RÉFLEXIONS PHILOSOPHIQUES SUR LES MÉTHODES DE PREUVE EN MATHÉMATIQUE

DIDIER LESESVRE

Table des matières

1. Introduction : la place epistemique des preuves en mathematiques

De nouvelles méthodes de preuves émergent avec le développement de moyens tels l'informatique ou la génétique. Bien que puissantes et pouvant apporter des résultats inattendus, elles semblent aussi avoir un statut épistémiquement inférieur à certaines preuves plus classiques. Ainsi le théorème des quatre couleurs, prouvé en 1977 par Appel, Haken et Koch, ou encore la méthode PDP de recherche de chemins hamiltoniens dans un graphe à l'aide de fragments d'ADN, soulèvent de vives discussions au sein des scientifiques comme des philosophes. Si certains de ces résultats sont aujourd'hui acceptés dans leur totalité par la communauté mathématique, d'autres sont seulement considérés comme des expériences confirmant certains espoirs d'un résultat théorique, et dans tous les cas l'apparition de ces nouvelles méthodes de preuve soulève la question épistémologique importante de la conception de la preuve, de son rôle dans l'acquisition de la connaissance mathématique, et plus généralement de la nature même de cette connaissance.

Certaines preuves sont infaisables par des êtres humains et ne peuvent non plus être suivies ou vérifiées à la main dans leur totalité, et « il est fort improbable qu'un mathématicien voie un jour une preuve du théorème des quatre couleurs » [1], alors de quel droit considérer des résultats ainsi obtenus comme de vrais théorèmes ? On est ici face au rôle nouveau des ordinateurs et des techniques nouvelles dans la pratique mathématique, notamment en ce qui concerne leur statut d'apparence empirique dans une science qui a toujours été singulière par son caractère purement a priori et non fondé sur les faits du monde sensible. Dans le système usuel dans lequel fonctionnent les mathématiques, « nous devons admettre que la preuve [par ordinateur] n'est pas une preuve traditionnelle, une déduction a priori du résultat à partir des prémisses. C'est une preuve traditionnelle avec une lacune » [2] qui est comblée par l'intervention de l'ordinateur. La très étanche barrière du raisonnement mathématique qui lui permettait de conserver sa supériorité semble franchie de l'intérieur même, et la différence entre les mathématiques et les sciences naturelles s'amenuise.

Tymoczko et Fallis s'attachent tous deux à l'étude de différentes questions soulevées par les preuves faisant appel à l'informatique et l'utilisation de l'ADN. Tandis que le premier rejette la légitimité des preuves par ordinateur, le second les intègre à l'ensemble des outils mathématiques acceptables et s'attache au cas de l'ADN, et si la différence de génération qui les sépare semble jouer en faveur de l'acceptation des méthodes modernes, les deux s'attachent à essayer de saisir la nature de la preuve et plus généralement de la connaissance mathématique, leurs tentatives de caractérisations et de définitions successives s'appuyant sur des exemples de résultats et de preuves historiques, admises ou contestées au parmi les mathématiciens. Mais les principes fondamentaux des preuves et de la connaissance ne semblent pas se dégager si facilement et toutes les tentatives se heurtent à des insuffisances, donnant peut-être à la conviction et au jugement interne à la communauté mathématique un rôle dont ils avaient été d'emblée privés.

En s'appuyant essentiellement sur les deux études dont nous synthétisons les arguments, nous tâchons de dégager un peu plus les éléments qui semblent juger réellement de la qualité d'une preuve et de les critiquer à la lumière de preuves et d'exemples réels. Les tentatives de caractérisation de la preuve mathématique par Tymoczko, ainsi que celles de Fallis concernant la connaissance mathématique, permettent de rappeler constamment la réalité de la pratique mathématique et l'importance du caractère humain du mathématicien, permettant de proposer sinon une solution au problème posé, tout du moins un critère raisonnable et optimiste de jugement fondé sur la réalité de la pratique mathématique.

