GdL Einsiedler-Ward

03/10/2024

1 Notion d'ergodicité

Définition 1. *$(X, \mathcal{B}, \mu)$ espace probabilisé, $T : X \to X$ préservant la mesure.*

T est ergodique lorsque

$$\forall B \in \mathcal{B},\ T^{-1}(B) = B \implies \mu(B) \in \{0, 1\} \tag{1}$$

Proposition 1. *Sont équivalentes:*

1. *T est ergodique*
2. *$\forall B \in \mathcal{B}$, $\mu(T^{-1}(B)\Delta B) = 0 \implies \mu(B) \in \{0, 1\}$*
3. *$\forall A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0 \implies \mu\left(\bigcup_n T{-}n(A)\right) = 1$*
4. *$\forall A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(A)\mu(B) > 0 \implies \exists n \geq 1,\ \mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$*
5. *$\forall f : X \to \mathbb{C}$ mesurable,*
$$f \circ T = f \ \mu\text{-p.p.} \implies f = cte\ \mu\text{-p.p.}$$
6. *$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu)$,*
$$f \circ T = f \ \mu\text{-p.p.} \implies f = cte\ \mu\text{-p.p.}$$

Exemple 1.
- *Les décalages de Bernoulli sont ergodiques.*
- *La rotation $R_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est ergodique ssi α irrationnel.*
- *Le dédoublement de l'angle $x \mapsto 2x$ est ergodique (sur $\mathbb{T}$), par isomorphisme avec les décalages de Bernoulli.*

2 Opérateurs unitaires associés

Définition 2. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ probabilisé, $T : X \to X$ préservant la mesure. L'opérateur de Koopman associé est:*

$$U_T : f \in \mathbb{L}^2(\mu) \mapsto f \circ T$$

Proposition 2. *U_T est une isométrie.*

Définition 3. *Si T inversible, U_T est unitaire et on l'appelle l'opérateur unitaire associé à T.*

Proposition 3. *T ergodique ssi 1 est valeur propre simple de U_T.*

Proof. $f \equiv 1$ est vecteur propre donc les vecteurs propres sont les constantes ssi 1 est simple. $\square$

Retour aux exemples!

Exemple 2.

- *R_α ergodique ssi α irrationnel.*

  Proof. $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n\cdot} \in \mathbb{L}^2(X,\mu)$ t.q. $f \circ R_\alpha = f$

  $$\begin{aligned} f \circ R_\alpha &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n(\cdot+\alpha)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n\alpha} e^{2i\pi n\cdot} \\ &= e^{2i\pi n\alpha} f \end{aligned} \tag{2}$$

  Donc $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = c_n e^{2i\pi n\alpha}$, impossible sauf si αrationnel. $\square$

- *$x \mapsto 2x$ ergodique (même preuve + Bessel-Parseval).*

3 Le théorème ergodique moyen

Théorème 4. *Posons $I = \{g \in \mathbb{L}^2(\mu),\ U_T g = g\}$,*
P_T la projection orthogonale sur I.
Alors, $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu)$,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} U_T^k f \xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{L}^2} P_T f$$

Proof. $B = \{U_T g - g,\ g \in \mathbb{L}^2(\mu)\}$, $\mathbb{L}^2(\mu) = B^\perp \oplus \bar{B}$.
Mq $B^\perp = I$.
Alors, il suffit de mq $\forall h\ B$,

$$\frac{1}{N}\sum_k U_T^k h \xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{L}^2} 0$$

Pour un tel $h = U_T g - g$, par somme télescopique

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{N}\sum_k U_T^k (U_T g - g)\right\|_{\mathbb{L}^2} &= \left\|\frac{1}{N}(U_T^N g - g)\right\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq \frac{1}{N}(\left\|U_T^N g\right\|_{\mathbb{L}^2} + \|g\|_{\mathbb{L}^2}) \\ &\leq \frac{2\,\|g\|_{\mathbb{L}^2}}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc on a la même propriété pour $h \in \bar{B}$ par densité et on conclue par décomposition. $\square$

Définition 4. *On appelle cette moyenne la Nème moyenne ergodique de f, notée (dans le livre)* A_N^f.

Corollaire 5. *Pour tout* $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$, A_N^f *converge dans* $\mathbb{L}1$ *vers* $\tilde{f}$ *qui est* T*-invariant.*