les relations d'orthogonalité de caractères nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 14. *Soient m, n des entiers et $x \geqslant 2$ alors*

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{x}{\varphi(c)}R(m;c)R(n;c) + O(\varphi(c)x^{1/2}(\log cx)^2). \tag{41}$$

Démonstration. Si $p \nmid c$ alors il existe une unique classe de congruence $a \pmod c$ telle que $a \equiv p \pmod c$ par unicité de la division euclidienne on peut donc réécrire

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \sum_{p\leqslant x}\sum_{a \pmod c} S(m,na,c)\mathbb{1}_{a=p(c)}\log(p)$$

D'après les formules d'orthogonalité de caractères

$$\mathbb{1}_{a=p(c)} = \frac{1}{\varphi(c)}\sum_{\chi \pmod c}\chi(a)\bar{\chi}(p)$$

On rassemble ces résultats

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{1}{\varphi(c)}\sum_{\chi \pmod c}\left(\sum_{a \pmod c}\chi(a)S(m,an,c)\right)\left(\sum_{p\leqslant x}\bar{\chi}(p)\log p\right)$$

On va maintenant traiter la somme sur $a \pmod c$ à l'interieur. Pour cela on applique la définition de $S(m,an,c)$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{a \pmod c}\chi(a)S(m,an,c) &= \sum_{a \pmod c}\chi(a)\sum_{d \pmod c} e(\frac{md}{c})e(\frac{na\bar{d}}{c})\\
&= \sum_{d \pmod c} e(\frac{md}{c})G_\chi(n\bar{d})\\
&= \sum_{d \pmod c} e(\frac{md}{c})\chi(d)G_\chi(n)\\
&= G_\chi(m)G_\chi(n)
\end{aligned}$$

De plus en appliquant GRH on trouve

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{1}{\varphi(c)}\sum_{\chi \pmod c} G_\chi(m)G_\chi(n)\{\delta_x x + O(x^{1/2}(\log cx)^2)\}$$

On rappelle que pour les sommes de Gauss nous avons la relation d'orthogonalité

$$\sum_{\chi \pmod c} |G_\chi(n)|^2 = \varphi(c)^2.$$

En effet, par les relations d'orthogonalité $\sum_{\chi \pmod c} \chi(a)\bar\chi(b) = \varphi(c)\delta_{a\equiv b(c)}$ et comme $|G_\chi(n)|^2 = G_\chi(n)\overline{G_\chi(n)}$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \pmod c} |G_\chi(n)|^2 &= \sum_{\chi \pmod c}\sum_{a \pmod c}\sum_{b \pmod c} \chi(a)\bar\chi(b) e\left(\frac{(a-b)n}{c}\right)\\ &= \sum_{a,b \pmod c}\left(\sum_{\chi \pmod c}\chi(a)\bar\chi(b)\right) e\left(\frac{(a-b)n}{c}\right)\\ &= \sum_{a \pmod c}\varphi(c)\\ &= \varphi(c)^2\end{aligned}$$

Alors, en sortant le caractère principal de la somme nous avons

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{x}{\varphi(c)}R(m;c)R(n;c) + \frac{1}{\varphi(c)}\sum_{\chi \pmod c} G_\chi(m)G_\chi(n)\{O(x^{1/2}(\log cx)^2)\}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour traiter la somme :

$$\sum_{\chi \pmod c} |G_\chi(m)G_\chi(n)| \leqslant \Big(\sum_{\chi \pmod c}|G_\chi(n)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\chi \pmod c}|G_\chi(m)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \varphi(c)^2$$

En combinant ces résultats nous obtenons le résultat souhaité

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{x}{\varphi(c)}R(m;c)R(n;c) + O(\varphi(c)x^{1/2}(\log cx)^2)$$

Ce qui achève la preuve. □

Dans le cas où c et n ont un diviseur commun suffisamment grand nous pouvons améliorer ce terme d'erreur en utilisant des caractère de plus petit modulo, ce qui nous donne le lemme suivant :

Lemme 15. *Soit M tel que $M \mid (c,n)$ et $(M,m)=1$. Alors*

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ pM\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{x}{\varphi(c)}R(m;c)R(n;c) + O\left(\varphi\big(\frac{c}{M}\big)x^{1/2}(\log cx)^2\right) \tag{42}$$

Dans cette formule le terme principal disparaît si $(M,c/M)\neq 1$. S'il y a égalité alors

$$\frac{1}{\varphi(c)}R(m;c)R(n;c) = \frac{\mu(M)}{\varphi(c/M)}R\left(m;\frac{c}{M}\right)R\left(\frac{n}{M};\frac{c}{M}\right) \tag{43}$$

Démonstration. On effectue la même méthode que pour le lemme précédent. On pose $c = c'M$ et $n = n'M$ et on décompose modulo c

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ pM\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{1}{\varphi(c)}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\ c)}\Big(\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ c')}\chi(a)S(m,an,c)\Big)\Big(\sum_{p\leqslant x}\bar{\chi}(p)\log p\Big)$$

On reconnaît de la même manière les sommes de Gauss :

$$\begin{aligned}\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ c')}\chi(a)S(m,an,c) &= \sum_{a\,(\mathrm{mod}\ c')}\chi(a)\sum_{d\,(\mathrm{mod}\ c)} e\big(\frac{md}{c}\big)e\big(\frac{and\bar{}}{c}\big)\\ &= \sum_{d\,(\mathrm{mod}\ c)} e\big(\frac{md}{c}\big)G_\chi(n'\bar{d})\\ &= \sum_{d\,(\mathrm{mod}\ c)} e\big(\frac{md}{c}\big)G_{\chi^*}(n'\bar{d})\mu(M)\chi^*(M)\\ &= G_{\chi^*}(m)G_{\chi^*}(n')\mu(M)\chi^*(M)\end{aligned}$$

où χ^* désigne le caractère primitif χ (mod c'). Donc

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ pM\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{1}{\varphi(c)}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\ c')}\mu(M)\chi(M)G_\chi(m)G_\chi(n')\{\delta_x x + O(x^{1/2}(\log c'x)^2)\}$$

On sort le caractère principal et on applique GRH donc

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ pM\nmid c}} S(m,np,c)\log p = \frac{1}{\varphi(c)}\mu(M)\chi_0(M)R(m;c')R(n';c') + O\left(\varphi(\frac{c}{M})x^{1/2}(\log cx)^2\right)$$

Comme le terme principal doit coïncider avec le lemme précédent nous obtenons le lemme. □

Nous allons nous servir de ces lemmes pour pouvoir estimer les sommes que nous retrouvons dans le chapitre précédent.
Dans un premier temps nous voulons estimer $\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid N}} S(m^2,p,c)\frac{\log p}{\sqrt{p}}$. Pour cela nous utilisons la formule de sommation partielle donc

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid N}} S(m^2,p,c)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = \frac{\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid N}} S(m^2,p,c)\log p}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_2^x \frac{\sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\nmid N}} S(m^2,p,c)\log p}{t^{3/2}}dt$$

On applique maintenant le lemme 14. Notons que $R(1;c) = \mu(c)$ donc le premier terme est

$$2\frac{\mu(c)}{\varphi(c)}R(m^2;c)x^{1/2} + O(\varphi(c)(\log cx)^2).$$

Nous allons regarder le deuxième terme :

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\nmid N}} S(m^2,p,c)\log p}{t^{3/2}}dt &= \int_2^x \frac{R(m^2;c)}{\varphi(c)t^{1/2}}+\frac{\varphi(c)\log(ct)^2}{t}dt\\ &\ll \frac{R(m^2;c)}{\varphi(c)}\sqrt{x}+c\log(cx)^2\log(x)\\ &\ll c(cx)^{\varepsilon}\end{aligned}$$

On majore de même $\varphi(c)(\log(cx)^2)\ll c(cx)^{\varepsilon}$ et on obtient

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid N}} S(m^2,p,c)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = 2\frac{\mu(c)}{\varphi(c)}R(m^2;c)x^{1/2}+O(c(cx)^{\varepsilon}) \tag{44}$$

On fait de même en se servant du lemme 15 et on estime :

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid N}} S(m^2,pN,c)\frac{\log p}{\sqrt{p}} = 2\frac{\mu(M)}{\varphi(b)}R(m^2;b)R(L;b)x^{1/2}+O(b(bx)^{\varepsilon}) \tag{45}$$

où $LM=N$, $c=bM$ et le terme principal n'existe que si $(b,M)=1$.