2. Les nouvelles methodes de preuve et le probleme de l'expertisabilite

2.1. De nouvelles méthodes de preuves. Le théorème des quatre couleurs affirme la coloriabilité d'une carte avec au plus quatre couleurs. Demeuré longtemps une simple conjecture, le résultat a finalement été prouvé par Appel, Haken et Koch. Toutefois la preuve ne fait pas l'unanimité : elle repose sur une simple récurrence, le mécanisme d'hérédité est problématique et ne semble pas se réduire à une situation simple. « Le plan d'attaque naturel face au théorème des quatre couleurs se suggère de lui-même. On peut essayer de trouver un ensemble de configurations réductibles qui est suffisamment vaste de sorte que toute triangulation [du graphe] contienne une configuration de cet ensemble » [3], permettant de faire fonctionner la récurrence car il ne reste alors plus qu'un nombre fini de configurations à traiter. Un travail de réduction des cas possibles à des cas génériques aboutit à un nombre élevé de configurations – à savoir 1834 – qui sont alors traitées par ordinateur. Le reste de la preuve, notamment le fait que cet ensemble condense en effet la totalité du problème, est humainement entrepris.

La méthode d'Adleman est l'exemple exploité par Fallis pour traiter ce problème épistémique des méthodes. Il s'agit une méthode probabiliste fondée sur le comportement structurel de l'ADN qui permet d'établir la non-existence d'un chemin hamiltonien dans un graphe orienté. La méthode est d'autant plus intéressante qu'il y a actuellement peu d'espoir que ce problème soit à portée des ordinateurs [4]. La méthode naïve d'exhaustion est mise à portée par des méthodes probabilistes

1. [1], p. 58, toutes les traductions fournies sont de notre fait.
2. *ibid.*
3. [1], p. 66
4. Il s'agit en effet d'un problème de décision NP-complet et les seules méthodes connues sont au minimum de complexité exponentielle.

exploitant les connaissances de l'ADN et permettant à l'algorithme de s'exécuter en un temps raisonnable. Ainsi que Appel, Haken et Koch ont exploité la puissance de calcul des ordinateurs par rapport aux hommes, Adleman expoite le fait que « l'ADN est un outil puissant pour encoder une grande quantité d'informations » [5]. Les idées algorithmiques peuvent *via* cette nouvelle méthode s'appliquer aux graphes grâce à la modélisation des sommets et des arêtes par des fragments d'ADN construits de sorte que les hélices d'ADN possibles correspondent exactement à des chemins hamiltoniens du graphe. Ainsi, la puissance des outils de preuve a augmenté, mais encore faut-il s'assurer de n'avoir pas perdu l'essence de la rigueur mathématique. Plus que le statut du théorème des quatre couleurs, c'est le statut des preuves assistées par ordinateur qui doit être éclairé et que Tymoczko s'attache alors à étudier à la lumière de trois caractéristiques que sont l'expertisabilité, la formalisabilité et le caractère convaincant, critères auxquels il soumet les preuves mathématiques et dont il étudie l'adéquation avec les preuves par ordinateur.

2.2. **Le critère d'expertisabilité.** Tymoczko et Fallis se donnent pour tâche d'élucider les caractéristiques attendues d'une preuve mathématique pour donner à la connaissance qui en découle la valeur absolue que l'on confère généralement aux résultats mathématiques. Pour Tymoczko, l'une des caractéristiques essentielles d'une preuve est celle de la possibilité d'expertise d'une preuve par un autre mathématicien de manière autonome. Selon ce critère, « une preuve est une construction qui peut être revue, réexaminée, vérifiée par un agent rationnel » [6]. Allant même au-delà de ce critère, il impose que cette vérification puisse se faire à la main, sans aucune aide extérieure. « L'expertisabilité est une caractéristique subjective importante des preuves mathématiques, qui traduisent les preuves des mathématiciens, les sujets des investigations mathématiques » [7], c'est le lien entre le savoir et le savant qui est aussi garanti par la preuve et fait du savoir mathématique un savoir tant humain que purement a priori. L'expertisabilité est le gage de ce caractère a priori et indépendant de toute expérience, qui est l'une des caractéristiques de la connaissance mathématique que nous explorerons plus en détails par la suite. Fallis rejoint la recherche d'une certaine humanité dans la preuve en imposant également « la suggestion [...] que pour établir une vérité mathématique, un mathématicien doit mener chaque étape de la preuve devant son esprit et vérifier qu'elle est valide » [8].

