Mélanges en Théorie Ergodique

Notations. Si $f : E \longrightarrow F$ et $B \subset F$, on notera

$$f^{-1}(B) \overset{\text{déf.}}{=} \{f \in B\} = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Les deux références pour cet exposé sont [EW10] (la référence de tous les exposés) et le classique [Pet83] qui évoque beaucoup d'extensions et de variations autour des théorèmes ergodiques, de la notion de récurrence et d'entropie.

I Mélange fort

I.1 Mélange fort et ergodicité

Dans les épisodes précédents, nous avons montré que si $T : X \longrightarrow X$ est une application mesurable sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une mesure T-invariante, alors μ est ergodique si et seulement elle vérifie le théorème ergodique L^2 c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\mu)$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \xrightarrow[N \to \infty]{L^2(\mu)} \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Cela est équivalent, par critère d'orthogonalité dans L^2 au fait que pour tout $f, g \in L^2(\mu)$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_X g(x) \; f(T^n x) \, \mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} \int_X f \, \mathrm{d}\mu \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Par densité des fonctions en escalier dans L^2, il suit qu'on peut encore réduire l'ergodicité aux fonctions indicatrices de boréliens. Plus précisément, μ est T-ergodique si et seulement si pour tout $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A \cap \{T^n \in B\}) \xrightarrow[N \to \infty]{} \mu(A)\mu(B).$$

On peut interpréter cette convergence comme une convergence à la Césàro. La notion de mélange introduit deux convergences qui impliquent cette convergence, donc l'ergodicité.

Définition I.1

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, $T : X \longrightarrow X$ une application $\mathcal{A}$-mesurable de sorte que μ soit T-invariante. On dit que μ est T-*mélangeante* ou T-*fortement mélangeante* si

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \mu(A \cap \{T^n \in B\}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(A)\mu(B). \tag{1}$$

Une manière équivalente de l'écrire est

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, |\mu(A \cap \{T^n \in B\}) - \mu(A)\mu(T^n \in B)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Ainsi, si μ est une mesure de probabilité, on interprète le mélange comme la notion d'*indépendance asymptotique.*

Remarque I.2. Si on exige une condition plus forte, disons une indépendance *stationnaire*, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, il existe un rang $N \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \mu(A \cap \{T^n \in B\}) = \mu(A)\mu(B),$$

alors la dynamique est en fait triviale, c'est-à-dire que $\mu(A) \in \{0,1\}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. En effet, en prenant $B = X \backslash A$ dans la condition précédent, on aboutit à l'existence de $N_A \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant N_A, \mu(A)(1-\mu(A)) = \mu(A \cap \{T^n \notin A\}).$$

Or, le théorème de récurrence de Poincaré stipule l'existence d'un entier $n = N'_A$ plus grand que N_A pour lequel $\mu(A \Delta \{T^n \in A\}) = 0$ (l'infinie récurrence permet de choisir N'_A aussi grand qu'on le souhaite). Or, on dispose de l'inclusion $A \cap \{T^n \notin A\} \subset A \Delta \{T^n \in A\}$ si bien que finalement, $\mu(A)(1-\mu(A)) = 0$. Ainsi, la dynamique est en effet triviale dans ce cas. ♣

Remarque I.3. Si on exige une condition plus forte que le mélange, mais moins que l'indépendance stationnaire, disons une indépendance asymptotique uniforme, c'est-à-dire

$$\sup_{A,B \in \mathcal{A}} |\mu(A \cap \{T^n \in B\}) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

alors la conclusion est la même que précédemment : la dynamique est triviale. ♣

I.2 Quelques rares caractérisations

On dispose d'une version fonctionnelle de la définition.

Proposition I.4

Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesuré, $T : X \longrightarrow X$ une application $\mathcal{A}$-mesurable pour laquelle il existe une mesure μ invariante par T. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La mesure μ est fortement mélangeante ;

(ii) Pour tous $f, g \in L^2(\mu)$,

$$\int_X g(x) f(T^n x) \, \mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \, \mathrm{d}\mu \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Si la tribu est engendrée par une *semi-algèbre*, on peut se contenter de montrer la convergence pour les éléments de la semi-algèbre.

Proposition I.5

Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, $T : X \longrightarrow X$ une application $\mathcal{A}$-mesurable et μ une probabilité T-invariante. On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est une *semi-algèbre* :

— $\varnothing \in \mathcal{S}$;

— Pour tout $A \in \mathcal{S}$, $X \backslash A$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{S}$;

— Pour tous $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{S}$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{S}$.

