

LA FONCTION ZETA DE RIEMANN, LES NOMBRES PREMIERS ET LES FONCTIONS L

Corentin HESPEL

Encadré par: Didier LESESVRE

2 juin 2024

Table des matières

Introduction	5
1 Généralités sur la fonction zêta de Riemann	7
1.1 Premières définitions	7
1.2 Lien avec les nombres premiers	8
1.3 Quelques formules sur Zeta	11
2 L'équation fonctionnelle	15
2.1 Première démonstration	15
2.2 Deuxième démonstration	17
3 Formule de Perron	21
4 Théorème des nombres premiers	27
4.1 Zone sans zéro	27
4.2 Théorème des nombres premiers	32
5 Utilité de l'équation fonctionnelle	35
5.1 Motivation	35
5.2 Notations	36
5.3 Théorème principal	37
5.4 Exemples d'application	44

Introduction

La distribution des nombres premiers est un sujet central en théorie des nombres. L'un des outils fondamentaux pour étudier cette distribution est la fonction zêta de Riemann. Ce travail explore plusieurs aspects de cette fonction afin de démontrer le théorème des nombres premiers.

Nous commencerons par présenter diverses formules concernant la fonction zêta, ce qui permettra de comprendre le lien entre zêta et les nombres premiers. Ensuite, nous étudierons la formule de Perron, qui exprime la fonction zêta en termes d'une série, clarifiant ce lien de manière explicite. Nous examinerons ensuite la zone sans zéros, une région du plan complexe où la fonction zêta ne s'annule pas, essentielle pour les estimations sur la distribution des nombres premiers.

Ces outils nous permettront de démontrer le théorème des nombres premiers, qui décrit la distribution asymptotique des nombres premiers inférieurs à un certain seuil. Au cours de cette étude, nous montrerons également l'équation fonctionnelle que vérifie zêta. Cette équation met en lumière des propriétés de symétrie, l'existence d'une transformée de Mellin et le lien avec les développements en série de Fourier.

Enfin, l'analyse de l'article "Functional Equations With Multiple Gamma Factors and the Average Order of Arithmetical Functions" permettra de mieux comprendre l'importance de l'équation fonctionnelle. Nous serons alors en mesure de définir une méthode de calcul asymptotique pour des fonctions possédant une équation fonctionnelle.

Chapitre 1

Généralités sur la fonction zêta de Riemann

1.1 Premières définitions

Notation : Soit $s \in \mathbb{C}$, on note $s = \sigma + it$.

Définition 1 : Série de Dirichlet

Une série de Dirichlet est une série de la forme suivante, où (a_n) désigne une suite de nombres complexes :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Il existe néanmoins une définition plus générale, où (a_n) désigne une suite de nombres complexes et (λ_n) une suite réelle, positive, strictement croissante et non bornée :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$$

La première définition correspond au cas particulier $\lambda_n = \ln(n)$

On associe classiquement à une telle série les deux fonctions :

$$A(u) = \sum_{1 \leq n \leq u} a_n \quad A_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$$

On note $\sigma_0 = \operatorname{Re}(s_0)$ avec $s_0 = \max s$ tel que f converge et $\bar{\sigma}$ tel que f converge absolument.

Définition 2 : Fonction Zêta de Riemann

On appelle fonction Zêta de Riemann la fonction définie sur le plan complexe par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

Définition 3 : Fonction de Von Mangoldt

La fonction de Von Mangoldt, noté Λ est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^k \text{ pour un nombre premier } p \text{ et un entier } k \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 4 : Fonctions π , θ et ψ

On définit la fonction de comptage des nombres premiers comme étant la fonction

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

où p parcourt les nombres premiers inférieurs à x .

On définit la fonction θ comme étant la fonction

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

où p parcourt les nombres premiers inférieurs à x .

On définit la fonction ψ , aussi appelé fonction de Tchebichev, comme la fonction

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$$

où p^k parcourt les puissances des nombres premiers inférieures à x .

Remarque

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Définition 5 : Fonction Gamma d'Euler

On définit la fonction Gamma d'Euler, noté $\Gamma(s)$ comme étant la fonction définie $\mathbb{C}$ privé des entiers négatifs $0, -1, -2, \dots$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

Cette intégrale converge pour $\operatorname{Re}(s) > 0$ et se prolonge holomorphiquement grâce à la relation

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

1.2 Lien avec les nombres premiers**Théorème 1 : Produit d'Euler**

Si $\operatorname{Re}(s) > 1$ on a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Nous avons dans ce cas une convergence absolue du produit et $\zeta(s) \neq 0$ si $\operatorname{Re}(s) > 1$

Preuve. En utilisant la décomposition en facteurs premiers nous pouvons écrire, pour tout entier naturel n ,

$$n = 2^{e_2} 3^{e_3} \dots \text{ et donc } \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \sum_{e_2, e_3, \dots \geq 0} (2^{e_2} 3^{e_3} \dots)^{-s}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_m = \{n \in \mathbb{N} \mid e_k = 0 \forall k > m\}$ et $\zeta_m(s) = \sum_{n \in S_m} n^{-s}$. Cette somme converge uniformément si $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ les premiers jusqu'à m .

$$\zeta_m(s) = \sum_{n \in S_m} n^{-s} = \sum_{e_1, e_2, \dots, e_k \geq 0} (p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k})^{-s} = \sum_{e_1 \geq 0} p_1^{-e_1 s} \sum_{e_2 \geq 0} p_2^{-e_2 s} \dots \sum_{e_k \geq 0} p_k^{-e_k s}$$

Or, si $\operatorname{Re}(s) > 1$, $\sum_{e \geq 0} p^{-es} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots = (1 - p^{-s})^{-1}$

Donc $\zeta_m(s) = \prod_{p \leq m} (1 - p^{-s})^{-1}$

Soit $\delta > 0$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta$, on a, si m est assez grand :

$$|\zeta_m(s) - \zeta(s)| \leq \left| \sum_{n \geq m} n^{-s} \right| \leq \sum_{n \geq m} |n^{-s}| = \sum_{n \geq m} n^{-\operatorname{Re}(s)} \leq \int_m^s x^{-1-\delta} dx \leq \frac{1}{\delta} m^{-\delta} < \epsilon$$

On montre ainsi que $\zeta_m(s)$ converge uniformément vers $\zeta(s)$ si $\operatorname{Re}(s) > 1$

De la même manière $P_m(s) = \prod_{p \leq m} (1 - p^{-s})^{-1} \xrightarrow{CVU} P(s) = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s})^{-1}$ si $\operatorname{Re}(s) > 1$. Ainsi, localement $\ln(P_m)$ converge uniformément vers $\ln(P)$.

Montrons maintenant la convergence absolue du produit :

$$\sum_p |\log(1 - p^{-s})^{-1}| = \sum_p \left| \sum_{e \geq 1} \frac{1}{e} p^{-es} \right| \leq \sum_p \sum_{e \geq 1} |p^{-s}|^e = \sum_p (|p^s| - 1)^{-1} < +\infty$$

On a ici utilisé que si $|z| < 1$, $\log(1 - z) = -\sum_{n \geq 1} z^n$

Alors $\log P$ converge absolument donc P converge absolument. En particulier il est non nul.

Pour résumer, nous avons montré que

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) &= P_m(s) \\ \zeta_m(s) &\longrightarrow \zeta(s) \\ P_m(s) &\longrightarrow \prod_{p \text{ premier}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \end{aligned}$$

Donc par unicité de la limite nous avons la formule suivante :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

□

Propriété 1 :

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log u} d\theta(u) \quad \text{pour } x \geq 2$$

Preuve. On introduit la fonction $\lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{\log p} \\
&= \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{\log n} \\
&= \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{\log x} + \int_0^x \sum_{n \leq t} \frac{\lambda(n)}{t(\log t)^2} dt \quad \text{par sommation d'Abel} \\
&= \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt \\
&= \int_2^x \frac{1}{\log u} d\theta(u) \quad \text{par intégration par partie}
\end{aligned}$$

□

Propriété 2 :

Pour $x \geq 2$,

$$\theta(x) = \psi(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

Preuve. D'après la définition de la fonction ψ ,

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p = \sum_{k=1}^{+\infty} \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

Or, $\theta(x) \leq \psi(x) \ll x$, donc

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{k \geq 2} \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \ll x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \log x \ll x^{\frac{1}{2}}$$

□

Corollaire 1 :

Pour $x \geq 2$,

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

Preuve. D'après la proposition 1,

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log u} d\theta(u) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(u)}{u(\log u)^2} du$$

Or,

$$\int_2^x \frac{\theta(u)}{u(\log u)^2} du \ll \int_2^x \frac{1}{(\log u)^2} du \ll \frac{x}{(\log x)^2}$$

□

Théorème 2 : Lien entre Zêta et les nombres premiers

Pour $\sigma_0 > 1$ et $T \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + R$$

Avec

$$R \ll \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \Lambda(n) \min\left(1, \frac{x}{T|x-n|}\right) - \frac{(4x)^{\sigma_0}}{T} \frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}$$

Preuve. La preuve de ce théorème sera effectuée plus tard. $\square$

Remarque

Ces deux théorèmes montrent le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers. Le premier permet d'avoir un développement de ζ comme produit de nombres premiers. Le deuxième montre qu'une connaissance des zéros de la fonction ζ permet d'avoir des informations sur la fonction ψ . Or les propriétés précédentes montrent qu'une approximation de ψ donne directement une approximation de π . Alors, une étude de ζ permet d'avoir une méthode de comptage des nombres premiers.

1.3 Quelques formules sur Zeta

Propriété 3 :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad \text{Re}(s) > 1$$

Preuve. Notons $\sigma = \text{Re}(s)$.

Pour $\sigma > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \frac{1}{n^s} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \zeta(s) \Gamma(s)$$

D'autre part, si $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx \quad \text{par convergence uniforme} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

$\square$

Propriété 4 :

Soit $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ associée à la série de Dirichlet $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n n^{-s}$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = s \int_1^{+\infty} A(x) x^{-s-1} dx \quad \text{pour } \sigma > \sigma_0$$

Preuve. Soit $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N &= \int_{1^-}^N x^{-s} dA(x) \\ &= [A(x)x^{-s}]_{1^-}^N - \int_{1^-}^N A(x) dx^{-s} \\ &= A(N)N^{-s} + s \int_1^N A(x) x^{-s-1} dx \quad (\star) \end{aligned}$$

Notons $\Phi = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |A(x)|}{\log x}$.

Si $\theta > \Phi$, alors $A(x) \ll x^\theta$. Donc si $\sigma > \theta$, $s \int_1^{+\infty} A(x) x^{-s-1} dx$ est absolument convergente et on obtient donc la formule en faisant tendre N vers l'infini dans l'équation $(\star)$.