La grande différence avec la preuve du théorème des quatre couleurs est l'impossibilité de vérifier le résultat manuellement, l'échelle de temps d'une telle vérification n'étant pas humaine. [9]. De plus, une telle démarche nécessiterait un contrôle permanent des développements pour repérer les erreurs et les oublis, toujours fréquents lors des longues preuves. Ainsi, cette seule étape soumet la preuve à la puissance d'un ordinateur, et Tymoczko note qu'aucun ordinateur n'a jamais imprimé la preuve complète du théorème, qui n'a donc jamais été rédigée et ne pourrait être consultée en nul endroit. Aucun mathématicien n'a donc jamais repris cette preuve dans sa partie fastidieuse qui a été confiée à un ordinateur, et le problème dévie naturellement vers le statut épistémique donner à ce nouveau moyen qu'est l'ordinateur, et donc le statut épistémique donner à ce qu'ont produit Appel, Haken et Koch. Notons ici que les oppositions peuvent découler de la réticence naturelle à tolérer une méthode non traditionnelle [10]. Il ne faut pas oublier l'aspect essentiel de la preuve que sont ses idées et sa méthode : si la preuve n'a pas été entreprise dans ses moindres détails, la preuve a été condensée sous des arguments plus généraux, et la partie restante semble relever d'une pure technicité et non de la création d'idée : c'est une preuve lacunaire, mais dont la lacune est à la place la plus bénigne.

2.3. **Fiabilité et intuition.** Il faut toutefois s'interroger sur l'aspect exact que doit avoir cette expertisabilité : si nous avons vu qu'elle était gage de scientificité, elle n'est pas toujours effective ou alors elle l'est de manière partielle, car nous admettons toujours ce qui nous apparaît comme évident, est-ce alors pour cela que le résultat doit être considéré comme épistémiquement inférieur ? Nul ne saurait ni ne voudrait le concéder, ou alors il retirerait à la pratique mathématique réelle la quasi-totalité de ses résultats. Quel mathématicien est capable aujourd'hui de justifier, d'une manière totale, une simple assertion de sa spécialité ? S'il en est capable, ou s'il est persuadé de l'être à l'aide de la littérature, il ne le fait jamais et ne doute pas des résultats de collègues ou de résultats plus élémentaires qu'il ne sait pas nécessairement prouver – et comment pourrions-nous demander de remonter jusqu'aux axiomes élémentaires des nombres ? C'est donc plus cette

5. [2], p. 167
6. [1], p. 59
7. [1], p. 60
8. [2], p. 180
9. En effet, les 1200 heures de calcul qui ont été nécessaires à l'ordinateur pour la preuve correspondent à plus de 10^{15} opérations. Ces estimations sont obtenues à partir des caractéristiques de l'IBM 370-168 en considérant qu'un cycle correspondait à une opération, sans même tenir compte de la complexité de ces calculs qui seraient difficilement à portée d'un esprit humain, et de la quantité de papier ou de craie qu'il faudrait pour arriver à bout de ces calculs.
10. Ce que Tymoczko finira par reconnaître en conclusion de son étude, ce rejet d'un outil qui arrive pour lui comme un parasite peu fiable étant semblable aux réticences des anciennes écoles aux changements de paradigmes que décrit Kuhn. Fallis, plus jeune et plus habitué aux ordinateurs, n'en doute déjà plus, confirmant cette appréhension psychologique plus qu'épistémique, comme les probabilités ont eu du mal à trouver leur place dans les méthodes de preuve et dans le monde des mathématiques fondamentales, alors que nous connaissons aujourd'hui l'étonnante fécondité que ses développement ont permis.

confiance mutuelle ainsi que le contrôle effectif par les pairs qui garantit les résultats, et le gage est plus dans la possibilité d'expertise que dans l'expertise elle-même.