Nous pouvons maintenant trouver des meilleurs estimations de $Q_k^*(m,c)$. On suppose que $\hat{\phi}$ est à support dans $(-v,v)$ alors la somme dans $Q_k^*(m,c)$ parcours les premiers $p\leqslant P=R^{v'}$ avec $v'<v$. On rappelle que

$$Q_k^*(m,c)=2\pi i^k\sum_{p\nmid N} S(m^2,p,c)J_{k-1}\left(\frac{4\pi m}{c}\sqrt{p}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right)\frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R}$$

Afin d'introduire (44) dans $Q_k^*(m,c)$ on effectue une sommation partielle donc

$$Q_k^*(m,c)=-\frac{2\pi i^k}{\log R}\int_0^{\infty}\left\{\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid N}} S(m^2,p,c)\frac{2\log p}{\sqrt{p}}\right\}dJ_{k-1}\left(\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\log x}{\log R}\right)$$

On peut maintenant appliquer (44) :

$$Q_k^*(m,c)=-\frac{4\pi i^k}{\log R}\int_0^{\infty}\left\{2\frac{\mu(c)}{\varphi(c)}R(m^2;c)x^{1/2}+O(c(cx)^{\varepsilon})\right\}dJ_{k-1}\left(\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\log x}{\log R}\right) \tag{46}$$

On note $V_k^*(mc)$ le terme principal. par intégration par partie

$$V_k^*(m,c)=\frac{4i^k\pi}{\log R}\frac{2\mu(c)}{\varphi(c)}R(m^2;c)\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}J_{k-1}\left(\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\log x}{\log R}\right)dx$$

On effectue le changement de variable $y=\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}$ donc

$$V_k^*(m,c) = 2i^k \frac{\mu(c)cR(m^2;c)}{\varphi(c)m\log R}\int_0^\infty J_{k-1}(y)\hat{\phi}\left(2\frac{\log(cy/4\pi m)}{\log R}\right)dy \tag{47}$$

Regardons maintenant le terme d'erreur. Il est borné par

$$\int_0^\infty c(cx)^\varepsilon dJ_{k-1}\left(\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\log x}{\log R}\right)$$

Comme $\hat{\phi}$ est à support compact, on décompose dJ_{k-1} et on majore $\hat{\phi}$ par $\|\hat{\phi}\|_\infty$, ce terme est borné par

$$c(cP)^\varepsilon \int_0^P \left(\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}\left|J'_{k-1}\left(\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}\right)\right| + \left|J_{k-1}\left(\frac{4\pi m\sqrt{x}}{c}\right)\right|\right)\frac{dx}{x}$$

On pose $z = \frac{4\pi m\sqrt{P}}{c}$ donc le terme d'erreur est borné par

$$2c(cP)^\varepsilon \int_0^z (|J'_{k-1}(y)| + |J_{k-1}(y)|y^{-1})dy$$

De plus, nous avons les formules de récurrence $2J'_\nu(y) = J_{\nu-1}(y) - J_{\nu+1}(y)$ et $2\nu y^{-1}J_\nu(y) = J_{\nu-1}(y) + J_{\nu+1}(y)$ donc en prenant $\nu = k-1$ le terme d'erreur est borné par $c(cP)^\varepsilon\gamma_k(z)z$ avec

$$\gamma_k(z) = z^{-1}\int_0^z (|J_{k-2}(y)| + |J_{k-1}(y)| + J_k(y)|)dy \tag{48}$$

On cherche à borner $\gamma_k(z)$. Pour cela on regarde deux régimes :

- Si $3z \leqslant k$, alors on peut appliquer la majoration $J_{k-1}(x) \ll 2^{-k}x$ donc
$$\gamma_k(z) \ll 2^{-k}$$
- Si $3z > k$, nous utilisons la majoration $J_\nu(x) \ll x^{-1/4}\left(|x-\nu| + \nu^{1/3}\right)^{-1/4}$ on coupe l'intégrale en 3 régions :
  — Si $|y-k| + k^{1/3} \asymp k^{1/3}$, cela correspond à la région $y \asymp k$. La taille de cette région est $2k^{1/3}$ et $|J_k(y)| \ll k^{-1/4}k^{-1/12} = k^{-1/3}$ et
  $$z^{-1}\int_{|y-k|\leqslant k^{1/3}} |J_k(y)|dy \ll k^{-1}$$
  — Si $y > k + k^{1/3}$ alors $(|y-k| + k^{1/3}) \asymp y - k$ donc $|J_k(y)| \ll y^{-1/4}(y-k)^{-1/4}$. Donc
  $$\begin{aligned}\int_{k+k^{1/3}}^z y^{-1/4}(y-k)^{-1/4}dy &= \int_{k^{1/3}}^{z-k}(y+k)^{-1/4}y^{-1/4}dy \\ &\ll k^{-1/4}\int_{k^{1/3}}^{z-k} y^{-1/4}dy \\ &= \frac{4k^{-1/4}}{3}\left[(z-k)^{3/4} - k^{1/4}\right] \\ &\ll k^{1/2}\end{aligned}$$
  Or $z > 3k$ donc $z^{-1} \ll k^{-1}$ donc finalement
  $$z^{-1}\int_{y\geqslant k+k^{1/3}} |J_k(y)|dy \ll k^{-1/2}$$

— On effectue le même calcul si $y < k - k^{1/3}$
Donc

$$\gamma_k(z) \ll k^{-1/2},$$

Nous venons alors de montrer le lemme suivant :

Lemme 16. *Pour tout $k \geqslant 2$ et $z > 0$, nous avons $\gamma_k(z) \ll \tilde{\gamma}_k(z)$ avec*

$$\tilde{\gamma}_k(z) = \begin{cases} 2^{-k} & si\ 3z \leqslant k \\ k^{-1/2} & si\ 3z > k \end{cases}$$

En rassemblant ces résultats nous obtenons

$$Q_k^*(m,c) = V_k^*(m,c) + O(\tilde{\gamma}_k(z) m P^{1/2} (ckN)^{\varepsilon}) \tag{49}$$

Néanmoins, nous pouvons nous débarasser ici du terme principal car il est absorbé dans le terme d'erreur. En effet, comme $\hat{\phi}$ est à support dans $(-v, v)$, $y < z$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |J_{k-1}(y)||\hat{\phi}\left(2\frac{\log(cy/4\pi m)}{\log R}\right)|dy &\leqslant \int_0^{z} |J_{k-1}(y)|\|\hat{\phi}\|_{\infty} dy \\ &\ll z\gamma_k(z) \end{aligned}$$

donc, en rentrant $V_k^*(m,c)$ dans le terme d'erreur il reste

$$Q_k^*(m,c) \ll \tilde{\gamma}_k(z) m P^{1/2} (kN)^{\varepsilon} (\log 2c)^{-2} \tag{50}$$

En assumant comme dans le chapitre précédent que nous avons la condition $12\pi XYP^{1/2} \leqslant kN$ alors $3z \leqslant k$ et $\tilde{\gamma}_k(z) = 2^{-k}$ et en entrant la majoration de $Q_k^*(m,c)$ que nous venons d'affirmer dans la définition de $\mathscr{P}_k^*(\phi)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_k^*(\phi) &= \frac{k-1}{12} \sum_{\substack{LM=N \\ L\leqslant X}} \mu(L) M \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m\leqslant Y}} m^{-1} \sum_{c\equiv 0(M)} c^{-1} Q_k^*(m,c) + O\left(\frac{k\varphi(N)}{\log kN}\right) \\ &\ll k2^{-k} P^{1/2} \sum_{\substack{LM=N \\ L\leqslant X}} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m\leqslant Y}} \sum_{c} \frac{1}{c\log(2c)^2} (kN)^{\varepsilon} + \frac{k\varphi(N)}{\log kN} \\ &\ll k2^{-k} P^{1/2} (kN)^{\varepsilon} + \frac{k\varphi(N)}{\log kN} \\ &\ll \frac{k\varphi(N)}{\log kN} \end{aligned}$$