Si $\sigma_0 < 0$, alors $\Phi \leq 0$ et donc la formule est vraie pour tout $\sigma > 0$. Si $\sigma_0 > 0$, alors $\Phi \geq \sigma_0$ et donc la formule est vraie pour tout $\sigma > \sigma_0$ $\square$

Propriété 5 :

Soit $\sigma > 0$, $x > 0$ et $s \neq 1$. Alors

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^{+\infty} \{u\} u^{-s-1} du$$

Où l'on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x et $[x]$ la partie entière.

Preuve. Pour $\sigma > 1$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \sum_{n \geq x} n^{-s}$$

Or

$$\sum_{n \geq x} n^{-s} = \int_x^{+\infty} u^{-s} d[u] = \int_x^{+\infty} u^{-s} du - \int_x^{+\infty} u^{-s} d\{u\}$$

On intègre par partie la deuxième intégrale et on calcule la première, ce qui donne :

$$\sum_{n \geq x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^{-s}} + \int_x^{+\infty} \{u\} du^{-s}$$

Or $du^{-s} = -s u^{-s-1} du$. Or $\int_x^{+\infty} u^{-s-1} \{u\} du$ converge pour $\sigma > 0$ donc il existe un prolongement analytique de ζ . Or l'intégrale est holomorphe donc par unicité du prolongement analytique nous avons bien la formule recherchée. $\square$

Corollaire 2 :

En prenant $x = 1$, nous avons donc la formule pour $\sigma > 0$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \{u\} u^{-s-1} du$$

Corollaire 3 :

Pour $\sigma > 0$,

$$\frac{1}{\sigma-1} < \zeta(\sigma) < \frac{\sigma}{\sigma-1}$$

En particulier, $\zeta(\sigma) < 0$ pour $0 < \sigma < 1$.

Preuve. $0 \leq \{u\} < 1$ alors $0 \leq \int_1^{+\infty} \{u\} u^{-\sigma-1} du < \int_1^{+\infty} u^{-\sigma-1} du = \frac{1}{\sigma}$
Alors d'après le Corollaire 2,

$$0 \geq -\sigma \int_1^{+\infty} \{u\} u^{-\sigma-1} du > -1$$

$$\frac{\sigma}{\sigma-1} > \zeta(\sigma) > \frac{1}{\sigma-1}$$

□

Propriété 6 :

Soit $\delta > 0$. On note $s = \sigma + it$.

Alors, $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$ pour $\delta \leq \sigma \leq 2$ et $|t| \leq 1$.

De plus $\zeta(s) \ll (1 + \tau^{1-\sigma}) \min(\frac{1}{|\sigma-1|}, \log \tau)$ pour $\delta \leq \sigma \leq 2$ et $|t| \geq 1$ avec $\tau = |t| + 4$

Preuve. Notons dans un premier temps que, d'après la Propriété 5,

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(\tau x^{-\sigma}) \quad (\star)$$

Si $|t| \leq 1$, le résultat découle directement de la Propriété 5. Si $|t| \geq 1$, supposons $x \geq 2$. Alors, si $\sigma \geq 0$,

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} \ll \sum_{n \leq x} n^{-\sigma} \ll 1 + \int_1^x u^{-\sigma} du$$

Si $0 \leq \sigma \leq 1 - \frac{1}{\log x}$ alors cette intégrale est $\frac{(x^{1-\sigma}-1)}{1-\sigma} < \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}$.

Si $|\sigma-1| \leq \frac{1}{\log x}$, alors $\int_1^x u^{-\sigma} du \sim \int_1^x u^{-1} du = \log x$

Si $\sigma \geq 1 + \frac{1}{\log x}$ alors $\int_1^x u^{-\sigma} du < \int_1^{+\infty} u^{-\sigma} du = \frac{1}{\sigma-1}$.

Donc

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} \ll (1 + x^{1-\sigma}) \min\left(\frac{1}{|\sigma-1|}, \log x\right) \quad 0 \leq \sigma \leq 2$$

On obtient donc le résultat attendu en appliquant ce résultat à $(\star)$ avec $x = \tau$.

□

Propriété 7 :

Pour $s > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \text{ premier}} \sum_{k \geq 1} \frac{\log p}{p^{ks}}$$

Preuve. Par application du Théorème 1,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

On utilise la dérivée logarithmique et donc

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \text{ premier}} \frac{\log p}{p^s - 1} = \sum_{p \text{ premier}} \sum_{k \geq 1} \frac{\log p}{p^{ks}}$$

□

Chapitre 2

L'équation fonctionnelle

Théorème 3 : Equation fonctionnelle

Pour tout $s \neq 1$, ζ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

2.1 Première démonstration

Lemme 1 : Formule de sommation de Fourier

Soit $\Phi \in C^1$ sur $[a, b]$, soit $[x]$ le plus grand entier ne dépassant pas x . Alors :

$$\sum_{a < n \leq b} \Phi(n) = \int_a^b \Phi(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \Phi'(x) dx + \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right) \Phi(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right) \Phi(b)$$

Preuve. Supposons $n \leq a < b \leq n+1$. L'additivité permet alors de généraliser la formule.

En utilisant l'intégration par partie suivante $\begin{cases} u = (x - n - \frac{1}{2}) \\ v = \Phi(x) \end{cases}$ on obtient :

$$\int_a^b (x - n - \frac{1}{2}) \Phi'(x) dx = (b - n - \frac{1}{2}) \Phi(b) - (a - n - \frac{1}{2}) \Phi(a) - \int_a^b \Phi(x) dx$$

Alors

$$\int_a^b \Phi(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \Phi'(x) dx + \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right) \Phi(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right) \Phi(b) = ([b] - n) \Phi(b)$$

Si $b \neq n+1$ on a $\sum_{a < n \leq b} \Phi(n) = 0$ et $([b] - n) \Phi(b) = 0$

Sinon $([b] - n) \Phi(b) = \Phi(b) = \sum_{a < n \leq b} \Phi(n)$ □

Preuve. [Preuve de l'équation fonctionnelle]

Appliquons la formule de sommation de Fourier avec $\Phi(n) = n^{-s}$ avec $s \neq 1$. Soient $a, b \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{n=a+1}^b \frac{1}{n^s} = \underbrace{\frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{1-s}}_{\int_a^b \Phi(x) dx} - s \int_a^b \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2}(b^{-s} - a^{-s})$$

On pose $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$ et on choisit $a = 1$ et $b \rightarrow +\infty$ et alors

$$\zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \quad (*)$$

Or $[x] - x + \frac{1}{2}$ est borné ce qui assure la convergence de l'intégrale pour $\sigma > 0$ et convergence uniforme pour toute région à droite de $\sigma = 0$. Cela montre une prolongation analytique pour ζ pour $\sigma > 0$ avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

Prenons maintenant $0 < \sigma < 1$, on a alors :

$$\int_0^1 \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx = - \int_0^1 \frac{1}{x^s} = \frac{1}{s-1} \quad \frac{s}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{2}$$

D'où

$$\zeta(s) = s \int_0^{+\infty} \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx \quad (0 < \sigma < 1)$$

En réalité, (*) permet d'avoir un prolongement de ζ pour $\sigma > -1$.

En effet, posons $f(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$ et $f_1(x) = \int_1^x f(y) dy$

Soit $k \in \mathbb{N}$ alors $\int_k^{k+1} f(y) dy = 0$ donc f_1 est bornée.

Alors

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x^{s+1}} dx = \left[\frac{f_1(x)}{x^{s+1}} \right]_{x_1}^{x_2} + (s+1) \int_{x_1}^{x_2} \frac{f_1(x)}{x^{s+2}} dx \longrightarrow 0 \quad \text{pour } x_1 \rightarrow +\infty \quad x_2 \rightarrow +\infty \quad \sigma > -1$$

L'intégrale est alors convergente pour $\sigma > -1$ ce qui permet d'assurer la validité du prolongement de ζ pour $\sigma > -1$

De plus, on a $s \int_0^1 \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}$ pour $\sigma < 0$. On a donc :

$$\zeta(s) = s \int_0^{+\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx \quad (-1 < \sigma < 0)$$

Montrons désormais que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{x^{s+1}} dx = 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{x^{s+1}} dx &= \left[-\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi x^{s+1}} \right]_{\lambda}^{+\infty} - \frac{s+1}{2n\pi} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{x^{s+2}} dx \\
&= O\left(\frac{1}{n\lambda^{s+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{dx}{x^{s+2}}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n\lambda^{s+1}}\right)
\end{aligned}$$

Alors $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{x^{s+1}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} O\left(\frac{1}{n\lambda^{s+1}}\right) = 0$

Utilisons maintenant le développement en série de Fourier suivant :

$$[x] - x + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi} \quad x \notin \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= s \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi x^{s+1}} \\
&= \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi x^{s+1}} \quad \text{car } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{x^{s+1}} dx = 0 \\
&= \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n\pi)^s}{n} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y^{s+1}} dy \quad y = 2n\pi x \\
&= \frac{s}{\pi} (2\pi)^s [-\Gamma(-s)] \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(1-s) \\
&= 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)
\end{aligned}$$

Cette formule est alors valide pour $-1 < \sigma < 0$. Cependant le membre à droite reste holomorphe pour toutes les valeurs de s telles que $\sigma < 0$. Cela fournit donc une prolongation analytique de $\zeta(s)$ sur le reste du plan avec comme seule singularité celle rencontrée en $s = 1$. $\square$

2.2 Deuxième démonstration

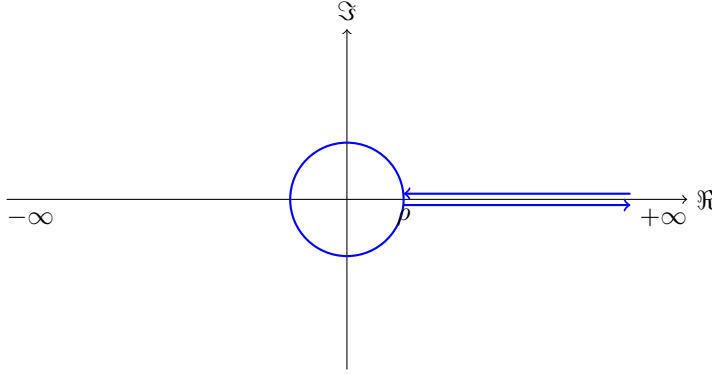
D'après le lemme 1, on a $\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ pour $\text{Re}(s) > 1$.

Considérons maintenant

$$I(s) = \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

où C est un contour partant de l'infini, enroule une fois l'origine en évitant les points $2ik\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et repart à l'infini.