Dans le cas du théorème des quatre couleurs, le traitement informatique de la preuve permettrait potentiellement une impression de garantie – dont on pourrait même envisager une étude par un groupe de mathématiciens compétents : en effet, il ne s'agit que de 2000 cas qui sont sûrement traitables manuellement, car codés, et un groupe de quelques milliers de mathématiciens serait donc – théoriquement – capable de venir à bout d'une telle preuve à travers un travail d'équipe, éventuellement très long, qui comme nous l'avons déjà souligné est de manière générale la norme dans tout travail mathématique. L'inaccessibilité découverte par l'utilisation des ordinateurs est naturellement une inaccessibilité apparente dans la vérification de ses calculs, mais cela n'est pas tolérable si l'on souhaite admettre une vérité comme un jugement mathématique vrai, indépendamment de toute expérience. Tymoczko appuie son refus d'une telle méthode sur l'exemple de la méthode de Gauss pour calculer la somme des n premiers entiers consécutifs. Or sur l'exemple, qu'il illustre dans le cas $n = 100$, la preuve paraît limpide, et eût été une belle illustration si la preuve n'était logiquement en défaut. En effet, il fait appel au jugement personnel et subjectif du mathématicien pour légitimer la valeur de vérité de l'argument, concluant la preuve en « devenant convaincu » [11] de la vérité du résultat. Or la preuve repose sur le principe de récurrence, ou tout du moins sur le développement très pénible d'un calcul qui n'est déjà que difficilement à portée dans le cas de cette somme de cent termes, et l'évidence de l'argument est certes expertisable comme il le requiert, mais elle n'est pas expertisée, mais plutôt intuitée ou en tous cas condensée en un développement habituel, et donc admis. La vérification humaine semble, jusque dans des cas d'apparence si élémentaires que celui-ci, reposer sur une impénétrable subjectivité, sur des visions de l'esprit qui ne manqueront pas d'être soulevées par Fallis, et qui sont la porte ouverte à toutes les illusions.

Le second défaut du critère est la faillibilité humaine à mener à bien des calculs longs et compliqués, son incapacité à garder la constance machinale nécessaire à ce genre de vérifications. Ainsi « si quelqu'un avait vraiment essayé d'additionner les nombres à la main et était arrivé à la somme 5048, nous dirions qu'il a mal calculé » [12]. Mais alors celui qui aurait rempli le critère de preuve que Tymoczko propose aurait donc une moins grande crédibilité que celui qui aurait été convaincu de l'argument et du résultat en le "voyant", lui donnant la légitimité de juger un autre résultat, pourtant expertisé d'une certaine manière, comme faux ? Voilà qui est bien malheureux pour le critère de l'expertisabilité, qui faiblit de minute en minute. Aux défauts des illusions humaines et d'une intuition incertaine, défauts que l'on pourrait qualifier de psychologiques, s'ajoute celui d'une faillibilité d'ordre purement technique. Ces deux défauts sont d'ailleurs a priori propres à l'homme et non à l'ordinateur, et celui-ci trouverait encore un avantage sur l'homme, alors pour quelle raison leur nier cette fiabilité supérieure ? Ainsi, indépendamment d'une éventuelle feinte informatique qui aurait modifié les calculs sans prévenir ou d'une défaillance physique ayant les mêmes effets, la preuve du théorème des quatre couleurs par ordinateur est non seulement un gage d'expertisabilité de la preuve, mais en plus a opéré cette expertise d'une manière qui est, comme simple constat général, sûrement plus fiable que celle qu'effectuerait un mathématicien.

2.4. **Des preuves condamnées à être lacunaires.** Une objection sérieuse soulevée par Tymoczko est celle de la « confusion entre une preuve et la description d'une preuve » [13], les preuves étant généralement décrites en sautant des étapes simples pour lesquelles elles renvoient à d'autres travaux ou à des résultats exposés en détails par d'autres, et on pourrait de fait « regarder les articles de Appel, Haken et Koch comme des descriptions d'une preuve (ce qu'ils sont) et essayer d'assimiler l'appel aux ordinateurs aux raccourcis pragmatiques que nous venons de relever » [14]. Toutefois, contrairement aux résultats omis qui sont généralement des faits classiques ou tout du moins dont la preuve a été pleinement entreprise et menée à terme par un collègue, le fait est ici nouveau et des plus fastidieux. Ainsi, la preuve du théorème des quatre couleurs ressemble à une description de preuve mais sans l'expertise qui devrait s'en suivre naturellement, et c'est ce qui fait le défaut indéniable de cette preuve au vu du critère retenu par Tymoczko. Les traces de cette preuve ne sont que des traces du fait que cette preuve a en effet été effectuée par un ordinateur dont on conserve seulement les résultats finaux. De manière plus générale, la différence entre les preuves classiques et ces méthodes nouvelles faisant intervenir des intermédiaires matériels « est que l'expertisabilité est préservée dans les descriptions traditionnelles de preuves, mais pas dans l'appel aux ordinateurs » [15].