La dernière ligne est la conséquence directe de la condition $12\pi XYP^{1/2} \leqslant kN$. Nous prenons toujours $X = Y^{1/2} = (kN)^{\varepsilon}$. Cette condition donne une majoration pour le support. On rappelle le choix $P = R^{v'}$ avec $R = k^2N$:

$$\begin{aligned} P^{1/2} &\leqslant \frac{kN}{12\pi XY} \\ \frac{v'}{2}\log k^2N &\ll \log kN \\ v' &\leqslant 2\frac{\log kN}{\log k^2N} \end{aligned}$$

Nous avons donc amélioré le support de $\hat{\phi}$ ce qui nous donne le théorème suivant

Théorème 8 : *Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ une fonction de Schwartz paire dont la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ est à support compact dans $(-v, v)$ avec*

$$v = 2\frac{\log kN}{\log k^2 N}.$$

Alors, N parcourant les entiers sans facteur carré et k fixé pair :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|H_k^*(N)|} \sum_{f\in H_k^*(N)} D(f;\phi) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, W(O)(x)\, dx$$

où $W(O)(x) = 1 + \delta_0(x)$

Asymptotiquement nous obtenons un support dans $(-2, 2)$ en aspect niveau, ce qui est meilleur que dans le théorème précédant. Néanmoins nous obtenons, asymptotiquement, le même support en aspect poids (un support dans $(-1, 1)$). Ce phénomène n'est pas surprenant car nous n'avons pas exploité les poids pour le moment, les sommes de Kloosterman ne portant des informations que sur le niveau.

4.6 Des résultats sur les familles $H_k^{\pm}(N)$

Dans cette partie nous allons nous servir des résultats que nous avons déjà prouvé afin d'obtenir un théorème de densité pour les familles $H_k^{\pm}(N)$. Pour ces familles, nous ne voyons pas les comportement des groupes SO(even) et SO(odd) avec un support de $\hat{\phi}$ inclu dans $(-1, 1)$. [ILS00] montre comment faire pour obtenir un support dans $(-1, 1)$, pour cela il faut reproduire le travail effectué pour H_k^*. Nous allons montrer dans cette partie comme avoir un support plus grand.

De la même façon que pour $H_k^*(N)$ nous définissons

$$\mathscr{B}_k^{\pm}(\phi) = \sum_{f\in H_k^{\pm}(N)} D(f, \phi)$$

Rappelons l'équation fonctionnelle vue à la section 2.4.2

$$\Lambda(s, f) = \varepsilon_f \Lambda(1 - s, f)$$

Avec

$$\varepsilon_f = i^k \mu(N)\lambda_f(N)N^{1/2} = \pm 1.$$

On peut donc réécrire

$$2\mathscr{B}_k^{\pm} = \mathscr{B}_k^*(\phi) \pm \mathscr{B}_k^{\#}(\phi)$$

avec

$$\mathscr{B}_k^{\#}(\phi) = i^k \mu(N)\sqrt{N} \sum_{f\in H_k^*(N)} \lambda_f(N) D(f, \phi)$$

Comme $|\lambda_f(N)| = N^{-1/2}$ nous obtenons en utilisant (39)

$$\mathscr{B}_k^{\#}(\phi) = -\mathscr{P}_k^{\#}(\phi) + O\left(k\varphi(N)\frac{\log\log kN}{\log kN}\right)$$

avec

$$\mathscr{P}_k^{\#}(\phi) = i^k \mu(N)\sqrt{N} \sum_{f \in H_k^*(N)} \lambda_f(N) P(f,\phi)$$

Nous voulons maintenant évaluer $\mathscr{P}_k^{\#}(\phi)$. On utilise la définition de $\Delta_{k,N}^*$ donc

$$\mathscr{P}_k^{\#}(\phi) = i^k \mu(N)\sqrt{N} \sum_{p \nmid N} \Delta_{k,N}^*(pN) \hat{\phi}\Big(\frac{\log p}{\log R}\Big) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R} \tag{51}$$

On utilise (35) et de la même manière que pour $\mathscr{P}_k^*(\phi)$ il vient

$$\mathscr{P}_k^{\#}(\phi) = i^k \frac{k-1}{12}\sqrt{N} \sum_{\substack{LM=N \\ L \leqslant X}} \frac{\mu(M)M}{\nu(L)} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m \leqslant Y}} m^{-1} \sum_{c \equiv 0(M)} c^{-1} Q_k^{\#}(m,c) + O\left(\frac{k\varphi(N)}{\log kN}\right) \tag{52}$$

où

$$Q_k^{\#}(m,c) = 2\pi i^k \sum_{p \nmid N} S(m^2, pN, c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi m}{c}\sqrt{pN}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log R}\right) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R} \tag{53}$$

Afin de borner la fonction de Bessel nous souhaitons utiliser $J_{k-1}(x) \ll 2^{-k}x$ sous la condition $x \leqslant \frac{k}{3}$. Cela donne cette fois la condition

$$12\pi XYP^{1/2} \leqslant kN^{1/2} \tag{54}$$

Sans exploiter la somme sur les nombres premiers, [ILS00] montre, de la même façon que ce qui a été fait pour $H_k^*(N)$, que le support de $\hat{\phi}$ est inclus dans $(-1,1)$. Nous souhaitons ici avoir un support plus grand. Pour cela nous utilisons les mêmes méthodes que précédemment. Nous avions montré (45)

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \nmid N}} S(m^2, pN, c) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = 2\frac{\mu(M)}{\varphi(b)} R(m^2; b) R(L; b) x^{1/2} + O(b(bx)^{\varepsilon}) \tag{55}$$

où $LM = N$, $c = bM$ et le terme principal n'existe que si $(b, M) = 1$.

En appliquant les mêmes calculs que pour $Q_k^*(m,c)$ il vient

$$Q_k^{\#}(m,c) = V_k^{\#}(m,c) + O(\tilde{\gamma}_k(z) mLP^{1/2} N^{-1/2} (ckN)^{\varepsilon}) \tag{56}$$

avec

$$V_k^{\#}(m,c) = 2i^k \frac{c\mu(M)R(L;b)R(m^2;b)}{m\sqrt{N}\varphi(b)\log R} \int_0^{\infty} J_{k-1}(y) \hat{\phi}\left(\frac{2\log(cy/4\pi m\sqrt{N})}{\log R}\right) dy \tag{57}$$

$c = bM, LM = N$ et $z = \frac{4\pi m\sqrt{PN}}{c}$. On prend ici $\tilde{\gamma}_k(z) \ll k^{-1/2}$, qui est toujours valable.

On peut réécrire $\mathscr{P}_k^{\#}(\phi)$ en utilisant les formules au-dessus, rappelons que $c^{\varepsilon} \ll \log(2c)^{-2}$,

$$\mathscr{P}_k^{\#}(\phi) = \frac{k-1}{6} \sum_{\substack{LM=N \\ L \leqslant X}} \frac{M}{\nu(L)} \sum_{\substack{(m,M)=1 \\ m \leqslant Y}} m^{-2} \sum_{(b,M)=1} R(L;b) R(m^2;b) \varphi(b)^{-1} \tag{58}$$

$$\int_0^\infty J_{k-1}(y)\hat{\phi}\left(\frac{2\log(by\sqrt{N}/4\pi mL)}{\log R}\right)\frac{dy}{\log R} + O((kP)^{1/2}(kN)^{\varepsilon})$$

D'après [ILS00]

$$\int_0^\infty J_{k-1}(y)y^s dy = 2^s\Gamma\left(\frac{k+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-s}{2}\right)^{-1}$$