Ici $z^{s-1} = e^{(s-1)\log z}$ de telle façon que $\log z$ varie de 0 à 2π autour après l'enroulement de l'origine.



Nous pouvons considérer comme contour C ce même contour avec $0 < \rho < 2\pi$. On écrit $s = \sigma + it$. Sur le cercle,

$$\begin{aligned} |z^{s-1}| &= e^{(\sigma-1) \log |z| - t \arg z} \leq |z|^{\sigma-1} e^{2\pi|t|} \\ |e^z - 1| &> |z| \end{aligned}$$

Alors sur le cercle,

$$\frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \leq \rho^{\sigma-2} e^{2\pi|t|}$$

Donc

$$\int_{S(0,\rho)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \leq A \rho^{\sigma-1} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad A \in \mathbb{R}$$

En faisant tendre ρ vers 0 on obtient :

$$\begin{aligned} I(s) &= - \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{(xe^{2i\pi})^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ &= (e^{2i\pi s} - 1) \Gamma(s) \zeta(s) \\ &= \frac{2i\pi e^{i\pi s}}{\Gamma(1-s)} \zeta(s) \end{aligned}$$

D'où :

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \quad (\sigma > 1)$$

Cette formule est montrée pour $\sigma > 1$, cependant $I(s)$ est uniformément convergente pour tout compact et définit une fonction analytique. La formule fournit donc une prolongation analytique de $\zeta(s)$ sur $\mathbb{C}$ avec des singularités sur les pôles de $\Gamma(1-s)$. Ces singularités sont $s = 1, 2, 3, \dots$ qui sont en réalité artificielles sauf $s = 1$.

En effet,

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_C \frac{dz}{e^z - 1} = 2i\pi \\ \Gamma(1-s) &= -\frac{1}{s-1} + \dots \end{aligned}$$

Donc la singularité en $s = 1$ est de résidu 1.

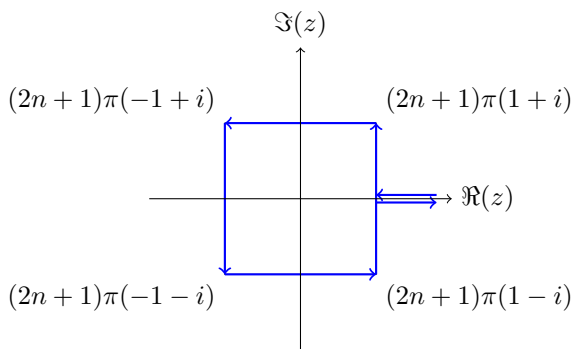
Si $s \in \mathbb{N}, s \neq 1$, on peut montrer que ces singularités sont artificielles. En effet

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + B_1 \frac{z^2}{2} - B_2 \frac{z^4}{4} + \dots \quad B_1, B_2, \dots \text{ sont les nombres de Bernoulli}$$

Donc en appliquant le théorème des résidus on trouve :

$$\zeta(0) = \frac{1}{2} \quad \zeta(-2m) = 0 \quad \zeta(1-2m) = \frac{(-1)^m B_m}{2m} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Calculons maintenant l'intégrale $I(s)$ le long d'un contour C_n consistant en une demi-droite venant de l'infini sur l'axe réelle jusqu'à $(2n+1)\pi$ puis un carré de côté $(2n+1)\pi(\pm 1 \pm i)$ parcouru dans le sens trigonométrique et enfin une demi-droite repartant vers l'infini sur l'axe réelle.



Ce contour englobe les singularités de l'intégrande aux points $\pm 2i\pi, \pm 4i\pi, \dots, \pm 2in\pi$. Calculons les résidus aux points $2im\pi$ et $-2im\pi$ en simultanément :

$$\left(2m\pi e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)^{s-1} + \left(2m\pi e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)^{s-1} = -2(2m\pi)^{s-1} e^{i\pi s} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)$$

Alors par application du théorème des résidus :

$$I(s) = \int_{C_n} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + 4i\pi e^{i\pi s} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) \sum_{m=1}^n (2m\pi)^{s-1}$$

Si $\sigma < 0$ et $n \leftarrow +\infty$, $\left|\frac{1}{e^z - 1}\right|$ est borné et $z^{s-1} = O(|z|^{\sigma-1})$.

Donc $\lim_{n \leftarrow +\infty} \int_{C_n} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} = 0$

Finalement :

$$\begin{aligned} I(s) &= 4i\pi e^{i\pi s} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) \sum_{m=1}^{+\infty} (2m\pi)^{s-1} \\ &= 4i\pi e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s) (2\pi)^{s-1} \end{aligned}$$

Il suit alors :

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{e^{-i\pi s}}{2i\pi} \Gamma(1-s) 4i\pi e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s) (2\pi)^{s-1} \\ &= 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)\end{aligned}$$

Par le même argument que précédemment cette formule reste valide sur $\mathbb{C}$.

□

Chapitre 3

Formule de Perron

La formule de Perron est un outil d'analyse complexe permettant de calculer des sommes allant jusqu'à un certain seuil. Cette formule est donc très intéressante dès que l'on souhaite avoir plus d'information sur des fonctions de comptage.

Théorème 4 : Formule de Perron sans terme d'erreur

Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$.

Si $n \notin \mathbb{N}$, $c > 0$ et $\sigma > \sigma_0 - c$. Alors :

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n < x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s+w) \frac{x^w}{w} dw$$

Remarque (lien avec les séries entières)

Pour les séries entières, le domaine de convergence est un disque alors que pour les séries de Dirichlet il s'agit de la gauche d'un demi-plan. C'est pourquoi les formules de Cauchy montre une intégration sur un cercle (la frontière d'un disque) alors que pour les formules de Perron, le domaine d'intégration est une ligne verticale. Cependant à la différence des formules de Cauchy, on a ici une somme partielle.

Lemme 2 :

Dans les memes conditions du théorème,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} = \begin{cases} 1 & \text{si } n < x \\ 0 & \text{si } n > x \end{cases}$$

Preuve. Posons $a = \frac{x}{n}$ et $I = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w}$.

Donc

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^z}{z} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Si $a > 1$:

Dans ce cas $\log a > 0$. On considère l'intégration sur le contour C défini par le segment $[c - iR, c + iR]$ et le demi-cercle à gauche C_R de diamètre ce segment.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $A \in \mathbb{R}$ tel que

1. $|a^z| < e^{-A \log a} \quad z \in \operatorname{Re}(z) < -A$
2. $\left|\frac{1}{z}\right| < \varepsilon \quad z \in C_R \cap \{\operatorname{Re}(z) < -A\}$ pour $R \rightarrow +\infty$

Donc :

$$\int_{C_R \cap \operatorname{Re}(z) < -A} \frac{a^z}{z} dz < \varepsilon \int_{C_R \cap \operatorname{Re}(z) < -A} |a|^z dz$$

Or, $\int_{C_R \cap \operatorname{Re}(z) < -A} |a|^z dz$ est bornée quand $R \rightarrow +\infty$.

Donc :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{a^z}{z} dz = 0$$

Finalement :

$$\int_C \frac{a^z}{z} dz = \int_{C_R} \frac{a^z}{z} dz + 2i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{a^z}{z}, 0\right) \longrightarrow 2i\pi \quad R \rightarrow +\infty$$

Donc $I = 1$

Si $0 < a < 1$:

Dans ce cas $\log a < 0$. On utilise le même raisonnement avec comme contour le segment $[c - iR, c + iR]$ et le demi-cercle à droite C_R de diamètre ce segment. Il n'y a dans ce contour aucun pôle et donc $I = 0$

□

Preuve. [Preuve de la formule de Perron sans terme d'erreur]

Dans un premier temps supposons $\sigma > \bar{\sigma} - c$. Dans ce cas il y a convergence absolue et uniforme, on peut donc inverser les sommes, intégrales et limites.

Soient $U, T \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-iU}^{c+iT} f(s+w) \frac{x^w}{w} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iU}^{c+iT} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{s+w}} \frac{x^w}{w} dw = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \int_{c-iU}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w}$$

Grâce au lemme, il suffit de montrer que :

1. $\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \int_{c+iT}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} = 0$
2. $\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \int_{c-i\infty}^{c-iU} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} = 0$

Soit x fixé, par intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{c+iT}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} &= -\left(\frac{x}{n}\right)^{c+iT} \frac{1}{\log \frac{x}{n}(c+iT)} + \frac{1}{\log \frac{x}{n}} \int_{c+iT}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w^2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{cT}}\right) + O\left(\frac{1}{n^c} \int_T^{+\infty} \frac{dv}{c^2 + v^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{cT}}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \int_{c+iT}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} = O\left(\frac{1}{T} \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}}\right)$$

De même :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \int_{c-iU}^{c-i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} = O\left(\frac{1}{U} \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}}\right)$$

Ce qui fini la preuve dans le cas où $\sigma > \bar{\sigma} - c$

Si $\sigma_0 - c < \sigma < \bar{\sigma} - c$:

Soit $\alpha > \bar{\sigma} - c$.

On considère l'intégrale de $f(s+w) \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w}$ le long du rectangle

$$\{c \leq \operatorname{Re}(w) \leq \alpha \quad -U \leq \operatorname{Im}(w) \leq T\}$$

Or $f(s) = O(t^{-(\sigma+c-\sigma_0)+\varepsilon})$ donc l'intégrale est tend vers 0 le long des deux segments horizontaux quand U, T s'approchent de l'infini.

Donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s+w) \frac{x^w}{w} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(s+w) \frac{x^w}{w} dw$$

La formule se déduit alors du cas précédent.

□

Remarque

En particulier, si $s = 0$, on obtient la formule

$$\sum_{n < x} a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(w) \frac{x^w}{w} dw \quad c > \sigma_0$$

Notation :

On note

$$si(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

On note $\sum'_{n \leq x}$ une somme où le dernier terme est divisé par 2 si $n = x$

Théorème 5 : Formule de Perron avec terme d'erreur

Soit $T \in \mathbb{R}$. Si $\sigma > \max(0, \bar{\sigma})$ et $x > 0$, alors

$$\sum'_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + R$$

avec

$$R = \frac{1}{\pi} \sum_{\frac{x}{2} < n < x} a_n si\left(T \log \frac{x}{n}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{x < n < 2x} a_n si\left(T \log \frac{x}{n}\right) + O\left(\frac{4^\sigma + x^\sigma}{T} \sum_n \frac{|a_n|}{n^\sigma}\right)$$

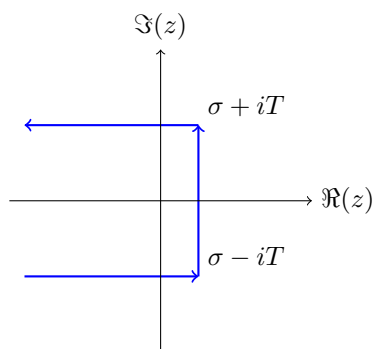
Preuve. Comme $f(s)$ est absolument convergente sur $[\sigma - iT, \sigma + iT]$, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \left(\frac{x}{s}\right)^s \frac{ds}{x}$$

Il suffit alors de montrer que, pour $\sigma > 0$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{y^\sigma}{t}\right) & y \geq 2 \\ 1 + \frac{1}{\pi} si(T \log y) + O\left(\frac{2^\sigma}{T}\right) & 1 \leq y \leq 2 \\ -\frac{1}{\pi} si(T \log \frac{1}{y}) + O\left(\frac{2^\sigma}{T}\right) & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ O\left(\frac{y^\sigma}{T}\right) & \end{cases}$$

Si $y \geq 2$, soit C le contour consistant en une horizontale de $-\infty - iT$ à $\sigma - iT$, le segment $[\sigma - iT, \sigma + iT]$ puis l'horizontale $\sigma + iT$ à $-\infty + iT$.