La vérification effective des preuves, qui sont toujours plus élevées aux sommets des pyramides que sont les branches aujourd'hui hyperspécialisées des mathématiques, est plus difficile et décourageante au fur et à mesure de l'avancée des connaissances, et le niveau très élevé des membres de la communauté très restreinte de mathématiciens capables de comprendre et de juger l'intégralité d'une preuve les tire généralement vers d'autres occupations que cette vérification [16]. Ainsi,

11. [1], p. 59
12. *ibid.*
13. [1], p. 70
14. *ibid.*
15. [1], p. 71
16. C'est par ailleurs un défaut majeur du système actuel où les articles et les résultats mathématiques sont exposés dans une forme très aboutie et déjà entièrement éditée par l'auteur, menant naturellement à une confiance plus forte envers la qualité du travail – confiance parfois trompeuse et qui

l'expertisabilité n'est pas un gage de fiabilité, mais c'est l'expertise effectivement et correctement réalisée qui peut apporter plus de certitude et être un gage de qualité de la preuve, de vérité du résultat. La plus grande fiabilité est-elle donc à mettre au crédit d'une preuve menée par un ordinateur qui, jusqu'à présent, n'a jamais montré de défaillance subtile et non déclarée, ou à des mathématiciens naturellement crédules devant leurs collègues et à des preuves qui ne peuvent être vérifiées qu'en plusieurs années, ainsi celle, récente, de l'infirmation de l'hypothèse de Riemann par Berliocchi [17] ? Il en va de même de la preuve de la classification des groupes simples, universellement admise sans aucune réserve, n'est pas expertisable et ne peut donc être exposée avec certitude, personne n'étant capable de vérifier la véracité des environ 15000 pages que constitue le corpus d'articles spécialisés sur lequel repose cette classification, et des erreurs sont toujours à redouter en son sein, n'apportant donc aucune certitude quant au résultat obtenu [18].

Tymoczko développe alors une situation imaginaire pour traduire d'une manière différente les défauts et le statut de la preuve par ordinateur. Il s'agit d'un mathématicien de génie, Simon, qui arrive sur Mars et révolutionne les mathématiques en prouvant de très nombreux résultats très difficiles avec beaucoup d'intelligence et d'ingéniosité, proposant des preuves toujours limpides et complètement argumentées et justifiées. Devenant une véritable idole, il a cessé de préciser les détails de certains lemmes classiques et immédiats, puis a commencé à omettre des pans plus important de preuves, en admettant des étapes qui n'étaient pas évidentes pour le commun des mathématiciens martiens, alors incapables de reconstruire son résultat. Mais « Simon avait un tel prestige [...] que les mathématiciens martiens ont accepté ses résultats ; et ils furent incorporés dans le corpus des mathématiques martiennes dans la rubrique "Simon dit" » [19]. De manière plus générale, cette parabole est celle des preuves basées sur l'autorité, qui fait que l'on acceptera plus aisément les arguments, aussi flous soient-ils, d'un grand mathématicien que d'un jeune étudiant. La méthode de Simon est bien évidemment illégitime et relève plus de la foi que de la recherche scientifique de la vérité, ce que Tymoczko ne manque pas de le souligner en comparant ce comportement théologique à celui d'un gourou des mathématiques et en comparant cet abus d'autorité à celui d'un dictateur des mathématiques. La politique et la religion se mêlant aux mathématiques, elles perdent leur pureté et ses limites deviennent floues. De manière générale, « l'appel à "Simon dit" est une anomalie en mathématiques ; c'est simplement un appel à l'autorité et non une démonstration » [20].