En se servant de cette formule on calcule maintenant l'intégrale dans (58) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_{k-1}(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)e^{-2i\pi x\left(2\log\left(\frac{by\sqrt{N}}{4\pi mL}\right)\right)/\log R}dx\right]dy\\
&=\int_0^\infty J_{k-1}(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\left(\frac{by\sqrt{N}}{4\pi mL}\right)^{-\frac{4i\pi x}{\log R}}dx\right]dy\\
&=\log(R)\int_0^\infty J_{k-1}(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x\log R)\left(\frac{by\sqrt{N}}{4\pi mL}\right)^{-4i\pi x}dx\,dy\\
&=\log(R)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x\log R)\left(\frac{4\pi mL}{b\sqrt{N}}\right)^{4i\pi x}\Gamma\left(\frac{k-4i\pi x}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{k+4i\pi x}{2}\right)dx\\
&=\log(R)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x\log R)\left(\frac{2\pi mL}{b\sqrt{N}}\right)^{4i\pi x}\Gamma\left(\frac{k}{2}-2i\pi x\right)\Big/\Gamma\left(\frac{k}{2}+2i\pi x\right)dx
\end{aligned}$$

Nous voulons alors estimer $\sum_{(b,M)=1}\int_0^\infty$ en utilisant cette nouvelle forme pour l'intégrale. Néanmoins, a cause du terme $\left(\frac{2\pi mL}{b\sqrt{N}}\right)^{4i\pi x}$ il y a un problème de convergence en 0 si l'on inverse somme et intégrale. On introduit alors un paramètre $\varepsilon > 0$ qui nous permet d'inverser somme et intégrale. On va alors s'interesser à

$$\sum_b\int_0^\infty = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x\log R)\chi(\varepsilon+4\pi ix)\left(\frac{2\pi mL}{\sqrt{N}}\right)^{4i\pi x}\Gamma\left(\frac{k}{2}-2i\pi x\right)\Big/\Gamma\left(\frac{k}{2}+2i\pi x\right)dx$$

où on note

$$\chi(s) = \sum_{(b,M)=1} R(L;b)R(m^2;b)\varphi(b)^{-1}b^{-s} \tag{59}$$

Remarquons ici une erreur dans l'article [ILS00]. D'après leurs estimations,

$$\chi(s) = \zeta(s+1)\zeta_M(s+1)^{-1}\prod_{p|mL}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{1}{(p-1)p^s}\right)^{-1}\prod_{p|(m,L)}(p^{1-s}-1)$$

où ζ_M désigne la fonction ζ tronquée. Ce résultat n'est pas satisfaisant car il n'est pas correct en prenant $M = L = 1$. Nous allons alors nous détacher des résultats proposés dans [ILS00] afin de les corriger. L'objectif est d'estimer

$$\chi_{L,m}(s) = \sum_{(b,M)=1} R(L,b)R(m^2,b)\varphi(b)^{-1}b^{-s}$$

On s'intéresse au pole $s = 0$ car c'est ce terme qui est responsable de la divergence de l'intégrale, ce terme va fournir une contribution dominante à la somme.

- On commence par regarder le cas $L = M = 1$. Dans ce cas $R(1; r) = \mu(r)$, alors

$$\begin{aligned}
\chi_{1,1}(s) = \chi(s) &= \sum_{(r,M)=1} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r) r^s} \\
&= \sum_{(p,M)=1} \mu\left(\prod_p p^{\alpha_p}\right)^2 \varphi\left(\prod_p p^{\alpha_p}\right)^{-1} \left(\prod_p p^{-\alpha_p s}\right) \\
&= \prod_{(p,M)=1} \sum_i \frac{\mu(p^i)^2}{\varphi(p^i) p^{is}} \\
&= \prod_{(p,M)=1} \left(1 + \frac{\mu(p)^2}{\varphi(p) p^s} + 0\right) \\
&= \prod_{(p,M)=1} \left(1 + \frac{1}{(p-1)p^s}\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)p^s}\right) \prod_{p|M} \left(1 + \frac{1}{(p-1)p^s}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{(p-1)p^s} &= \left(1 - p^{-(s+1)}\right)^{-1} \left(1 - \frac{p^{-s}}{p}\right) \left(1 + \frac{p^{-s}}{p-1}\right) \\
&= \left(1 - p^{-(s+1)}\right)^{-1} \left(1 + \frac{p^{-s} - p^{-2s}}{p(p-1)}\right)
\end{aligned}$$

Alors en entrant cette formule dans le produit au-dessus nous obtenons que

$$\chi(s) = \zeta(1+s)\alpha(s)\beta(s)$$

Avec

1. $\alpha(s) = \prod_p \left(1 + \frac{p^{-s} - p^{-2s}}{p(p-1)}\right)$
2. $\beta(s) = \prod_{p|M} \left(1 + \frac{1}{(p-1)p^s}\right)^{-1}$

Notons $\alpha(s) = \prod_p f_p(s)$.On a $f_p(0) = 1$ et $f_p'(0) = \frac{\log(p)}{p(p-1)}$. Alors $\frac{f_p'(0)}{f_p(0)} = \frac{\log(p)}{p(p-1)}$. Donc

$$\frac{\alpha'(0)}{\alpha(0)} = \sum_p \frac{\log(p)}{p(p-1)} = O(1).$$

Ce qui se réécrit

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \cdots = 1 + O(s)$$

De même

$$\frac{\beta'(0)}{\beta(0)} = \sum_{p|M} \frac{ln(p)}{p} = O(\log(\log((3M))$$

Comme $\beta(0) = \prod_{p|M} \left(1 + \frac{1}{\varphi(p)}\right)^{-1} = \prod_{p|M} \frac{\varphi(p)}{p} = \frac{\varphi(M)}{M}$ on obtient

$$\beta(s) = \frac{\varphi(M)}{M}(1 + O(s \log(\log(3M))))$$

En réunissant ces estimations

$$\chi(s) = \frac{\varphi(M)}{sM} + O\left(\frac{\varphi(M\log(\log((3M))}{M}\right)$$

- Regardons maintenant le cas général pour calculer $\chi(s)$. Dans ce cas

$$R(L;b) = \varphi(b)\mu\left(\frac{b}{(L,b)}\right)\varphi\left(\frac{b}{(L,b)}\right)^{-1}$$

et

$$R(m^2;b) = \varphi(b)\mu\left(\frac{b}{(m^2,b)}\right)\varphi\left(\frac{b}{(m^2,b)}\right)^{-1}$$

De la même manière que pour le cas précédent on utilise la décomposition en facteurs premiers de b.

$$\chi_{L,m}(s) = \sum_{(p,M)=1} \varphi\left(\prod_i p_i^{\alpha_i}\right)\mu\left(\frac{\prod_i p_i^{\alpha_i}}{(L,\prod_i p_i^{\alpha_i})}\right)\mu\left(\frac{\prod_i p_i^{\alpha_i}}{(m^2,\prod_i p_i^{\alpha_i})}\right)$$
$$\varphi\left(\frac{\prod_i p_i^{\alpha_i}}{(L,\prod_i p_i^{\alpha_i})}\right)^{-1}\varphi\left(\frac{\prod_i p_i^{\alpha_i}}{(m^2,\prod_i p_i^{\alpha_i})}\right)^{-1}\prod_i p_i^{-\alpha_i s}$$

On pose $L = \prod_i p_i^{\beta_i}$ et $m^2 = \prod_i p_i^{2\gamma_i}$. Donc $(L,\prod_i p_i^{\alpha_i}) = \prod_i p_i^{\min(\beta_i,\alpha_i)}$ et $(m^2,\prod_i p_i^{\alpha_i}) = \prod_i p_i^{\min(2\gamma_i,\alpha_i)}$

On définit $a_{1,i} = i - \min(\beta_{p_i}, i)$ et $a_{2,i} = i - \min(2\gamma_{p_i}, i)$. Alors :

$$\chi_{L,m}(s) = \prod_{(p,M)=1}\sum_i \mu\left(p^{a_{1,i}}\right)\mu\left(p^{a_{2,i}}\right)\varphi\left(p^{a_{1,i}}\right)^{-1}\varphi\left(p^{a_{2,i}}\right)^{-1}\frac{\varphi(p^i)}{p^{is}}$$

Nous cherchons maintenant à estimer la somme, différencions les cas :
— Si $p \nmid L$ et $p \nmid m$:

$$\sum = 1 + (-1)(-1)\frac{\varphi(p)}{\varphi(p)^2 p^s} = 1 + \frac{1}{(p-1)p^s}$$

— Si $p \nmid L$ et $p \mid m$ ou $p \mid L$ et $p \nmid m$:

$$\sum = 1 + \mu(p)\frac{\varphi(p)}{\varphi(p)p^s} = 1 - \frac{1}{p^s}$$

— Si $p \mid L$ et $p \mid m$:
On pose $val_p(L) = \alpha$ et $val_p(m^2) = \beta$
Alors

$$\frac{p^i}{(p^i,p^\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leqslant \alpha \\ p & \text{si } i = \alpha+1 \\ p^k & \text{avec } 2 \mid k \text{ si } i \geq \alpha+1 \end{cases} \tag{60}$$

On obtient un résultat similaire en remplaçant α par β. Alors :

$$\mu\left(\frac{p^i}{(p^i,p^\alpha)}\right)\mu\left(\frac{p^i}{(p^i,p^\beta)}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leqslant \min(\alpha,\beta) \\ -1 & \text{si } i = \min(\alpha,\beta)+1 \\ 0 & \text{si } i \geq \min(\alpha,\beta)+1 \end{cases} \tag{61}$$

On pose $a = \min(\alpha, \beta)$ et $\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 2 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$.