Le seul pôle de inclu dans ce contour est en $s = 0$ de résidu 1.
Par application du théorème des résidus,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C y^s \frac{ds}{s} = 1$$

De plus

$$\int_{-\infty \pm iT}^{\sigma \pm iT} y^z \frac{ds}{s} = \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{y^{s \pm iT}}{s \pm iT} ds \ll \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\sigma} y^s ds = \frac{y^\sigma}{T \log y} \ll \frac{y^\sigma}{T}$$

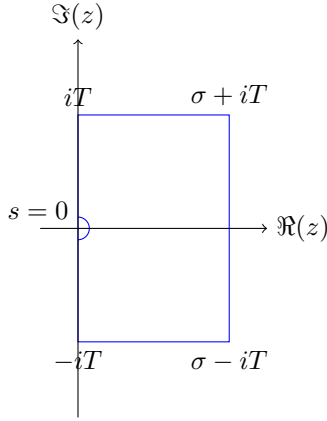
Cela montre le cas où $y \geq 2$.

On fait de même pour $y \leq \frac{1}{2}$ avec un contour C pris à droite de σ , il n'y a donc pas de résidu.

Si $1 \leq y \leq 2$, on définit un contour C comme étant le rectangle

$$\{0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma \quad -iT \leq \operatorname{Im}(s) \leq iT\}$$

et on exclut un demi-cercle de rayon ε autour de $s = 0$.



Or $s \rightarrow \frac{y^s}{s}$ est holomorphe sur C donc d'après le théorème de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C y^s \frac{ds}{s} = 0$$

Or, sur le demi cercle, on définit $s = \varepsilon e^{it}$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\text{demi-cercle}} y^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i y^{\varepsilon e^{it}} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

Notons que

$$\int_{\pm iT}^{\sigma \pm iT} y^s \frac{ds}{s} \ll \frac{1}{T} \int_0^\sigma y^s ds \leq \frac{1}{T} \int_0^\sigma 2^s ds \ll \frac{2^\sigma}{T}$$

Il ne reste alors qu'à calculer l'intégrale entre $i\varepsilon$ et iT ainsi qu'entre $-i\varepsilon$ et $-iT$ quand ε tend vers 0, ce que l'on va faire en même temps.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{i\varepsilon}^{iT} y^s \frac{ds}{s} + \int_{-iT}^{-i\varepsilon} y^s \frac{ds}{s} \right] &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^T (y^{it} - y^{-it}) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{T \log y} \frac{\sin(v)}{v} dv \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} si(T \log y) \end{aligned}$$

Ce qui montre le cas $1 \leq y \leq 2$. On effectue de la même façon pour $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ □

Corollaire 4 :

$$R \ll \sum_{\substack{n \neq x \\ \frac{x}{2} < n < 2x}} |a_n| \min\left(1, \frac{x}{T|x-n|}\right) + \frac{4^\sigma + x^\sigma}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$$

Preuve. Notons dans un premier temps que, si $x > 0$, $si(x) \ll \min(1, \frac{1}{x})$.
En effet :

$$si(x) = \frac{\cos(s)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du$$

Or,

$$\int_x^{+\infty} \frac{|\cos(u)|}{u^2} \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc, si $x > 1$

$$xsi(x) = \cos(x) + O(1) \ll 1 \longrightarrow si(x) \ll \frac{1}{x}$$

C'est pourquoi

$$si(T|\log \frac{n}{x}|) \ll \min(1, \frac{1}{T|\log \frac{n}{x}|})$$

Cependant, $\frac{n}{x} = 1 + \frac{(n-x)}{x}$ et $|\log(1+\delta)| \sim \delta$ pour $\frac{-1}{2} \leq \delta \leq 1$.

Donc

$$si(T|\log \frac{n}{x}|) \ll \min(1, \frac{1}{T|x-n|}) \quad \text{si } \frac{x}{2} \leq n \leq 2x$$

□

Retour sur le Théorème 2

Preuve. [Preuve du Théorème 2]

On applique le Théorème 5 à la fonction ψ donc

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p^k \leq x} \log p \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \sum_{k \geq 1} \sum_{p \text{ premier}} \frac{\log p}{p^{ks}} \frac{x^s}{s} ds + R \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + R \end{aligned}$$

avec

$$R \ll \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \Lambda(n) \min(1, \frac{x}{T|x-n|}) - \frac{(4x)^{\sigma_0}}{T} \frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}$$

□

Chapitre 4

Théorème des nombres premiers

4.1 Zone sans zéro

On sait déjà que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. On veut montrer l'existence d'une zone autour de 1 tel que ζ ne s'annule pas dans cette zone, c'est à dire l'existence d'une fonction $\delta(s)$ telle que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \delta(s)$.

Lemme 3 : Inégalité de Jensen

Soit $R > 0$, f une fonction holomorphe sur G tel que $\overline{D(0, R)} \subset G$. De plus, si il existe $M \geq 0$, $|f(z)| \leq M$ dans $D(0, R)$ et si $f(0) \neq 0$, alors pour tout $r < R$, le nombre de zéros de f dans $D(0, R)$ est inférieur à $\frac{\log(M/|f(0)|)}{\log(R/r)}$

Preuve. Notons $z_1, z_2, \dots, z_K$ les zéros de f dans le disque $|z| \leq R$. Comme f est holomorphe, on sait qu'il y en a un nombre fini.

Notons

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^K \frac{R^2 - z\bar{z}_i}{R(z - z_i)}$$

g possède des poles en les zéros de f .

Si $|z| = R$, $|g(z)| = |f(z)| \leq M$.

g est méromorphe sur $\overline{D(0, R)}$ donc par le principe du maximum, $|g(0)| \leq M$.

Or, $|g(0)| = |f(0)| \prod_{i=1}^K \frac{R}{|z_i|} \geq |f(0)| \left(\frac{R}{r}\right)^K$

Donc $|f(0)| \left(\frac{R}{r}\right)^K \leq M$.

Finalement

$$K \leq \frac{\log(M/|f(0)|)}{\log(R/r)}$$

□

Lemme 4 : Borel-Carathéodory

Soit $R > 0$, f une fonction holomorphe sur G tel que $\overline{D(0, R)} \subset G$. Si $f(0) = 0$ et $\operatorname{Re}(f) \leq M$ pour $z \in \overline{D(0, R)}$. Alors, pour $|z| \leq r < R$, alors

$$|f(z)| \leq \frac{2Mr}{R-r} \quad |f'(z)| \leq \frac{2MR}{(R-r)^2}$$

Preuve. Si on arrive à montrer que

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{2M}{R^k} \quad \forall k \geq 1$$

Alors, par holomorphie de f ,

$$|f(z)| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^k \leq 2M \sum_{k \geq 1} \left(\frac{r}{R}\right)^k = \frac{2Mr}{R-r}$$

$$|f'(z)| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} k r^{k-1} \leq \frac{2M}{R} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} k = \frac{2MR}{(R-r)^2}$$

Montrons alors que

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{2M}{R^k} \quad \forall k \geq 1$$

Dans un premier temps, d'après la formule de Cauchy,

$$\int_0^1 f(Re(\theta)) d\theta = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD(0,R)} f(z) \frac{dz}{z} = f(0) = 0$$

De plus, si $k > 0$,

$$\int_0^1 f(Re(\theta)) e^{k\theta} d\theta = \frac{R^{-k}}{2i\pi} \int_{bD(0,R)} f(z) z^{k-1} dz = 0$$

et

$$\int_0^1 f(Re(\theta)) e^{-k\theta} d\theta = \frac{R^k}{2i\pi} \int_{bD(0,R)} f(z) z^{-k-1} dz = \frac{R^k f^{(k)}(0)}{k!} \quad (\text{Formule de Cauchy})$$

Donc, $\forall \Phi \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(Re(\theta)) (1 + \cos(2\pi(k\theta + \Phi))) d\theta = \frac{R^k e^{-\Phi} f^{(k)}(0)}{2k!}$$

Finalement

$$Re\left(\frac{1}{2} R^k e^{-\Phi} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right) \leq M \int_0^1 (1 + \cos(2\pi(k\theta + \Phi))) d\theta = M$$

On choisit Φ tel que $Re(e^{-\Phi} f^{(k)}(0)) = |f^{(k)}(0)|$

D'où

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{2M}{R^k} \quad \forall k \geq 1$$

□

Lemme 5 :

Soit f une fonction holomorphe sur G tel que $\overline{D(0,1)}$. Si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \overline{D(0,1)}$ $|f(z)| \leq M$ et $f(0) \neq 0$ alors pour r et R fixés tels que $0 < r < R < 1$, pour $|z| \leq r$ on a

$$\frac{f'}{f}(z) = \prod_{i=1}^K \frac{1}{z - z_i} + O\left(\log\left(\frac{M}{|f(0)|}\right)\right)$$

où $z_1, \dots, z_K$ sont les zéros de f dans $\overline{D(0, R)}$

Preuve. Supposons que f n'a pas de zéros sur le cercle $|z| = R$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer R par $R + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$.

Posons maintenant $g(z) = f(z) \prod_{i=1}^K \frac{R^2 - z\bar{z}_i}{R(z - z_i)}$

D'après le Lemme 3,

$$K \leq \frac{\log(M/|f(0)|)}{\log(R/r)} \ll \log\left(\frac{M}{|f(0)|}\right)$$

Si $|z| = R$, $|g(z)| = |f(z)|$ donc $|g(z)| \leq M$. D'après le principe du maximum, $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $|z| \leq R$. De plus,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{i=1}^K \frac{R}{|z_i| \geq |f(0)|}$$

g est construit de manière à n'avoir aucun zéros dans $\overline{D(0, R)}$, nous pouvons donc définir $h(z) = \log \frac{g(z)}{g(0)}$.