Tymoczko rapproche alors les arguments du type "Simon dit" à ceux faisant intervenir un ordinateur, n'y voyant que le même travers non mathématique car « les ordinateurs sont, dans le contexte des preuves mathématiques, une autre sorte d'autorité » [21]. Cependant il s'empresse de nuancer la différence dans la conception que l'on se fait pour chacune des deux méthodes, et constate que « les ordinateurs ne sont pas simplement de l'autorité, mais une autorité garantie » [22], garantie qui est de nature philosophique et non mathématique. La comparaison de Tymoczko nous semble inexacte, et de fait le statut autoritaire de l'un ne peut être imputé à l'autre. De plus, cette garantie supplémentaire nous semble être d'un poids non négligeable dans la valeur mathématique de la preuve. En effet, ce qui est reproché aux arguments de Simon est leur non vérifiabilité car celui-ci, dont l'esprit est bien au-dessus de celui des martiens et dont les pensées ne leurs sont pas accessibles sans qu'il les explique, considère certaines preuves comme immédiates et ne prend plus la peine de les justifier, à l'image d'un Fermat qui n'expose pas la preuve de son théorème. Dans ces cas, le seul moyen que nous avons de vérifier les dires du maître est de reconstruire intégralement la preuve du résultat, en cherchant à reconstruire sa pensée pour combler les pans laissés vides, mais cela revient à retrouver un résultat à partir de quelques résultats élémentaires, autrement dit de prouver de manière autonome un résultat que nous n'aurions dû avoir qu'à vérifier et que l'on ne peut donc considérer comme prouvé. Comme Tymoczko le remarque en se souvenant d'« un de [ses] professeurs, un très bon mathématicien mais pas un génie, [qui] a fait la remarque qu'il y a seulement quelques preuves qu'il ne pouvait comprendre, mais aucune qu'il ne pouvait suivre » [23], c'est ce qui fait la différence entre l'autorité et la description partielle d'une preuve : alors que celle-ci peut être vérifiée, celle-là ne peut être que recréée. Or cette illégitimité n'est pas imputable à une preuve par ordinateur, car dans ce cas les calculs ont été faits, ils peuvent être imprimés et vérifiés, et les seules obstructions qu'il peut y avoir à cette vérification est un manque de temps. Mais cela n'est pas un argument contre la méthode et une discrimination épistémique reste nécessaire, car elle ne diffère en rien de la vérifiabilité d'autres preuves difficiles : elle est faisable, tout du moins potentiellement, et c'est tout ce qui intéresse le critère de Tymoczko. Le défaut de la preuve est en réalité un défaut

mène à la publication de fautes parfois relativement grossières mathématiquement : ainsi même les très sérieux éditeurs que sont Springer et l'American Mathematical Society publient certains ouvrages avec des résultats grossièrement faux et avec des contre-exemples relativement simples.

17. [4]
18. [2], p. 171
19. [1], p. 71
20. [1], p. 72
21. *ibid.*
22. *ibid.*
23. [1], p. 60

technique de l'homme. La méthode est certes nouvelle, mais elle n'a été qu'un accélérateur de calcul, et non un pont par dessus dont on ne connaîtrait la fiabilité ni ne pourrait étudier les fondements. [24]

Toutefois, selon Tymoczko, il n'y a clairement pas de preuve étudiable connue du théorème des quatre couleurs, et il est légitime de rejetter notre proposition d'étudiabilité potentielle pour exiger une étudiabilité effective, car si l'on veut bâtir sereinement les mathématiques, nous devons continuer à vérifier en permanence la stabilité de ses fondements, et nous ne pouvons pas nous limiter à la simple possibilité de le faire. Nous ne pouvons cependant que soulever la précipitation dans laquelle Tymoczko a été ici de conclure à la thèse qu'il défend sans prendre le temps de la réflexion : au fait qu'il n'existe pas de telle preuve aujourd'hui, indéniable réalité déjà argumentée, il ajoute sans frémir l'affirmation qu'une telle preuve ne paraîtra probablement jamais. Si l'histoire des sciences a appris au scientifique comme au philosophe une leçon, c'est bien celle de ne jamais croire avoir atteint ni la vérité ni les limites de la connaissance, et toute affirmation dans ce sens ne serait de toutes façons fondée que sur une métaphysique artificielle et arbitraire. Des résultats dont la portée et la difficulté théorique apparentes est bien supérieure, tels le théorème de Fermat, l'hypothèse de Riemann, la conjecture de Poincaré, l'équation de Navier-Stockes et bien d'autres, n'ont cessé de susciter des tentatives et des espoirs, et c'est grâce à cette foi permanente en la capacité de l'homme à découvrir la vérité que ces problèmes ont tous trouvé des avancées nouvelles et inattendues, pour certains une solution définitive, pour d'autres des idées offrant un nouveau point de vue et faisant souvent naître de nouvelles et fécondes théories. Si Tymoczko mène ici une étude sans aucun doute fondamentale pour la philosophie des sciences et de la connaissance permettant d'éclaircir la place grandissante que l'ordinateur acquiert au sein des mathématiques, rien ne lui permet d'avancer ainsi sans aucun argument un jugement aussi pessimiste et gratuit sur l'avenir des mathématiques et de prononcer une telle condamnation à l'encontre du théorème des quatre couleurs. En tous cas, on ne peut condamner le théorème des quatre couleurs à un a posteriori qui n'est justifié par rien, et aucunement que « la seule route vers le théorème des quatre couleurs que nous pourrons jamais prendre paraît mener à des expériences sur ordinateur » [25].