Alors :

$$\sum = 1 + \sum_{k=1}^{a} \frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}} + T_\delta$$

Avec

$$T_\delta = \begin{cases} \frac{-1}{p^{(s-1)(a+1)}} & \text{si } \delta = 1 \\ \frac{1}{(p-1)p^{(s-1)(a+1)}} & \text{si } \delta = 2 \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{a} \frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}} &= \sum_{k=1}^{a} \frac{p^k - p^{k-1}}{p^{ks}} \\ &= \sum_{k=1}^{a} \frac{p-1}{p} \frac{1}{p^{(s-1)k}} \\ &= \frac{p-1}{p} \frac{1-p^{a(1-s)}}{1-p^{1-s}} \end{aligned}$$

Donc finalement

$$\sum = 1 - \frac{p-1}{p} . \frac{1-p^{a(1-s)}}{1-p^{1-s}} + T_\delta$$

Maintenant que nous savons comment se comporte la somme nous pouvons revenir au calcul de $\chi_{L,m}$

$$\chi_{L,m}(s) = \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\nmid L \\ p\nmid m}} (1+\frac{1}{(p-1)p^s}) \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\nmid L \\ p\mid m}} (1-p^{-s}) \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid L \\ p\nmid m}} (1-p^{-s}) \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid L \\ p\mid m}} (1-\frac{p-1}{p} . \frac{1-p^{a(1-s)}}{1-p^{1-s}} + T_\delta)$$

De plus $\{p \text{ premier}\} = \{p \nmid L \text{ et } p \nmid m\} \cup \{p \mid L \text{ ou } p \mid m\} = \{p \nmid L \text{ et } p \nmid m\} \cup \{p \mid Lm\}$
Donc

$$\prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\nmid L \\ p\nmid m}} = \prod_{(p,M)=1} . (\prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid Lm}})^{-1}$$

De plus , soit les ensembles $A = \{p \mid L\}$ et $B = \{p \mid m\}$. Alors $\{p \mid L \text{ et } p \nmid m\} = A \setminus B$ et $\{p \nmid L \text{ et } p \mid m\} = B \setminus A$. Donc $A \setminus B \ \cup B \setminus A = A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Ainsi

$$\prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\nmid L \\ p\mid m}} (1-p^{-s}) \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid L \\ p\nmid m}} (1-p^{-s}) = \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid Lm}} (1-p^{-s}) \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid L \\ p\mid m}} (1-p^{-s})^{-1}$$

Récapitulons maintenant ce que nous avons pour $\chi_{L,m}$:

$$\chi_{L,m} = \prod_{(p,M)=1} (1+\frac{1}{(p-1)p^s}) \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid Lm}} (1-p^{-s})(1+\frac{1}{(p-1)p^s})^{-1} \prod_{\substack{(p,M)=1 \\ p\mid (L,m)}} (1-p^{-s})^{-1}(1-\frac{p-1}{p} . \frac{1-p^{a(1-s)}}{1-p^{1-s}} + T_\delta)$$

Il nous reste à étudier le comportement des deux derniers produits :

1.
$$\eta_{Lm}(s) = \prod_{\substack{(p,M)=1\\ p|Lm}} (1-p^{-s})(1+\frac{1}{(p-1)p^s})^{-1} = \prod f_p(s)$$

Avec

$$\begin{aligned} f_p(s) &= \frac{(p^s-1)(p-1)}{(p-1)p^s+1} \\ p^s-1 &= s.\log(p)+O(s^2) \\ p^s(p-1)+1 &= p+O(1) \end{aligned}$$

Donc

$$f_p(s) = s\frac{\log(p)}{p}(p-1)+O(s^2)$$

Si le produit est vide alors $mL=1$ et $\eta_{Lm}=\delta(mL,1)$
Sinon soit $\Omega_1 = \#\{p \mid mL,(p,M)=1\}$. Comme $\frac{p-1}{p}<1$ et $p \leqslant mL$:

$$\eta_{Lm} = O\left(s^{\Omega_1}\log(mL)^{\Omega_1}\right)$$

Donc

$$\eta_{Lm} = \delta(mL,1)+O\left(s^{\Omega_1}\log(mL)^{\Omega_1}\right)$$

2.
$$\theta_{(L,m)}(s) = \prod_{\substack{(p,M)=1\\ p|(L,m)}} (1-p^{-s})^{-1}(1-\frac{p-1}{p}.\frac{1-p^{a(1-s)}}{1-p^{1-s}}+T_\delta)$$

Prenons $\delta=1$.

$$\begin{aligned} (1-\frac{1}{p^s})^{-1} &= \frac{p^s}{p^s-1} = \frac{1}{s\log(p)p^s}+O(s^{-2}) \\ F_p(s) &= 1-\frac{p-1}{p}.\frac{1-p^{a(1-s)}}{1-p^{1-s}} \\ F_p(0) &= 1-\frac{p-1}{p}.\frac{1-p^a}{1-p} \\ &= 1+\frac{1-p^a}{p} \\ F_p'(s) &= \frac{p-1}{p}.\left[-\frac{a\log(p)p^{a(1-s)}(1-p^{1-s})+(1-p^{a(1-s)})\log(p)p^{1-s}}{(1-p^{1-s})^2}\right] \\ F_p'(0) &= \frac{\log(p)}{p}.\frac{p^{a+1}(a-1)-ap^a+p}{p-1} \\ F_p(s) &= 1+\frac{1-p^a}{p}+F_p'(0).s+O(s^2) \end{aligned}$$

On pose $G_p(s) = F_p(s)(1-p^{-s})^{-1} = \frac{F_p(0)}{s\log(p)} + \frac{F_p'(0)}{\log(p)} + O(s)$

Alors en posant $\theta_{(L,m)} = \prod H_p(s)$ on obtient

$$\begin{aligned} H_p(s) &= \frac{F_p(0)}{s\log(p)} + \frac{F_p'(0)}{\log(p)} - p^{a+1} + O(s) \\ &= \frac{F_p(0)}{s\log(p)}(1 + O(s\log(p))) \end{aligned}$$

De plus $(L,m) \leqslant Lm$ et on pose $\Omega_2 = \#\{p \mid (L,m),(p,M)=1\} \leqslant \Omega_1$

$$\theta_{(L,m)}(s) = \delta((L,m),1)(1 + O\left(s^{-\Omega_2}\log(mL)^{-\Omega_2}\right)$$

On obtient de même en prenant $\delta = 2$

Alors

$$\eta_{Lm}(s)\theta_{(L,m)}(s) = \delta(mL,1)(1 + O(s\log(mL)))$$

Finalement

$$\chi(s) = \frac{\varphi(M)}{sM}\delta(mL,1) + O\left(\frac{\varphi(M)}{M}\log(mL\log(3M))\right)$$

Comme $\delta(mL,1)$ implique $L=1$ donc $M=N$ nous pouvons réécrire

$$\chi(s) = \frac{\varphi(N)}{sN}\delta(mL,1) + O\left(\frac{\varphi(M)}{M}\log(mL\log(3M))\right) \tag{62}$$