Alors $h(0) = 0$ et $\operatorname{Re}(h(z)) \leq \log M - \log |f(0)|$ pour $|z| \leq R$.

D'après le Lemme 4,

$$h'(z) \ll \log \frac{M}{|f(0)|} \quad \text{pour } |z| \leq r \quad (4.1)$$

Or,

$$h'(z) = \frac{g'}{g}(z) = \frac{f'}{f}(z) - \sum_{i=1}^K \frac{1}{z - z_i} + \sum_{i=1}^K \frac{1}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_i}} \quad (4.2)$$

Cependant, $|\frac{R^2}{\bar{z}_i}| \geq R$ donc, si $|z| \leq r$, $|z - \frac{R^2}{\bar{z}_i}| \geq R - r$.

C'est pourquoi

$$\sum_{i=1}^K \left| \frac{1}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_i}} \right| \leq \frac{K}{R - r} \ll \log \frac{M}{|f(0)|} \quad (4.3)$$

On combine (4.1), (4.2), (4.3) et on obtient donc

$$\frac{f'}{f}(z) = \prod_{i=1}^K \frac{1}{z - z_i} + O\left(\log\left(\frac{M}{|f(0)|}\right)\right)$$

□

Lemme 6 :

Si $|t| \geq \frac{7}{8}$ et $\frac{5}{6} \leq \sigma \leq 2$, alors

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \frac{1}{s - \rho} + O(\log \tau)$$

où $\tau = |t| + 4$ et ρ désigne les zéros de ζ tels que $|\rho - (\frac{3}{2} + it)| \leq \frac{5}{6}$

Preuve. Appliquon le Lemme 5 à $f(z) = \zeta(z + (\frac{3}{2} + it))$ avec $R = \frac{5}{6}$ et $r = \frac{2}{3}$.
Notons que

$$|f(0)| = |\zeta(\frac{3}{2} + it)| = \left| \prod_{p \text{ premier}} (1 + p^{-(\frac{3}{2} + it)})^{-1} \right| \gg 1$$

et $f(z) \ll \tau$ pour $|z| \leq 1$ d'après la Propriété 6. □

Lemme 7 :

Si $\sigma > 1$, alors

$$\operatorname{Re} \left(-3 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right) \geq 0$$

Preuve. D'après la Propriété 7,

$$\operatorname{Re} \left(-3 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right) = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-1-\delta} (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n))$$

Il suffit donc de remarquer que $3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0$ pour tout θ . □

Théorème 6 : Zone sans zéro

Il existe $c > 0$ tel que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log \tau}$

Preuve. Si $\sigma \geq 1$, le Théorème 1 permet de conclure.

Si $\sigma \leq 1$:

D'après le Corollaire 2, pour $\sigma > 0$,

$$|\zeta(s) - \frac{s}{s-1}| \leq |s| \int_1^{+\infty} u^{-\sigma-1} du = \frac{|s|}{\sigma}$$

Donc $\zeta(s) \neq 0$ si $\sigma > |s-1|$, c'est à dire $\sigma > \frac{1+t^2}{2}$. En particulier, $\zeta(s) \neq 0$ pour $\frac{8}{9} \leq \sigma \leq 1$ et $|t| \leq \frac{7}{8}$.

Supposons que $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ est un zéro de ζ tel que $\frac{5}{6} \leq \beta_0 \leq 1$ et $|\gamma_0| \geq \frac{7}{8}$. Or, si ρ est un zéro de ζ , alors $\operatorname{Re}(\rho) \leq 1$ donc, si $\sigma > 1$, $\operatorname{Re}(\frac{1}{s-\rho}) > 0$.

Donc, d'après le Lemme 6, en prenant $s = 1 + \delta + i\gamma_0$ avec $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \delta + i\gamma_0) \right) &= -\operatorname{Re} \left(\sum_{\rho} \frac{1}{1 + \delta + i\gamma_0 - \rho} + O(\log \tau) \right) \\ &= -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \delta - \beta_0} \right) - \operatorname{Re} \left(\sum_{\rho \neq \rho_0} \frac{1}{1 + \delta + i\gamma_0 - \rho} \right) + c_1 \log(|\gamma| + 4) \quad c_1 > 0 \end{aligned}$$

Or, $-Re(\frac{1}{s-\rho}) \leq 0$ donc

$$-Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\delta+i\gamma_0)\right) \leq -\frac{1}{1+\delta-\beta_0} + c_1 \log(|\gamma_0|+4) \quad (4.4)$$

De même, si $s = 1 + \delta + 2i\gamma_0$,

$$-Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\delta+2i\gamma_0)\right) \leq c_1 \log(2|\gamma_0|+4) \quad (4.5)$$

D'après la Propriété 6,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\delta) = \frac{1}{\delta} + O(1) \quad (4.6)$$

Donc, en combinant les résultats (4.4), (4.5), (4.6) et le Lemme 7,

$$\begin{aligned} -Re\left(3\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\delta) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\delta+i\gamma_0) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1+\delta+2i\gamma_0)\right) &\geq 0 \\ \frac{3}{\delta} - \frac{4}{1+\delta-\beta_0} + c_2 \log(|\gamma_0|+4) &\geq 0 \quad c_2 > 0 \end{aligned}$$

Prenons alors $\delta = \frac{1}{2c_2 \log(|\gamma_0|+4)}$. On obtient

$$\begin{aligned} 7c_2 \log(|\gamma_0|+4) &\geq \frac{4}{1+\delta-\beta_0} \\ 1 + \frac{1}{2c_2 \log(|\gamma_0|+4)} - \beta_0 &\geq \frac{4}{7c_2 \log(|\gamma_0|+4)} \end{aligned}$$

Donc

$$1 - \beta_0 \geq \frac{14}{c_2 \log(|\gamma_0|+4)}$$

Or, $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$.

Finalement

$$\sigma = \beta_0 \geq 1 - \frac{c}{\log \tau} \text{ avec } c = \frac{1}{14c_2} > 0$$

□

Propriété 8 :

Soit c la constante du Théorème précédent. Si $\sigma > 1 - \frac{c}{2\log \tau}$ et $|t| \geq \frac{7}{8}$, alors

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \log \tau$$

Preuve. Si $\sigma > 1$, par inégalité triangulaire et d'après la Proposition 6,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma-1} \quad (4.7)$$

Si $\sigma \geq 1 + \frac{1}{\log \tau}$, le résultat est immédiat.

Soit $s_1 = 1 + \frac{1}{\log \tau} + it$. D'après (4.7), il vient

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s_1) \ll \log \tau \quad (4.8)$$

Alors, d'après le Lemme 6

$$\sum_{\rho} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s_1 - \rho} \right) \ll \log \tau \quad (4.9)$$

Avec ρ tels que $|\rho - (\frac{3}{2} + it)| \leq \frac{5}{6}$.

Soit σ tel que $1 - \frac{c}{2 \log \tau} \leq \sigma \leq 1 + \frac{1}{\log \tau}$. Alors d'après le Lemme 6,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s_1) = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{s_1 - \rho} \right) + O(\log \tau) \quad (4.10)$$

Or $s - \rho \sim s_1 - \rho$ donc $\frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{s_1 - \rho} \ll \frac{1}{|s_1 - \rho|^2 \log \tau} \ll \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s_1 - \rho} \right)$.

En combinant ce dernier résultat avec (4.8), (4.9) et (4.10) on obtient finalement le résultat attendu. $\square$

4.2 Théorème des nombres premiers

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le Théorème des nombres premiers. La démonstration va exploiter le lien entre la fonction ζ et ψ énoncé dans le Théorème 2. On va utiliser les différents outils que l'on vient de créer, principalement la zone sans zéro et la formule de Perron.

Théorème 7 : Théorème des nombres premiers

Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x + O \left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})} \right) \\ \theta(x) &= x + O \left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})} \right) \\ \pi(x) &= li(x) + O \left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})} \right) \end{aligned}$$

Avec $li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log u} du$

Remarque

En faisant K intégrations par partie successives,

$$li(x) = x \sum_{k=1}^{K-1} \frac{(k-1)!}{(\log x)^k} + O \left(\frac{x}{(\log x)^K} \right)$$

Alors

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \dots + O \left(\frac{x}{(\log x)^K} \right)$$

Preuve. Soit $\sigma_0 > 1$. D'après le Théorème 2 (Formule de Perron avec terme d'erreur appliquée à $\frac{\zeta'}{\zeta}$), on a la formule

$$\psi(x) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + R \quad (4.11)$$

Avec

$$R \ll \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \Lambda(n) \min\left(1, \frac{x}{T|x-n|}\right) - \frac{(4x)^{\sigma_0}}{T} \frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \quad (4.12)$$

Or, pour $1 < \sigma_0 < 2$, $-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) \sim \frac{1}{\sigma_0-1}$.

On va maintenant chercher à estimer la somme dans (4.12).

Dans un premier temps, remarquons que $\Lambda(n) \leq \log n \ll \log x$. Pour $n = [x]$, on choisit $\min(1, \frac{x}{T|x-n|}) = 1$ et pour toutes les autres valeurs de n on choisit $\min(1, \frac{x}{T|x-n|}) = \frac{x}{T|x-n|}$. Alors,

$$\sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \Lambda(n) \min\left(1, \frac{x}{T|x-n|}\right) \ll (\log x) \left(1 + \frac{x}{T} \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k}\right) \ll \log x + \frac{x}{T} (\log x)^2$$

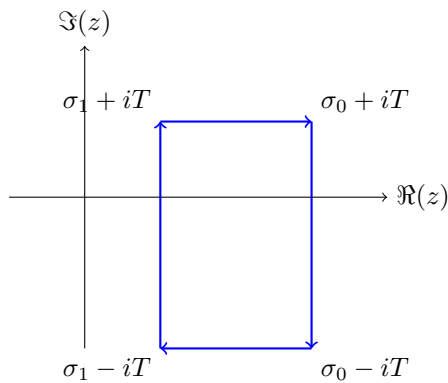
En effet, par concavité du logarithme $\log x \geq \sum_{1 \leq k \leq x} \log' k$.

Prenons maintenant $2 \leq T \leq x$ et $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{\log x}$. On a donc

$$R \ll \log x + \frac{x}{T} (\log x)^2 - 4^{\sigma_0} \log x$$

$$R \ll \frac{x}{T} (\log x)^2$$

Notons $\sigma_1 = 1 - \frac{c}{\log T}$ avec $0 < c \ll 1$. Soit C le contour défini par le rectangle de sommet $\sigma_0 - iT$, $\sigma_0 + iT$, $\sigma_1 + iT$, $\sigma_1 - iT$.