Dans ce cas, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La mesure μ est T-mélangeante ;

(ii) Pour tous $A, B \in \mathcal{S}$,

$$\mu(A \cap \{T^n \in B\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)\mu(B).$$

On peut montrer que la condition de la définition peut être affaiblie, c'est l'objet du Théorème suivant.

Théorème I.6 : Rényi, 1958

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, $T : X \longrightarrow X$ $\mathcal{A}$-mesurable de sorte que μ soit T-invariante. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La mesure μ est mélangeante ;

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A \cap \{T^n \in A\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)^2.$$

Démonstration : Il suffit de montrer la réciproque. Supposons **(ii)**. Montrons que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $\mu(A \cap \{T^n \in B\})$ tend vers $\mu(A)\mu(B)$ quand n tend vers ∞. Pour cela, on considère la décomposition suivante

$$L^2_{\mathbb{C}}(\mu) = \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1, \{\mathbf{1}_B \circ T^n, n \in \mathbb{N}\})} \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1, \{\mathbf{1}_B \circ T^n, n \in \mathbb{N}\})^{\perp} := \overline{M} \oplus M^{\perp}.$$

Pour tout $f \in M^{\perp}$, et $n \geqslant 0$

$$\langle \mathbf{1}_B \circ T^n, f \rangle_{L^2} = 0.$$

Pour $f = \mathbf{1}_B \circ T^p \in M$,

$$\langle \mathbf{1}_B \circ T^n, \mathbf{1}_B \circ T^p \rangle_{L^2} = \langle \mathbf{1}_B \circ T^{n-p}, \mathbf{1}_B \rangle_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(B)^2 = \mu(B) \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

d'après l'hypothèse **(ii)**. Il suit que pour tout $f = f_1 + f_2 \in \bar{M} \oplus M^{\perp}$

$$\langle \mathbf{1}_B \circ T^n, f \rangle_{L^2} = \langle \mathbf{1}_B \circ T^n, f_1 \rangle_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu = \mu(B) \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

car $f_2 \in M^{\perp}$ est orthogonale à la fonction constante à 1. On conclut avec $f = \mathbf{1}_A$. □

I.3 Exemples : Rotation sur le cercle, décalage de Bernouilli et loi des grands nombres

I.3.1 Rotations du cercle

Considérons $X = \mathbb{S}^1$, muni de la topologie induite par la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ et $\mu = \mathrm{Leb}_{\mathbb{S}^1}$ la mesure de Lebesgue induite de $\mathbb{R}$ sur le cercle.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère $R_\alpha : e^{2i\pi x} \longmapsto e^{2i\pi(x+\alpha)}$. On a vu que μ est R_α-invariante pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, est R_α-ergodique pour tout $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et n'est pas R_α-ergodique pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Proposition I.7

La mesure μ décrite ci-dessus n'est pas R_α-fortement mélangeante pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.3.2 Décalage de Bernouilli

Soit $X = \prod_{k\in\mathbb{Z}} [\![1, N]\!]$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$ à valeurs dans l'ensemble des entiers entre 1 et N, avec $N \geqslant 1$ fixé. On munit X de la tribu produit sur $\mathbb{Z}$ des tribus discrètes sur $[\![1, N]\!]$. De manière équivalente, on considère la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les *cylindres*, c'est-à-dire les ensembles suivants : pour $I \subset \mathbb{Z}$ fini, et $(a_i)_{i\in I} \subset [\![1, N]\!]$

$$\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X \,|\forall i \in I, u_i = a_i\}.$$

Sur $[\![1, N]\!]$, on associe la probabilité $\sum_{n=1}^N p_n \delta_n$ avec $0 < p_1, \cdots, p_N < 1$ et $\sum_{n=1}^N p_n = 1$. Sur X, on considère $\mu = \left(\sum_{n=1}^N p_n \delta_n\right)^{\otimes\mathbb{Z}}$. Ainsi, par exemple, pour une suite $(a_i)_{i\in I} \subset \{1, \cdots, N\}$ donnée, indexée par un sous-ensemble fini I de $\mathbb{Z}$, on a

$$\mu\left(\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X \,|\forall i \in I, u_i = a_i\}\right) = \prod_{i\in I} p_{a_i}.$$

Sur X, on considère l'opérateur σ dit de décalage de Bernouilli. Il s'agit de l'application $\sigma : u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. On a vu que μ est σ-invariante (il suffit de le constater sur les cylindres) et est σ-ergodique.

Proposition I.8

La mesure μ définie ci-dessus est σ-fortement mélangeante.