De plus, la fonction Γ vérifie la formule

$$\Gamma\left(\frac{k+s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{k-s}{2}\right)\left(\frac{k}{2}\right)^s\left\{1 + O\left(\frac{|s|}{k}\right)\right\}.$$

On peut alors estimer

$$\begin{aligned} \sum_b \int_0^\infty &= \delta(mL,1)\frac{\varphi(N)}{N}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x\log R)\left(\frac{k\sqrt{N}}{4\pi}\right)^{4\pi i x}\frac{dx}{\varepsilon - 4\pi i x} \\ &+ O\left(\frac{\varphi(M)}{M}\frac{\log(mL\log 3N)}{\log R}\right) \end{aligned}$$

On pose $A = \frac{k^2 N}{16\pi^2}$ et on s'intéresse à la dernière intégrale dans la formule au-dessus. On remarque que $(A)^{2i\pi x} = e^{2i\pi x\log A}$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x\log R)\big[\cos(2\pi x\log A) + i\sin(2\pi x\log A)\big]\frac{dx}{\varepsilon - 4\pi i x}$$

On regarde dans un premier temps l'intégrale portant le cosinus et on commence par effectué le changement de variable $x \to \varepsilon$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x\log R)\cos(2\pi x\log A)\frac{dx}{\varepsilon - 4\pi i x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\varepsilon x\log R)\cos(2\pi\varepsilon x\log A)\frac{1+4i\pi x}{1+(4\pi x)^2}dx$$

Or la fonction $x \mapsto \phi(\varepsilon x \log R)\cos(2\pi\varepsilon x \log A)4\pi x$ est impaire (car ϕ est paire) donc l'intégrale est nulle, il nous reste alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x\log R)\cos(2\pi x\log A)\frac{dx}{\varepsilon - 4\pi i x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\varepsilon x\log R)\cos(2\pi\varepsilon x\log A)\frac{1}{1+(4\pi x)^2}dx$$

Pour l'intégrale portant le sinus on passe le i au dénominateur, finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x\log R)\sin(2\pi x\log A)\frac{dx}{4\pi x + i\varepsilon} + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\varepsilon x\log R)\cos(2\pi\varepsilon x\log A)\frac{1}{1+(4\pi x)^2}dx$$

On effectue le changement de variable $x \to \frac{x}{\log R}$prend la limite $\varepsilon \to 0$ ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\log R}\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\sin\big(2\pi x\frac{\log A}{\log R}\big)\frac{dx}{4\pi x} + \frac{1}{4}\phi(0)\Big)$$

On rappelle le choix $R = k^2N$ ce qui nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\log R}\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}dx + \frac{1}{2}\phi(0)\Big) + O\Big(\frac{1}{\log R}\Big)$$

En appliquant cette formule dans (58) nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_k^{\#}(\phi) &= -\frac{k-1}{12}\varphi(N)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}dx - \frac{1}{2}\phi(0)\Big)\\ &+ O\left(k\varphi(N)\frac{\log\log kN}{\log kN} + (kP)^{1/2}(kN)^{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

Afin d'avoir la même contribution pour les deux termes présents dans le O, il faut

$$\begin{aligned}(kP)^{1/2}(kN)^{\varepsilon} &\ll k\varphi(N)\frac{\log\log kN}{\log kN}\\ P &\ll kN^2(kN)^{-3\varepsilon}\end{aligned}$$

Comme $P = R^{v'}$ avec $v' < v$ cette condition est satisfaite pour

$$v = \frac{\log kN^2}{\log k^2N} \tag{63}$$

Alors, pour ce choix de support pour $\hat{\phi}$ nous avons

$$\mathscr{B}_k^{\#}(\phi) = \frac{k-1}{12}\varphi(N)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}dx - \frac{1}{2}\phi(0)\Big) + O\left(k\varphi(N)\frac{\log\log kN}{\log kN}\right) \tag{64}$$

Rappelons que

$$\mathscr{B}_k^{\pm}(\phi) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{B}_k^{*}(\phi) \pm \mathscr{B}_k^{\#}(\phi)\Big) \tag{65}$$

Notons que le support choisi est plus restrictif que celui choisi pour que $\mathscr{P}_k^*(\phi)$ n'ait pas de contribution dans $\mathscr{B}_k^*(\phi)$. Alors, comme

$$\mathscr{B}_k^*(\phi) = \frac{k-1}{12}\varphi(N)E(\phi) + O\left(k\varphi(N)\frac{\log\log kN}{\log kN}\right)$$

On rentre la formule (64) dans (65), nous avons finalement

$$\mathscr{B}_k^{\pm}(\phi) = \frac{k-1}{24}\varphi(N)\left\{\hat{\phi}(0) + \frac{1\pm 1}{2}\phi(0) \pm \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}dx\right\} + O\left(k\varphi(N)\frac{\log\log kN}{\log kN}\right) \quad (66)$$

ce qui se résume par le théorème suivant :

Théorème 9 : *Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ une fonction de Schwartz paire dont la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ est à support compact dans $(-v, v)$ avec*

$$v = \frac{\log kN^2}{\log k^2 N}.$$

Alors, N parcourant les entiers sans facteur carré et k fixé pair :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|H_k^+(N)|}\sum_{f\in H_k^+(N)} D(f;\phi) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{W}(\mathrm{SO(even)}(x)\,dx$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|H_k^-(N)|}\sum_{f\in H_k^-(N)} D(f;\phi) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{W}(\mathrm{SO(odd)}(x)(x)\,dx$$

où $\mathrm{W}(\mathrm{SO(even)}(x) = 1 + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$ *et* $\mathrm{W}(\mathrm{SO(odd)}(x) = 1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} + \delta_0(x)$

Asymptotiquement nous obtenons un support dans $(-2, 2)$ en aspect niveau. On remarque principalement que ce support dépasse $(-1, 1)$ ce qui était fondamental pour différencier les distributions de $\mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}$ et O comme expliqué dans la section 4.1.

4.7 Exploiter les poids

Jusqu'ici nous avons considéré uniquement l'aspect niveau laissant l'aspect poids intouché. Cela vient du fait que les sommes de Kloosterman ne laissent apparaître que l'aspect niveau. En exploitant les sommes sur les premiers et en utilisant des bornes connues sur la fonction de Bessel nous avons pu améliorer le support de $\hat{\phi}$. Néanmoins nous pouvons traiter la fonction de Bessel $J_{k-1}(4\pi\sqrt{mn}/c)$ de façon analogue à $S(m, n, c)$ en introduisant une sommation sur les poids pairs. Nous allons voir dans cette partie comment cette méthode permet d'élargir le support de $\hat{\phi}$ vers $(-2, 2)$.

Dans [Iwa97] il est montré la proposition suivante qui nous sera utile pour traiter de la somme sur les poids de la fonction de Bessel.

Propriété 32 : *Soit $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ une fonction à valeurs réelles et $K \geqslant 1$. Pour $a = 0, 2$ et $x > 0$, on a*

$$4\sum_{k\equiv a(4)} h\left(\frac{k-1}{K}\right) J_{k-1}(x) = h_K(x) - i^a g_K(x), \quad (67)$$

où

$$\begin{aligned} h_K(x) &= h\left(\frac{x}{K}\right) + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{K^3}\Big) \\ &= h\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{x}{6K^3}\, h'''\left(\frac{x}{K}\right) + \mathrm{O}\Big(\frac{x^2}{K^6}\Big), \\ g_K(x) &= \frac{K}{\sqrt{x}}\mathrm{Im}\left(e^{ix-\pi i/4}\hat{h}\left(\frac{K^2}{2x}\right)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{K^4}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\hat{h}(v) = \int_0^\infty \frac{h(\sqrt{u})}{\sqrt{2\pi u}} e^{ivu} du, \tag{68}$$

les constantes implicites ne dépendant que de h.