D'après le Théorème 6 (c'est à dire l'existence d'une zone sans zéro), avec un choix judicieux de c , $\frac{\zeta'}{\zeta}$ possède un seul pôle simple en $s = 1$ de résidu -1 dans ce contour. De plus $\frac{\zeta'}{\zeta}$ est méromorphe dans ce contour donc par le théorème des résidus

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds = x \quad (4.13)$$

Si c est suffisamment petit on peut appliquer la Propriété 8 et on obtient

$$-\int_{\sigma_0+iT}^{\sigma_1+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{\log T}{T} x^{\sigma_0} (\sigma_0 - \sigma_1) \ll \frac{x}{T} \quad (4.14)$$

Il vient de même que

$$-\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_0-iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{x}{T} \quad (4.15)$$

En utilisant de nouveau la Propriété 8, on trouve que

$$\begin{aligned} -\int_{\sigma_1+iT}^{\sigma_1-iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds &\ll x^{\sigma_1} (\log T) \int_{-T}^T \frac{dt}{1+|t|} + x^{\sigma_1} \int_{-1}^1 \frac{dt}{|\sigma_1+it-1|} \\ &\quad - \int_{\sigma_1+iT}^{\sigma_1-iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll x^{\sigma_1} (\log T)^2 + \frac{x^{\sigma_1}}{1-\sigma_1} \ll x^{\sigma_1} (\log T)^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Or $\sigma_1 = 1 - \frac{c}{\log T}$ donc $x^{\sigma_1-1} = x^{-\frac{c}{\log T}}$. En combinant (4.13), (4.14), (4.15) et (4.16) on obtient finalement

$$\psi(x) = x + O\left(x(\log x)^2 \left(\frac{1}{T} + x^{-\frac{c}{\log T}}\right)\right)$$

On choisit $T = \exp(\sqrt{c \log x})$ donc

$$x(\log x)^2 \left(\frac{1}{T} + x^{-\frac{c}{\log T}}\right) \ll x(\log x)^2 \exp(-\sqrt{c \log x}) \ll x \exp(-c\sqrt{\log x})$$

Ce qui donne bien

$$\psi(x) = x + O\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right)$$

Grâce à la Propriété 2 on retrouve

$$\theta(x) = x + O\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right)$$

La Propriété 1 nous permet d'affirmer que

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log u} d\theta(u) = li(x) + \int_2^x \frac{1}{\log u} d(\theta(u) - u)$$

Par intégration par partie

$$\int_2^x \frac{1}{\log u} d(\theta(u) - u) = \left[\frac{\theta(u) - u}{\log u} \right]_2^x + \int_2^x \frac{\theta(u) - u}{u(\log u)^2} du \ll x \exp(-c\sqrt{\log x})$$

C'est pourquoi

$$\pi(x) = li(x) + O\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right)$$

□

Chapitre 5

Utilité de l'équation fonctionnelle

On cherche maintenant à établir une méthode pour compter d'autres choses. Par exemple, exploiter l'équation fonctionnelle pour Zêta permet de compter les entiers. Cette méthode permet d'avoir des résultats plus intéressants comme estimer la somme des diviseurs d'un entier n ou de ses puissances k^{eme} ou encore avoir le comportement asymptotique des L-fonctions.

5.1 Motivation

En exploitant les propriétés de Zêta, et notamment du lien entre Zêta et les nombres premiers, nous avons pu établir le théorème des nombres premiers. Cependant, l'équation fonctionnelle n'a pas été exploitée, il est alors légitime de se demander quelle est son utilité. C'est donc ce que l'on va essayer de faire maintenant.

En utilisant la formule de Perron on sait que

$$\sum'_{1 \leq n < x} 1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{Re(s)=2} \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds$$

Soit $\varepsilon > 0$, on bouge la droite d'intégration vers $(-\varepsilon)$. Cela est justifié par la croissance ζ . De part les pôles en $s = 1$ et $s = 0$, on obtient alors

$$\sum'_{n \leq x} 1 = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2i\pi} \int_{(-\varepsilon)} \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds$$

On exploite l'équation fonctionnelle de Zêta, on obtient alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(-\varepsilon)} \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2i\pi} \int_{(-\varepsilon)} \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \zeta(1-s) \frac{x^s}{s} ds$$

Or, en $1-s$, ζ converge absolument. On peut donc inverser somme et intégrale et on obtient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(-\varepsilon)} \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_{(-\varepsilon)} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \frac{(\pi n x)^s}{s} ds$$

On note $y = \pi n x$ et alors

$$\begin{aligned}
\int_{(-\varepsilon)} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \frac{y^s}{s} ds &= \int_{(-\varepsilon)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(s)} \frac{y^{2s}}{s} ds \\
&= \int_{(-\varepsilon)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(s+1)} y^{2s} ds \\
&= - \int_{(\varepsilon)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}{\Gamma(1-s)} y^{-2s} ds \\
&= -y \int_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{3}{2}-s)} y^{-2s} ds \\
&= -y^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(2y) \\
&= -\pi^{-\frac{1}{2}} \sin(2y) \quad (\text{d'après [7]})
\end{aligned}$$

Alors, en combinant les résultats obtenus, on trouve que

$$\sum'_{n \leq x} 1 = x + O(1)$$

Ce résultat est quelque chose de bien connu mais la méthode utilisée donne le bon résultat. On va donc chercher à la généraliser.

5.2 Notations

Définition 6 :

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ non exactement nulles. Soient $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites strictement croissantes de $\mathbb{N}$.

On définit les deux séries de Dirichlet suivantes :

1. $\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$
2. $\psi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\mu_n^s}$

On appelle alors équation fonctionnelle l'équation suivante :

$$\Delta(s)\varphi(s) = \Delta(\delta - s)\psi(\delta - s)$$

Avec $\delta \in \mathbb{R}$ et $\Delta(s) = \prod_{i=1}^N \Gamma(\alpha_i + \beta_i)$ où $\beta_i \in \mathbb{C}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$.

On note $A = \sum_{i=1}^N \alpha_i$

Soit $\rho \in \mathbb{Z}$, on note les moyennes des coefficients de φ et ψ comme étant :

1. $A_\lambda^\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum'_{\lambda_n \leq x} a_n (x - \lambda_n)^\rho$
2. $B_\mu^\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum'_{\mu_n \leq x} b_n (x - \mu_n)^\rho$

Définition 7 : Fonctions de Bessel

On appelle fonctions de Bessel les solutions de l'équation $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$. On les note $J_\nu(s)$ et $Y_\nu(s)$. D'après [5], on a les formules suivantes : Soit $\nu \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$- J_\nu(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+\nu} [\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
- \pi Y_n(s) &= 2[\gamma + \log \frac{s}{2}] J_n(s) - \sum_{m=0}^{n-1} (\frac{s}{2})^{2m-n} \frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(m+1)} \\
&\quad - \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (\frac{s}{2})^{n+2m} (h_{m+n} + h_m) (\Gamma(n+m+1) \Gamma(m+1))^{-1} \\
&\quad \text{Avec } h_m = 1^{-1} + 2^{-1} + \dots + m^{-1} \text{ et } h_0 = 0. \gamma \text{ désigne la constante d'Euler.} \\
- Y_\nu(s) &= [\sin(\nu\pi)]^{-1} [J_\nu(s) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(s)]
\end{aligned}$$

On a également, pour $x \rightarrow +\infty$ et pour tout complexe ν , les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
- Y_\nu(x) &= (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}} \left[\sin(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi) + O(\frac{1}{x}) \right] \\
- J_\nu(x) &= (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}} \left[\cos(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi) + O(\frac{1}{x}) \right]
\end{aligned}$$

Propriété 9 :

D'après [5] et [6], pour $\alpha \in \mathbb{C}$, nous avons les formules suivantes :

1. $|\Gamma(x + iy)| \underset{+\infty}{\sim} \exp(-\frac{1}{2}\pi y) |y|^{x-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\nu-1} \sin(\alpha t) dt = \frac{\Gamma(\nu)}{2i} [(s - i\alpha)^{-\nu} - (s + i\alpha)^{-\nu}]$ pour $Re(\nu) > -1$ et $Re(s) > |Im(\alpha)|$.
3. $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\nu-1} \cos(\alpha t) dt = \frac{\Gamma(\nu)}{2} [(s + i\alpha)^{-\nu} + (s - i\alpha)^{-\nu}]$ pour $Re(\nu) > 0$ et $Re(s) > |Im(\alpha)|$.
4. $\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{s-\nu-1} \Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\nu-\frac{s}{2}+1)} x^{-s} ds = \frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$ pour $0 < c < Re(\nu+1)$ et $Re(\nu) > 0$.

Définition 8 : ρ -eme différentielle finie

Si $y > 0$ et $\rho \in \mathbb{Z}$, on définit la ρ -eme différentielle finie d'une fonction F par

$$\Delta_y^\rho F(x) = \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} F(x + \nu y)$$

Si F possède ρ dérivées alors

$$\Delta_y^\rho F(x) = \int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{\rho-1}}^{t_{\rho-1}+y} F^{(\rho)}(t_\rho) t_\rho$$

Où $F^{(\rho)}$ est la dérivée à l'ordre ρ de F .

5.3 Théorème principal

Lemme 8 :

Soient $\rho \in \mathbb{Z}$, $\rho \gg 1$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4A}$ et $c = \frac{A\delta+\rho}{2A} - \varepsilon$. Alors

$$A_\lambda^\rho(x) - S_\rho^c(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\rho+1+\delta-s)\Delta(\delta-s)} \psi(s) x^{\delta+\rho-s} ds$$

Où $S_\rho^c = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\Gamma(s)\varphi(s)}{\Gamma(s+\rho+1)} x^{s+\rho} ds$ et C est un contour englobant les singularités de φ dans $\delta - c < \sigma < c$ et on suppose que toutes les singularités de φ sont dans cette zone.

Preuve. Soient α et β tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \lambda_n^{-\alpha} < +\infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \lambda_n^{-\alpha} < +\infty$. On suppose ρ assez grand pour que $c > \alpha$ et $c > \beta$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$ arbitrairement grand. Par la formule de Perron, on a

$$A_\lambda^{\rho+m}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s)\varphi(s)}{\Gamma(s+\rho+1+m)} x^{s+\rho+m} ds$$

On applique le changement de variable $s \rightarrow \delta - s$ et on applique l'équation fonctionnelle :

$$A_{\lambda}^{\rho+m}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)\psi(s)}{\Gamma(\rho+m+1+\delta-s)\Delta(\delta-s)} x^{\delta+\rho+m-s} ds + S_{\rho+m}^c(x)$$

avec $S_{\rho+m}^c(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\rho+m}} \frac{\Gamma(s)\varphi(s)}{\Gamma(s+\rho+1+m)} x^{s+\rho+m} ds$ où $C_{\rho+m}$ englobe toutes les singularités de φ en supposant c et m assez grand.