Démonstration : Comme dans les démonstrations évoquées dans les exposés précédemment, on va en fait montrer une convergence stationnaire dans le cadre d'ensembles cylindriques, et conclure en utilisant le fait que les cylindres forment une semi-algèbre. On montre (1) pour tout A, B cylindriques. On note pour tout $i \in Z$, $U_i : u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X \longmapsto u_i$ la projection sur la i-ème coordonnée. On écrit alors

$$A = \bigcap_{i\in I}\{U_i = a_i\} \text{ et } B = \bigcap_{j\in J}\{U_j = b_j\},$$

avec $1 \leqslant a_i, b_i \leqslant N$. Alors en itérant T, on a en fait

$$\forall n \geqslant 1, \{T^n \in B\} = \bigcap_{j\in J}\{U_{j+n} = b_j\}.$$

Ainsi, pour $n \geqslant \max J - \min I + 1$, il suit que $A \cap B$ s'écrit lui-même comme un cylindre avec $\sharp I + \sharp J$ contraintes, si bien que

$$\mu(A \cap \{T^n \in B\}) = \prod_{i\in I} p_{a_i} \prod_{j\in J} p_{b_j} = \mu(A)\mu(B).$$

La convergence est alors prouvée pour tout cylindre, donc pour toute la tribu $\mathcal{A}$. □

I.4 Loi des grands nombres

On considère l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$, où $\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ est la loi d'une variable aléatoire réelle X (c'est-à-dire que $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$). On considère $(X, \mathcal{A}, \mu) \stackrel{\text{déf.}}{=} (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathbb{P}_X^{\otimes\mathbb{Z}})$ l'espace des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ muni de la tribu produit et de la mesure produit. Rappelons que cette tribu est engendrée par les cylindres, c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{N\geqslant 1} \bigcup_{\substack{I\subset\mathbb{Z}\\ \sharp I = N}} \bigcup_{(A_i)_{i\in I}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})^I} \bigcap_{i\in I}\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X | x_i \in A_i\}\right).$$

On note pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\xi_n((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = x_n$. Alors la mesure d'un cylindre est donnée, par définition de μ, par

$$\mu\left(\bigcap_{i\in I}\{\xi_i \in A_i\}\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X \in A_i) = \prod_{i\in I}\mu(\xi_i \in A_i).$$

Soit $\sigma : X \longrightarrow X$ défini par

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X, \sigma\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) \stackrel{\text{déf.}}{=} (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En observant l'action de σ sur les cylindres, on conclut que μ est σ-invariante. On en déduit aussi que μ est σ-ergodique. Le théorème ergodique est une traduction de la loi des grands nombres dans ce cadre (prendre $f = \xi_0$). Nous allons montrer que μ est σ-mélangeante, toujours avec le même constat sur les cylindres.

Proposition I.9

La mesure μ sur X est σ-mélangeante.

Démonstration : Soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux ensembles cylindres de la forme $A = \bigcap_{i\in I}\{\xi_i \in E_i\}$ et $B = \bigcap_{j\in J}\{\xi_j \in F_j\}$, avec $E_i, F_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\{\sigma^n \in B\}$ est un cylindre :

$$\{\sigma^n \in B\} = \bigcap_{j\in J}\{\xi_{j+n} \in F_j\} = \bigcap_{j\in J+n}\{\xi_j \in F_{j-n}\},$$

où $J+n := \{j+n, j \in J\}$. À partir d'un certain rang, $J+n$ et I sont disjoints, de sorte que si $K_n = I \sqcup (J+n)$ et $G_k = E_k$ si $k \in I$ et $G_k = F_k$ si $k \in J+n$, alors

$$A \cap \{\sigma^n \in B\} = \bigcap_{k\in K_n}\{\xi_k \in G_k\}.$$

Il s'agit encore d'un cylindre, dont la mesure est donnée par

$$\mu(A \cap \{\sigma^n \in B\}) = \prod_{k\in K_n}\mu(\xi_k \in G_k) = \prod_{i\in I}\mu(\xi_i \in E_i)\prod_{j\in J+n}\mu(\xi_j \in F_j).$$

Or, par construction de μ, tous les ξ_j ont même loi ($\mu \circ \xi_j^{-1} = \mathbb{P}_X$), si bien que

$$\mu(A \cap \{\sigma^n \in B\}) = \prod_{i\in I}\mu(\xi_i \in E_i)\prod_{j\in J}\mu(\xi_j \in F_j) = \mu(A)\mu(B).$$

Cela conclut au mélange, car les cylindres forment une algèbre. □

Remarque I.10. Attention, on vient de montrer que pour tous cylindres A et B, on dispose d'une indépendance stationnaire, comme présenté dans la Remarque I.1, mais cela ne conclut pas en une dynamique triviale ! Il faudrait pour cela l'existence d'une indépendance stationnaire pour tous mesurables A, B, ce qui n'est pas le cas ici. ♣

II Mélange faible

II.1 Les multiples caractérisations du mélange faible

Si la notion de mélange fort permet de démontrer l'ergodicité, il est assez difficile en pratique de la déterminer. On introduit alors la notion de mélange faible qui est bien sûr moins forte que celle de mélange mais implique toujours l'ergodicité.