Corollaire 5. *Sous les mêmes conditions que la proposition précédente nous avons*

$$2\sum_{k\equiv 0(2)} h\Big(\frac{k-1}{K}\Big)\,\mathrm{J}_{k-1}(x) = h\Big(\frac{x}{K}\Big) + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{K^3}\Big)$$

$$2\sum_{k\equiv 0(2)} i^k\, h\Big(\frac{k-1}{K}\Big)\,\mathrm{J}_{k-1}(x) = -\frac{K}{\sqrt{x}}\mathrm{Im}\left(\zeta_8\, e^{ix}\hat{h}\Big(\frac{K^2}{2x}\Big)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{K^4}\right),$$

où $\zeta_8 = e^{2\pi i/8}$.

Commençons par remarquer que le terme oscillant domine si $x \gg K^2$, il faut donc s'assurer que $x \ll K^2$ Soit $K \geqslant 3$ et N sans facteur premier. On définit

$$\mathscr{A}^\sigma(K,N) = \sum_{k\equiv 0(2)} \frac{24}{k-1} h\Big(\frac{k-1}{K}\Big) \sum_{f\in H_k^\sigma(N)} D(f,\phi) \tag{69}$$

avec $\sigma = *, +, -$. La somme à l'intérieur de $\mathscr{A}^\sigma$ est la moyenne considérée dans les dernières parties donc nous pouvons réécrire

$$\mathscr{A}^\sigma(K,N) = \sum_{k\equiv 0(2)} \frac{24}{k-1} h\Big(\frac{k-1}{K}\Big) \mathscr{B}_k^\sigma(\phi) \tag{70}$$

Afin de normaliser $\mathscr{A}^\sigma$ on introduit

$$A^\sigma(K,N) = \sum_{k\equiv 0(2)} \frac{24}{k-1} h\Big(\frac{k-1}{K}\Big) |H_k^\sigma(N)| \tag{71}$$

Nous allons regarder ici le cas $\sigma = *$. Nous pouvons traiter de la même façon $\sigma = \pm$.

Lemme 17. *Sous les mêmes conditions que précédemment*

$$A^*(K,N) = \hat{h}(0) K\varphi(N) + O((KN)^{2/3}). \tag{72}$$

Démonstration. D'après le théorème 6, nous avons

$$|H_k^*(N)| = \frac{k-1}{12} + O((Nk)^{2/3})$$

Alors

$$A^*(K,N) = \sum_{k\equiv 0(2)} 2h\Big(\frac{k-1}{K}\Big) + O(\sum_{k\equiv 0(2)} k^{-1/3} h\Big(\frac{k-1}{K}\Big) N^{2/3})$$

Pour le terme d'erreur, comme h est à support compact $k \ll K$ donc on majore grossièrement h par son maximum et k par K, donc on obtient $O((NK)^{2/3})$. Regardons maintenant le terme principal , on pose $g(k) = 2h(\frac{k-1}{K})$ et on applique la formule de sommation de Poisson

$$\sum_{k\equiv 0(2)} 2h\Big(\frac{k-1}{K}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2h\Big(\frac{2k-1}{K}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n)$$

où $\hat{g}(n)$ désigne la transformée de Fourier de g. Or, par changement de variable $\frac{2t-1}{K} \to u$,

$$\hat{g}(n) = (-1)^n K \hat{h}\Big(\frac{nK}{2}\Big)$$

Comme $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\forall n > 1$, $\hat{h}\Big(\frac{nK}{2}\Big) \ll \Big(1 + |\frac{nK}{2}|\Big)^{-\alpha}$ $\forall \alpha$. Donc

$$A^*(K,N) = \hat{h}(0) + O((NK)^{2/3})$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous allons maintenant reprendre les résultats des parties précédentes en ajoutant une somme sur les poids. Ainsi $i^k J_{k-1}(x)$ est remplacé par $I(x)$ avec

$$I(x) = \sum_{k\equiv 0(2)} 2i^k h\Big(\frac{k-1}{K}\Big) J_{k-1}(x) \tag{73}$$

avec $x = 4\pi m\sqrt{p}/c$. Les méthodes des chapitres précédents peuvent être étendus en moyennant sur k, nous reprendrons alors les formules obtenues pour $Q_k^*(\phi)$. Nous supposons la condition

$$P^{1/2} \ll K^2 N (KN)^{-4\varepsilon} \tag{74}$$

alors $x \ll K^{2-\varepsilon}$ donc en appliquant le corollaire 5 cela revient à

$$I(x) \ll xK^{-4} \tag{75}$$

De plus, $2J'_{k-1}(x) = J_{k-2}(x) - J_k(x)$ donc en appliquant le corollaire 5

$$\begin{aligned} 4I'(x) &= \sum_{k\equiv 0(2)} 4i^k h(\frac{k-1}{K})[J_{k-2}(x) - J_k(x)] \\ &= h(\frac{x+1}{K}) - h(\frac{x-1}{K}) + O\Big(\frac{x}{K^4}\Big) \\ &= \frac{2}{k} h'(\frac{x}{K}) + O\Big(\frac{x}{K^4}\Big) \end{aligned}$$

en utilisant un développement en série de Taylor. Ainsi

$$I'(x) \ll K^{-1} \tag{76}$$

On reprend alors la formule de $Q_k^*(m,c)$ obtenue précédemment à laquelle on remplace $i^k J_{k-1}(x)$ par $I(x)$. En moyennant sur les poids on note $Q^*(m,c)$ l'objet correspondant. Donc

$$Q^*(m,c) = 2\frac{\mu(c)cR(m^2;c)}{\varphi(c)m\log R}\int_0^\infty I(y)\hat{\phi}\left(2\frac{\log(cy/4\pi m)}{\log R}\right)dy + O\left(c(cP)^\varepsilon\int_0^z(|I'(y)|+|I(y)|y^{-1})dy\right)$$

avec $z = 4\pi m\sqrt{P}/c$. En utilisant les bornes trouvées sur $I(y)$ et $I'(y)$, le terme principal est absorbé dans le terme d'erreur et on en déduit

$$Q^*(m,c) \ll K^{-1}mP^{1/2}(KN)^\varepsilon(\log 2c)^{-2} \tag{77}$$

On entre alors cette nouvelle majoration dans $\mathscr{P}^*(\phi)$ (notons que dans $\mathscr{A}^*(K,N)$ il y a une normalisation par $\frac{24}{k-1}$ qui se répercute dans $\mathscr{P}^*(\phi)$),

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}^*(\phi) &\ll \sum_{\substack{LM=N\\L\leqslant X}}\mu(L)M\sum_{\substack{(m,M)=1\\m\leqslant Y}}m^{-1}\sum_{c\equiv 0(M)}c^{-1}Q_k^*(m,c)+\frac{k\varphi(N)}{\log kN}\\
&\ll K^{-1}\sum_{\substack{LM=N\\L\leqslant X}}M\sum_{\substack{(m,M)=1\\m\leqslant Y}}\sum_{c\equiv 0(M)}c^{-1}(\log 2c)^{-2}P^{1/2}(KN)^\varepsilon+\frac{k\varphi(N)}{\log kN}\\
&\ll K^{-1}P^{1/2}(KN)^{3\varepsilon}+\frac{KN}{\log KN}\\
&\ll K^{-1}P^{1/2}(KN)^{3\varepsilon}+\frac{KN}{(KN)^\varepsilon}
\end{aligned}$$

Comme $P^{1/2} \ll K^2N(KN)^{-4\varepsilon}$,

$$\mathscr{P}^*(\phi) \ll K\varphi(N)/\log KN. \tag{78}$$

Cette estimation montre que $\mathscr{P}^*$ ne contribue pas au terme principal dans $\mathscr{A}^*(K,N)$. Alors, sous la même condition pour P,

$$\mathscr{A}^*(K,N) = \hat{h}(0)K\varphi(N)\left\{\hat{\phi}(0)+\frac{1}{2}\phi(0)\right\}+O\left(K\varphi(N)\frac{\log\log KN}{\log KN}\right) \tag{79}$$

La condition sur P implique la relation sur le support de $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
P^{1/2} &\ll K^2N(KN)^{-4\varepsilon}\\
\frac{v'}{2}\log R &\ll \log K^2N\\
v' &\leqslant 2
\end{aligned}$$