De plus, $\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\rho+1+\delta-s)\Delta(\delta-s)} \psi(s) x^{\delta+\rho-s} ds$ converge bien d'après la Propriété 9. $\square$

Lemme 9 :

Soient $\nu \in \mathbb{N}$, $\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N (\beta_{\nu} - \frac{1}{2})$ et $c > \max(-\operatorname{Re}(\frac{\mu}{A}), -\operatorname{Re}(\frac{\beta_{\nu}}{\alpha_{\nu}})$.

On note $I(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\rho+1+\delta-s)\Delta(\delta-s)} x^{\delta+\rho-s} ds$. Alors

$$I(x) = O\left(x^{[A\delta+(2A-1)\rho-\frac{1}{2}]/2A}\right) + O\left(x^{\rho-\nu_{\rho}}\right)$$

Avec $\nu_{\rho} \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\rho-A\delta}{2A} \leq \nu_{\rho} < \frac{\rho-A\delta}{2A} + 1$.

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_m(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(s) x^{\delta+\rho+m-s} ds$$

Avec

$$G(s) = \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\rho+m+1+\delta-s)\Delta(\delta-s)}$$

Or, d'après [6],

$$\log(z + \alpha) = (z + \alpha - \frac{1}{2}) \log(z) - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Donc :

$$\log\left(\frac{\Gamma(\delta-s)}{\Gamma(\rho+m+1+\delta-s)}\right) = -(\rho+m+1) \log(-s) + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\Gamma(\alpha_{\nu}s + \beta_{\nu})}{\Gamma(\alpha_{\nu}\delta + \alpha_{\nu}s + \beta_{\nu})}\right) &= (\alpha_{\nu} + \beta_{\nu} - \frac{1}{2}) \log(s) - (\alpha_{\nu}\delta - \alpha_{\nu}s + \beta_{\nu} - \frac{1}{2}) \log(-s) + \log(\alpha_{\nu})(2\alpha_{\nu}s - \alpha_{\nu}\delta) \\ &\quad - 2\alpha_{\nu}s + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\log(G(s)) - \log\left(\frac{\Gamma(As + \mu)}{\Gamma(\lambda - As)} e^{\Phi s}\right) = B + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

Où

- $\lambda = \mu + A\delta + \rho + m + 1$
- $\Phi = 2 \left(\sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} \log(\alpha_{\nu}) - A \log(A) \right)$
- $B = \delta \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} \log(\alpha_{\nu}) + (A\delta + \rho + m + 1) \log(A)$

On pose maintenant

$$H(s) = \frac{\Gamma(As + \mu)}{\Gamma(\lambda - As)} e^{B + \Phi s}$$

Alors

$$I_m(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H(s) x^{\delta+\rho+m-s} ds + \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [G(s) - H(s)] x^{\delta+\rho+m-s} ds$$

Or

$$G(s) - H(s) = H(s) O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [G(s) - H(s)] x^{\delta+\rho+m-s} ds &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H(s) O\left(\frac{1}{|s|}\right) x^{\delta+\rho+m-s} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c+\frac{1}{2A}-i\infty}^{c+\frac{1}{2A}+i\infty} H(s) O\left(\frac{1}{|s|}\right) x^{\delta+\rho+m-s} ds + R \end{aligned}$$

Où R est le possible résidu en $s = \delta + \nu_{\rho+m}$. $R = O(x^{\rho+m-\nu_{\rho+m}})$.

De plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{c+\frac{1}{2A}-i\infty}^{c+\frac{1}{2A}+i\infty} H(s) O\left(\frac{1}{|s|}\right) x^{\delta+\rho+m-s} ds &= O(x^{\delta+\rho+m-c-\frac{1}{2A}}) \\ &= O\left(x^{[A\delta+(2A-1)\rho-\frac{1}{2}]/2A}\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi calculer explicitement $\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H(s) x^{\delta+\rho+m-s} ds$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H(s) x^{\delta+\rho+m-s} ds &= \frac{1}{2i\pi} e^{B+\Phi(\delta+\rho+m)} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(As + \mu)}{\Gamma(\lambda - As)} (xe^{-\Phi})^{\delta+\rho+m-s} ds \\ &= A_1 \frac{1}{2i\pi} \int_{Ac-i\infty}^{Ac+i\infty} \frac{\Gamma(z + \mu)}{\Gamma(\lambda - z)} y^{\delta+\rho+m-\frac{z}{A}} dz \quad \text{où } As = z, A_1 > 0 \text{ et } xe^{-\Phi} = y \\ &= A_1 \frac{1}{2i\pi} \int_{Ac+\mu-i\infty}^{Ac+\mu+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\lambda + \mu - s)} y^{\delta+\rho+m+\frac{\mu}{A}-\frac{s}{A}} ds \quad \text{où } z + \mu = s \\ &= A_1 \frac{1}{2i\pi} y^{\delta+\rho+m+\frac{\mu}{A}} \int_{Ac+\mu-i\infty}^{Ac+\mu+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\lambda + \mu - s)} \left(y^{\frac{1}{2A}}\right)^{-2s} ds \\ &= A_1 y^{[A\delta+(2A-1)(\rho+m)]/2A} J_{2\mu+A\delta+\rho+m} \left(2y^{\frac{1}{2A}}\right) \end{aligned}$$

En combinant les résultats obtenus on trouve alors, en prenant $m=0$,

$$I(x) = O\left(x^{[A\delta+(2A-1)\rho-\frac{1}{2}]/2A}\right) + O\left(x^{\rho-\nu_{\rho}}\right)$$

□

Théorème 8 :

Supposons que l'équation fonctionnelle est vérifiée avec $\delta > 0$. Si $\forall \rho > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $[A\delta + (2A - 1)(\rho + m) - \frac{1}{2}]/2A > \rho + m - \nu_{\rho+m}$. Si les seules singularités de φ sont des pôles. Alors, $\forall \eta \geq 0$,

$$A_\lambda^0(x) - Q_0(x) = O\left(x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + 2A\eta u}\right) + O\left(x^{q - \frac{1}{2A} - \eta} \log^{r-1}(x)\right) + O\left(\sum_{x < \lambda_n \leq x'} |a_n|\right)$$

Avec

- $Q_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{\Gamma(s)\varphi(s)}{\Gamma(s+1)} x^s ds$ et C_0 englobe les singularités à droite de $\sigma = -1 - k$ avec $k > |\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}|$
 - $x' = x + O\left(x^{1-\eta-\frac{1}{2A}}\right)$
 - q est le maximum des parties réelles des singularités de φ
 - r est l'ordre maximum des singularités de partie réelle q
 - $u = \beta - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}$ avec β tel quel $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \mu_n^{-\beta} < +\infty$
- De plus, si $a_n \geq 0$ pour tout n ,

$$A_\lambda^0(x) - Q_0(x) = O\left(x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + 2A\eta u}\right) + O\left(x^{q - \frac{1}{2A} - \eta} \log^{r-1}(x)\right)$$

En choisissant $\eta = \frac{q - \frac{1}{4A} - \frac{\delta}{2}}{2A\beta - A\delta + \frac{1}{2}}$, on obtient

$$A_\lambda^0(x) - Q_0(x) = O\left(x^{[\delta(-Aq+1) + \beta(2Aq-1) - \frac{1}{2q}]/[2A\beta - A\delta + \frac{1}{2}]} \log^{r-1}(x)\right) + O\left(\sum_{x < \lambda_n \leq x'} |a_n|\right)$$

Preuve. Soit $\rho \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. On peut donc écrire, d'après le Lemme 8

$$A_\lambda^\rho(x) - S_\rho^c(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\rho+1+\delta-s)\Delta(\delta-s)} \psi(s) x^{\delta+\rho-s} ds$$

On note

$$I(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\rho+1+\delta-s)\Delta(\delta-s)} x^{\delta+\rho-s} ds$$

On change les bornes d'intégration de I vers un contour C' définie par la droite $\sigma = c_0 + it$ avec $|t| > R$ complété par les cotés du rectangle de sommets $c_0 - iR$, $c_0 + r - iR$, $c_0 + r + iR$ et $c_0 + iR$. On suppose que r et R sont choisis de telle manière que l'intégralité des pôles de l'intégrande à l'intérieur du contour initial soient compris dans le nouveau contour.

On différencie I sur ce nouveau contour et on a

$$I^{(\rho)}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} g(s) x^{\delta-s} ds$$

Avec

$$g(s) = \frac{\Gamma(\delta-s)\Delta(s)}{\Gamma(\delta+1-s)\Delta(\delta-s)}$$

Afin d'évaluer cette intégrale nous allons procéder de la même manière que durant le Lemme 9 et donc nous reprenons les différentes notations :

- $\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N (\beta_\nu - \frac{1}{2})$
- $\lambda = \mu + A\delta + \rho + m + 1$
- $\Phi = 2 \left(\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu \log(\alpha_\nu) - A \log(A) \right)$
- $B = \delta \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu \log(\alpha_\nu) + (A\delta + \rho + m + 1) \log(A)$

Et on introduit

$$h(s) = \frac{\Gamma(As + \mu)}{\Gamma(\lambda - As)} e^{B + \Phi s}$$

Alors

$$I^{(\rho)}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} h(s) x^{\delta-s} ds + \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} [g(s) - h(s)] x^{\delta-s} ds$$

D'après la Propriété 9, $|\Gamma(z)| \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$. C'est pourquoi

$$\frac{\Gamma(\delta - s)}{\Gamma(\delta + 1 - s)} \sim \frac{e}{s} \quad \frac{\Gamma(\delta - As)}{\Gamma(As + \mu)} \sim C \exp([A(\delta - 2s) + 1] \log(s)) \exp(-[A(\delta - 2s) + 1]) \quad C \in \mathbb{R}$$

Donc

$$|s| \left| \frac{g(s)}{h(s)} - 1 \right| \sim C \exp(A\delta |\log(s)| - A\delta - \beta - K|s|) \rightarrow 0 \quad K \in \mathbb{R}$$