Définition II.1

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, $T : X \longrightarrow X$ une application $\mathcal{A}$-mesurable et μ une probabilité T-invariante. On dit que μ est T-faiblement mélangeante si pour tout $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\mu(A \cap \{T^n \in B\}) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2}$$

L'intérêt de cette notion repose sur le Théorème suivant qui la caractérise de nombreuses manières. Définissons avant une notion d'approximation d'ensemble *via* l'équipartition.

Définition II.2

Soit J un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On définit sa *densité*, si elle existe, la quantité suivante

$$\mathrm{d}(J) \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\sharp J \cap \{1, \cdots, n\}}{n}.$$

L'intérêt principal de cette notion dans notre exposé réside dans le lemme suivant.

Lemme II.3 (Koopman – von Neumann 1932)

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La suite des moyennes $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge vers 0 quand n tend vers ∞ ;

(ii) La suite des moyennes des carrés $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ converge vers 0 quand n tend vers ∞ ;

(iii) Il existe un sous-ensemble $J = J(a)$ de $\mathbb{N}$ de densité 1 pour lequel la sous-suite $(a_n)_{n\in J}$ converge vers 0.

Démonstration du lemme : On se contente de donner les grandes lignes.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit J de densité 1 sur lequel on a convergence de $(a_n)_n$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\sup_{n\geqslant 1} a_n\right)\frac{\sharp(J^c\cap[\![1,n]\!])}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j\in J\cap[1,n]} a_j.$$

Le théorème classique de Césàro conclut.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Soit $J_k = \{n\in\mathbb{N}, a_n > \frac{1}{k}\}$. Alors J_k est de densité nulle. Il existe ℓ_k pour lequel $\frac{\sharp J_k\cap\{1,\cdots,n\}}{n} \leqslant \frac{1}{k}$ pour tout $n \geqslant \ell_k$. On conclut alors en prenant

$$J = \bigcup_{k\geqslant 1} J_k \cap \{\ell_k,\cdots,\ell_{k+1}-1\}.$$

On montre que J est de densité nulle, et que $(a_n)_{n\notin J}$ converge vers 0.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) Au vu de l'équivalence montrée précédemment, cette équivalence est en fait immédiate. □

Voici le Théorème attendu.

Théorème II.4 : Caractérisation du faible mélange

Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace probabilisable, $T : X \longrightarrow X$ une application $\mathcal{A}$-mesurable et μ une mesure de probabilité T-invariante. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La mesure μ est T-faiblement mélangeante ;

(ii) Pour tout $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\int_X g(x)f(T^n x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu\int_X g\,\mathrm{d}\mu\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

(iii) Pour tout $A, B\in\mathcal{A}$, il existe un ensemble $J = J(A,B)\subset\mathbb{N}$ avec densité 1 tel que

$$\mu(A\cap\{T^n\in B\}) - \mu(A)\mu(B) \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ n\in J}]{} 0.$$

(iv) L'application $T\times T$ définie sur $(X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$ dans lui-même par $T(x,y) = (T(x),T(y))$ pour $x,y\in X$, rend la mesure $\mu\otimes\mu$ ergodique ;

(v) La mesure $\mu\otimes\mu$ est faiblement mélangeante par rapport à $T\times T$;

(vi) Si $f\in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ est fonction propre pour l'opérateur de Koopman U_T alors f est constante.