Alors le support de v est inclu dans $(-2,2)$. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 10 : *Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ une fonction de Schwartz paire dont la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ est à support compact dans $(-2,2)$. Alors, pour N parcourant les entiers sans facteur carré :*

$$\frac{\mathscr{A}^*(K,N)}{A^*(K,N)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{W(O)}(x)dx+O\left(\frac{\log\log KN}{\log KN}\right)$$

où $\mathrm{W(O)}(x) = 1+\delta_0(x)$

Afin d'obtenir ce théorème nous avons utilisé les résultats exploitant les sommes sur les premiers et la somme de Kloosterman. Nous pouvons nous demander si un tel travail sur les poids permet d'éviter cette discussion. Nous allons voir ici que nous pouvons améliorer le support en travaillant uniquement sur les poids mais que le résultat obtenu est moins bon que celui apporté par le théorème précédent. Nous obtenons en effet un support inclus dans $(-3/2, 3/2)$.
Nous utilisons alors les mêmes formules que précédemment dans ce chapitre mais nous n'utilisons pas les résultats permettant de raffiner $Q^*(m,c)$:

$$Q^*(m,c) = 2\pi i^k \sum_{p\nmid N} S(m^2,p,c) I(x) \hat{\phi}\big(\frac{\log p}{\log R}\big) \frac{2\log p}{\sqrt{p}\log R}$$

Or, nous avons vu $I(x) \ll K^{-4}x$ avec $x = 4\pi m\sqrt{p}/c$ donc

$$\begin{aligned} Q^*(m,c) &\ll \sum_{p\leqslant P} K^{-4}\sqrt{c}\,\tau(c)\frac{4\pi m\sqrt{p}}{c}\frac{\log p}{\sqrt{p}\log R} \\ &\ll K^{-4}mPc^{\varepsilon-1/2} \end{aligned}$$

On utilise cette estimation pour obtenir l'estimation dans $\mathscr{P}^*(\phi)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathscr{P}^*(\phi) &\ll \sum_{\substack{LM=N\\ L\leqslant X}} \mu(L) M \sum_{\substack{(m,M)=1\\ m\leqslant Y}} m^{-1} \sum_{c\equiv 0(M)} c^{-1} Q_k^*(m,c) + \frac{k\varphi(N)}{\log kN} \\ &\ll K^{-4}P \sum_{\substack{LM=N\\ L\leqslant X}} M^{1/2-\varepsilon}(KN)^{\varepsilon} + KN(KN)^{-\varepsilon} \\ &\ll K^{-4}PN^{1/2-\varepsilon}(KN)^{2\varepsilon} + KN(KN)^{-\varepsilon} \end{aligned}$$

Afin de ne pas avoir de contribution supplémentaire à $\mathscr{A}^*(K,N)$ nous voulons absorber le premier terme dans le second. Cela est possible si

$$P \ll N^{3/2}K^3(KN)^{3\varepsilon} \tag{80}$$

Comme $P = R^{v'}$ avec $v' < v$ la condition sur P se réécrit en condition sur v :

$$v < 3/2 \tag{81}$$

Nous obtenons alors le théorème suivant, il est plus faible que celui obtenu précédemment (théorème 10) mais est meilleur que le théorème 7 :

Théorème 11 : *Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ une fonction de Schwartz paire dont la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ est à support compact dans $(-3/2, 3/2)$. Alors, pour N parcourant les entiers sans facteur carré :*

$$\frac{\mathscr{A}^*(K,N)}{A^*(K,N)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{W(O)}(x)dx + O\Big(\frac{\log\log KN}{\log KN}\Big)$$

où $\mathrm{W(O)}(x) = 1 + \delta_0(x)$

Remarque.
Cette technique de sommation sur les poids permet d'améliorer des résultats dans des cadres plus compliqués. L'exploitation des sommes de Kloosterman faites pour améliorer le support dans les sections 4.5 et 4.6 peuvent être plus difficilement généralisable alors qu'exploiter les poids comme

il est proposé dans ce nouveau théorème est accessible pour d'autres cadres et notamment pour les formes modulaires de Hilbert. Faire un travail similaire permettrait de prolonger l'article [HW24] en sommant des poids non parallèles, et l'on pourrait également imaginer sommer sur des poids parallèles.

Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'étude des zéros non triviaux de fonctions L à proximité du point central $s = 1/2$. Ce travail est motivé par les résultats montrés par Katz et Sarnak qui font le pont entre la théorie des matrices aléatoires et la théorie analytique des nombres. En exploitant les propriétés arithmétiques et spectrales des formes modulaires nous avons analysé le comportement statistique des petits zéros pour les familles $H_k^*(N), H_k^+(N)$ et $H_k^-(N)$.
La première partie de ce mémoire a posé les outils fondamentaux nécessaires à cette étude. Grâce à une bonne compréhension de l'espace des formes cuspidales et par l'étude des séries de Poincaré nous avons obtenu la formule des traces de Petersson qui permet de transformer un problème originaire de l'analyse complexe (l'étude des zéros d'une fonction) en un problème arithmétique. Sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée (GRH) nous avons suivi les travaux d'Iwaniec Luo et Sarnak qui confirment les conjectures de densité émises par Katz et Sarnak, mettant en évidence les symétries des familles $H_k^*(N), H_k^+(N)$ et $H_k^-(N)$. Ces résultats offrent une meilleure compréhension de la distribution des zéros pour ces familles.

Néanmoins, même si ces résultats ont été une avancée majeure pour mieux comprendre les zéros des fonctions L, ils se heurtent à différentes barrières quand nous voulons augmenter leur portée. La taille du support de la transformée de Fourier de la fonction de test nécessite des une meilleure compréhension de la formule des traces de Petersson et notamment des sommes de Kloosterman. Trouver de meilleures bornes à ces objets restent un défi qui motive de nombreuses études.

Au delà de ces questions d'amélioration des résultats, d'autres questions encore ouvertes aujourd'hui sont adjacentes à cette étude, nous pouvons par exemple citer les travaux de K.Soundararajan qui cherche à s'affranchir de GRH, ou encore l'extension de ce cadre modulaire aux formes modulaires de Hilbert [HW24]. Il est légitime de penser pouvoir généraliser les méthodes effectuées dans ce mémoire dans d'autres cadres géométriques (les formes modulaires de Hilbert et les formes modulaires de Bianchi notamment). Ce nouveau contexte est source de nombreuses questions pour la plupart encore ouvertes et forme un domaine de recherche très actif dans la théorie analytique des nombres avec notamment des questions fines qui apparaissent en regardant en détail les transitions autour du support 1, connues sous le nom de murmures.

Références

[ILS00] H. Iwaniec, W. Luo et P. Sarnak, *Low-lying zeros of families of L-functions*, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S., 91 (2000), 55–131.

[KS1] N. Katz et P. Sarnak, *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues and Monodromy*, AMS Colloq. Publ. 45 (1999).

[KS2] N. Katz et P. Sarnak, *Zeros of zeta functions and symmetry*, Bull. AMS 36 (1999), 1–26.

[IK04] H. Iwaniec et E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society, 2004.

[Iwa97] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, American Mathematical Society, 1997.

[Iwa02] H. Iwaniec, *Spectral Methods of Automorphic Forms*, 2nd ed., American Mathematical Society, 2002.

[Ser73] J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer-Verlag, 1973.

[Apo76] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976.

[Wat66] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1966.

[AL70] A. O. L. Atkin et J. Lehner, *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Mathematische Annalen, 185 (1970), 134–160.

[Gil20] N. Gillman, *The trace formula of Petersson*, Expository note, `https://nategillman.com/expository/petersson.pdf`, 2020.

[Xi23] P. Xi, *An elementary proof of the Selberg identity for Kloosterman sums*, arXiv :2306.16929, 2023.

[CK62] K.Chandrasekharan et Raghavan Narasimhan, *Functional Equations With Multiple Gamma Factors and the Average Order of Arithmetical Functions.*
Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 76, No 1 (Jul., 1962), pp. 93-136.

[HW24] A. Hamieh et P.-J. Wong, *Low-lying zeros of L-functions of adelic Hilbert modular forms and their convolutions*, arXiv :2412.03034, 2024.