C'est pourquoi

$$g(s) - h(s) = h(s) O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

Or $0 < \varepsilon < \frac{1}{4A}$ et $-\frac{\mu}{A}$ est à droite de la courbe $(C' + \frac{1}{2A})$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} [g(s) - h(s)] x^{\delta-s} ds &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C' + \frac{1}{2A}} h(s) O\left(\frac{1}{|s|}\right) x^{\delta-s} ds \\ &= O\left(x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2A} + \varepsilon}\right) \\ &= O\left(x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}}\right) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{C'} h(s) x^{\delta-s} ds &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{\Gamma(As + \mu)}{\Gamma(\lambda - As)} x^{\delta-s} e^{B+\Phi s} ds \\
&= \frac{1}{2i\pi} e^{B-\Phi\delta} \int_{C'} \frac{\Gamma(As + \mu)}{\Gamma(\lambda - As)} (xe^{-\Phi})^{\delta-s} ds \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{AC'} \frac{\Gamma(z + \mu)}{\Gamma(\lambda - z)} y^{\delta-\frac{z}{A}} dz \\
&= A_1 \frac{1}{2i\pi} \int_{AC'+\mu} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\lambda + \mu - s)} y^{\delta-\frac{s+\mu}{A}} ds \\
&= A_1 \frac{1}{2i\pi} y^{\delta+\frac{\mu}{A}} \int_{AC'+\mu} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\lambda + \mu - s)} \left(y^{\frac{1}{2A}}\right)^{-2s} ds \\
&= A_2 x^{\frac{\delta}{2}} J_{2\mu+A\delta}(2x^{\frac{1}{2A}}) \\
&= O\left(x^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{4A}}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$I^{(\rho)}(x) = O\left(x^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{4A}}\right) \quad (5.1)$$

Or,

$$A_\lambda^\rho(x) - S_\rho^c(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\mu_n^{\delta+\rho}} I(\mu_n x) = W_\rho(x)$$

On a $A_\lambda^\rho = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum'_{\lambda_n \leq x} a_n (x - \lambda_n)^\rho$.

Donc

$$\Delta_y^\rho A_\lambda^\rho(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n \frac{\Delta_y^\rho(x - \lambda_n)}{\Gamma(\rho+1)} + \sum_{\nu=0}^\rho \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} (-1)^{\rho-\nu} \binom{\rho}{\nu} \sum_{x < \lambda_n \leq x+\nu y} a_n (x + \nu y - \lambda_n)^\rho$$

Or $\frac{\Delta_y^\rho(x - \lambda_n)}{\Gamma(\rho+1)} = y^\rho$ donc on a

$$\Delta_y^\rho A_\lambda^\rho(x) = A_\lambda^0(x) y^\rho + O\left(y^\rho \sum_{x < \lambda_n \leq x+\rho y} |a_n|\right)$$

D'un autre coté

$$\Delta_y^\rho S_\rho^c(x) = \int_x^{x+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{\rho-1}}^{t_{\rho-1}+y} Q_0(t_\rho) dt_\rho$$

Cependant

$$Q_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\varphi(s)}{s} x^s ds = \sum_\xi x^\xi \log^{r_\xi-1}(x)$$

Où ξ représente un pôle de φ au point $s = \xi$. On note r_ξ l'ordre de ce pôle.

Donc

$$\Delta_y^\rho S_\rho^c(x) = Q_0(x) y^\rho + O\left(x^{q-1} (\log^{r-1}(x)) y^{\rho+1}\right)$$

En combinant ces résultats on obtient

$$\Delta_y^\rho W_\rho(x) = y^\rho [A_\lambda^0(x) - Q_0(x)] + O(y^{\rho+1} x^{q-1} \log^{r-1}(x)) + O\left(y^\rho \sum_{x < \lambda_n \leq x + \rho y} |a_n|\right) \quad (5.2)$$

De plus, si $a_n \leq 0$, $A^0(x)$ est monotone et alors

$$y^\rho A_\lambda^0(x + \rho y) \geq \Delta_\lambda^\rho A_\lambda^\rho(x) \geq y^\rho A_\lambda^0(x) \quad (5.3)$$

D'après le Lemme 9 et (5.1) on sait que $\Delta_y^\rho I(x) = \begin{cases} O(|I(x)|) = O\left(x^{[A\delta + (2A-1)\rho - \frac{1}{2}]/2A}\right) + O(x^{\rho-\nu_\rho}) \\ O(y^\rho |I^{(\rho)}(x)|) = O\left(y^\rho x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}}\right) \end{cases}$

Comme $\forall \rho > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $[A\delta + (2A-1)(\rho + m) - \frac{1}{2}]/2A > \rho + m - \nu_{\rho+m}$, on suppose $[A\delta + (2A-1)(\rho) - \frac{1}{2}]/2A > \rho - \nu_\rho$ sinon on remplace ρ par $\rho + m$.

Alors

$$\Delta_y^\rho I(\mu_n x) = O\left(x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}} \mu_n^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + \rho(1 - \frac{1}{2A})} \min\left(x^{\rho(1 - \frac{1}{2A})}, \mu_n^{\frac{\rho}{2A}} y^\rho\right)\right)$$

De plus, si $\nu \geq \beta$,

$$\sum_{\mu_n > z} \frac{|b_n|}{\mu_n^\nu} = \sum_{\mu_n > z} \frac{|b_n|}{\mu_n^{\nu - \beta + \beta}} = O(z^{\beta - \nu}) \quad (5.4)$$

Si $\nu < \beta$,

$$\sum_{\mu_n \leq z} \frac{|b_n|}{\mu_n^\beta} = \sum_{\mu_n \leq z} \frac{|b_n| \mu_n^{\beta - \nu}}{\mu_n^\beta} = O(z^{\beta - \nu}) \quad (5.5)$$

Alors

$$\Delta_y^\rho W_\rho(x) = O\left(\sum_{\mu_n \leq z} \frac{|b_n|}{\mu_n^{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4A}}} y^\rho x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}}\right) + O\left(x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + \rho(1 - \frac{1}{2A})} \sum_{\mu_n > z} \frac{|b_n|}{\mu_n^{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4A} + \frac{\rho}{2A}}}\right)$$

On note $u = \beta - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}$ et on a donc en utilisant (5.4) et (5.5) on a

$$\Delta_y^\rho W_\rho(x) = O\left(y^\rho x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A}} z^{\hat{u}}\right) + O\left(x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + \rho(1 - \frac{1}{2A})} z^{u - \frac{\rho}{2A}}\right)$$

On pose $z = \left(\frac{x^{1 - \frac{1}{2A}}}{y}\right)^{2A}$ et alors

$$\Delta_y^\rho W_\rho(x) = O\left(y^{\rho - 2Au} x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + (2A-1)u}\right) \quad (5.6)$$

Donc en utilisant (5.2) et (5.6), on obtient

$$A_\lambda^0(x) - Q_0(x) = O\left(y^{-2Au} x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4A} + (2A-1)u}\right) + O(y x^{q-1} \log^{r-1}(x)) + O\left(\sum_{x < \lambda_n \leq x + \rho y} |a_n|\right)$$

On choisit maintenant, pour $\eta \geq 0$, $y = x^{1-\frac{1}{2A}-\eta}$ et alors

$$A_\lambda^0(x) - Q_0(x) = O\left(x^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{4A}+2A\eta u}\right) + O\left(x^{q-\frac{1}{2A}-\eta} \log^{r-1}(x)\right) + O\left(\sum_{x < \lambda_n \leq x'} |a_n|\right)$$

Si $a_n \geq 0$, d'après (5.3)

$$A_\lambda^0(x) - Q_0(x) = O\left(x^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{4A}+2A\eta u}\right) + O\left(x^{q-\frac{1}{2A}-\eta} \log^{r-1}(x)\right)$$

□

Corollaire 5 :

Si $A \geq 1$, on a toujours la propriété suivante :

$\forall \rho > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $[A\delta + (2A-1)(\rho+m) - \frac{1}{2}]/2A > \rho+m - \nu_{\rho+m}$

Preuve. On pose $a_\rho = \frac{\rho}{2A} - \frac{\delta}{2}$.

Soit $\nu_\rho \geq a_\rho + \frac{1}{2A}$ ou $\nu_\rho < a_\rho + \frac{1}{2A} = a_{\rho+1}$.

Dans le deuxième cas, $\nu_{\rho+1} \geq a_{\rho+1} + \frac{1}{2A}$.

□

5.4 Exemples d'application

Exemple d'application 1 :

Le Théorème 8 s'applique à ζ et on obtient $\zeta(x) = x + O(1)$.

ζ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\psi(1-s)$$

Avec $\psi(1-s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi}n)^s}$.

Alors $A = \frac{1}{2}$ et $\delta = 1$.

De plus $\nu_0 = 0$ et $\nu_{\rho+1} = \nu_\rho + 1$ donc $\nu_\rho = \rho$. C'est pourquoi $\rho - \nu_\rho = 0$ et donc on a bien la propriété : $\forall \rho > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $[A\delta + (2A-1)(\rho+m) - \frac{1}{2}]/2A > \rho+m - \nu_{\rho+m}$

Remarque

Une L-fonction est une fonction de type $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ où χ est un caractère et $\sigma > 1$. Cette fonction possède aussi une équation fonctionnelle et elle vérifie les conditions du théorème principal.

Exemple d'application 2 :

Soit $d(n)$ le nombre de diviseur de $n \in \mathbb{N}$. On note $a_n = b_n = d(n)$, $\lambda_n = \mu_n = \pi n$ et $\varphi(s) = \psi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{(\pi n)^s}$ pour $\sigma > 1$.

On a l'équation fonctionnelle

$$\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s) = \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\psi(1-s)$$

O, a donc $A = 1$ et $\delta = 1$.

D'après [4], on a

$$Q_0(x) = \frac{1}{4} + x[(2\gamma - 1) + \log(x)]$$

Où γ est la constante d'Euler.

Alors, en choisissant $\eta = \frac{1}{6}$, on obtient

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x [(2\gamma - 1) + \log(x)] + O\left(x^{\frac{1}{3}} \log(x)\right)$$

Remarque

Il y a encore de nombreuses applications, certaines d'entre elles sont explicitées dans l'article [4].

Bibliographie

- [1] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*.
Deuxième édition revue par D.R. Heath-Brown - Université d'Oxford.
- [2] D. Zagier, *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*.
The American Mathematical Monthly, Vol. 104, No. 8 (Oct., 1997), pp. 705-708.
- [3] Hugh L. Montgomery et Robert C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I : Classical Theory*.
Cambridge studies in advanced mathematics 97.
- [4] K. Chandrasekharan et Raghavan Narasimhan, *Functional Equations With Multiple Gamma Factors and the Average Order of Arithmetical Functions*.
Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 76, No 1 (Jul., 1962), pp. 93-136.
- [5] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*.
2nd Ed., Cambridge, 1948.
- [6] E.T. Whittaker et G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*.
4th Ed., Cambridge, 1958.
- [7] D. Lesesvre, *Counting Integers with Perron Formula*.