Remarque II.5. L'ensemble J donné dans la condition (iii) peut en fait être choisi indépendamment de A et B. Regarder la remarque 6.3 page 70 de [Pet83]. ♣

II.2 Une démonstration d'une implication *via* le théorème spectral

Montrons que (vi) implique (ii). Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ d'intégrale nulle,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\int_X f(x)f(T^n x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Le théorème spectral affirme que pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$, il existe une probabilité sans atomes (d'après la condition (vi)) μ_f sur $\mathbb{S}^1$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \langle U_T^n f, f\rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{S}^1} z^n\ \mu_f(\mathrm{d}z).$$

Ainsi,

$$\left|\int_X f(x)f(T^n x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{S}^1} z^n\ \mathrm{d}\mu_f(z)\right|^2.$$

On développe, on permute

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\int_X f(x)f(T^n x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right|^2 = \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{z}{w}\right)^n\ \mu_f(\mathrm{d}z)\ \mu_f(\mathrm{d}w).$$

Pour $z \neq w$, on a bien sûr

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{1}{N}\frac{1-\left(\frac{z}{w}\right)^N}{1-\frac{z}{w}},$$

qui tend vers 0 quand N tend vers ∞. On conclut alors par convergence dominée que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\int_X f(x)f(T^n x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

II.3 Exemples

II.3.1 Rotations

Reprenons l'exemple de la rotation introduit dans le paragraphe I.3.1. On a vu que μ n'est jamais R_α-mélangeant.

Proposition II.6 : La rotation n'est pas faiblement mélangeante

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, μ n'est pas R_α-faiblement mélangeant.

Démonstration : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation (iv) du faible mélange, pour que R_α soit faiblement mélangeante, il faudrait que $R_\alpha \times R_\alpha$ soit ergodique. Or, l'ergodicité est équivalente au fait que pour tout $f \in L^2(\mu\otimes\mu)$, si $f \circ R_\alpha \times R_\alpha = f$ alors f est constante. Un contre-exemple est directement donné par

$$f\left(e^{2\mathrm{i}\pi x}, e^{2\mathrm{i}\pi y}\right) = e^{2\mathrm{i}\pi(x-y)}.$$

□

II.3.2 Décalage de Bernouilli

Reprenons l'exemple du décalage de Bernoulli introduit dans le paragraphe I.3.2. On a déjà vu que μ est σ-fortement mélangeant. Il suit immédiatement qu'il est aussi faiblement mélangeant. Démontrons ce fait à la main.

Puisque $\mathcal{A}$ est engendrée par les cylindres, il suffit de montrer (2) avec A, B cylindres. Dans ce cas, comme d'habitude, si on note $A = \bigcap_{i\in I}\{U_i = a_i\}$ et $B = \bigcap_{j\in J}\{U_j = b_j\}$, avec $I, J \subset \mathbb{Z}$ finis, et $U_i : u \in X \mapsto u_i$, alors pour $n \geqslant \max J - \min I + 1$, $\mu(A \cap \{T^n \in B\}) = \prod_{i\in I} p_i \prod_{j\in J} p_j$, donc on en déduit que $\mu(A \cap \{T^n \in B\}) = \mu(A)\mu(B)$ pour tout $n \geqslant \max J - \min I + 1$. On en déduit alors que pour $N \geqslant \max J - \min I + 1$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\mu(A \cap \{T^n \in B\}) - \mu(A)\mu(B)| = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\max J - \min I} |\mu(A \cap \{T^n \in B\}) - \mu(A)\mu(B)| + 0.$$

D'où la convergence vers 0 et le faible mélange.

II.3.3 Une application faiblement mélangeante mais pas fortement mélangeante

Sans démonstration, évoquons rapidement un contre-exemple provenant de [Pet83] (chapitre 4, section 4.5) d'application qui soit faiblement mélangeante mais pas fortement mélangeante. Il s'agit en fait d'un exercice difficile, c'est pourquoi on se contente d'évoquer le sujet.

Le contre-exemple s'agit de ce que Petersen nomme la *machine à additionner* de von Neumann et Kakutani. Plaçons-nous sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour $n \geqslant 1$, on considère $I_n := [1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-(n+1)})$ et pour tout $x \in I_n$,

$$\phi(x) \overset{\text{déf.}}{=} x - \left(1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Alors ϕ envoie I_n sur son symétrique par rapport à $1/2$. Elle préserve bien sûr la mesure de Lebesgue. Si $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_{2n}$, ϕ induit en fait une application $\phi_A : A \longrightarrow A$, puisque si $x \in A$, alors $\phi(x) \in A$ ou $\phi^2(x) \in A$. L'application ϕ_A est alors faiblement mélangeante, mais pas fortement.

Références

[EW10] Manfred Einsiedler et Thomas Ward. *Ergodic Theory : with a view towards Number Theory.* Springer London, 2010. doi : `https://doi.org/10.1007/978-0-85729-021-2`.

[Pet83] Karl E. Petersen. *Ergodic Theory.* Cambridge University Press, 1983. doi : `https://doi.org/10.1017/CBO9780511608728`.