2.5. **Expertisabilité et formalisabilité.** Parmi les trois caractéristiques que relève Tymoczko pour les preuves mathématiques, « [l'expertisabilité et la formalisabilité] sont les caractéristiques les plus profondes » [26] et forment les conditions de conviction pour les mathématiciens. On ne manquera pas, comme soulevé précédemment, de noter que ce sont les deux caractéristiques où les ordinateurs semblent égaler, sinon surpasser, l'homme. Les deux caractéristiques sont l'objectif ultime apparent de toute preuve mathématique, et Tymoczko se demande si elles sont indépendantes. Tymoczko recherche d'abord la possibilité de preuves expertisables mais non formalisables, en notant d'emblée que le théorème d'incomplétude de Gödel condamne la formalisabilité totale de toute proposition, alors que la vérification du caractère vrai d'une proposition est a priori toujours possible. Cependant la liberté laissée par le choix du système axiomatique et de la théorie logique dans laquelle on se place permet d'espérer que « une preuve étant donnée, il y a un système formel bien adapté dans lequel elle peut être formalisée » [27]. La formalisation est un caractère teinté de subjectivité, le choix adéquat du système formel restant arbitraire.

Tymoczko note d'ailleurs cet état de fait dans la pratique mathématique, et la formalisation n'est jamais une condition nécessaire d'acceptation d'un résultat, car « en pratique, au moins, les mathématiciens arrivent à la connaissance des preuves formelles seulement à travers la médiation des preuves expertisables » [28], autrement dit la formalisation potentielle découle de l'étudiabilité effective de la preuve, ce qui permet de déjouer le fastidieux des preuves formelle. Cependant des preuves entreprises par les mathématiciens sont construites sur les bases éventuellement faillibles des preuves non formelles, la porte sur les dangers des illusions, les erreurs dans l'étude menée un peu sans garde-fou ni filet, et la crédulité des mathématiciens reste fermée grâce à la formalisation a posteriori, qui reste le gage ultime d'objectivité. Ces preuves usuelles ne sont donc qu'un moyen d'atteindre l'abstraction d'une preuve purement formelle dont on se convainc, et il est naturel d'« arriver à la connaissance de l'existence de preuves formelles spécifiques par le seul moyen de quelques concepts de preuve plus primitifs, les preuves expertisables » [29]. Le primat de l'étudiabilité comme condition de genèse, sinon d'existence, des preuves formelles est donc posé par Tymoczko, et tant la théorème des quatre couleurs que les résultats obtenus par la méthode PDP ne se soumettent pas à une telle étudiabilité.

24. De plus nous pouvons noter, en reprenant les caractéristiques des preuves mathématiques de Tymoczko et en gardant toutefois à l'esprit que cette parabole n'est pas avancée comme étant uen preuve mais comme une simple illustration, que son analogie entre Simon et les ordinateurs est un stratagème rhétorique de persuasion plus qu'une réelle argumentation rationnelle convaincante, le parallèle qu'il dresse entre les deux situations n'étant ni convaincant, ni vérifiable, ni bien sûr formalisable.

25. [1], p. 77
26. [1], p. 61
27. *ibid.*
28. [1], p. 62
29. *ibid.*

3. Formalisabilite : connaissance a priori ou acquisition sensible du savoir mathematique ?

3.1. **La critère de formalisabilité.** Une autre caractéristique que Tymoczko attache aux preuves mathématiques est leur formalisabilité, le fait que l'« on peut toujours trouver une théorie et un langage formel appropriés dans lesquels la preuve informelle peut être plongée et complétée en une preuve formelle rigoureuse » [30]. L'avantage comme la nécessité de cette caractéristique est le gage d'objectivité et de perfection logique portés par cette formalisation, l'élévation de la certitude à un degré purement abstrait, a priori, et ne reposant sur aucune illusion humaine contrairement à ce qui découle des tentatives d'expertisabilité vu précédemment.

Tymoczko, contrairement à la majorité des mathématiciens de son temps, estime qu'une formalisation de la preuve du théorème des quatre couleurs « ne pourrait être utilisée pour légitimer le recours aux ordinateurs. Ou plutôt, [il] croit que la preuve formelle n'existe que parce que nous acceptons le recours aux ordinateurs d'abord » [31], soumettant la valeur de la preuve aux ordinateurs. Le raisonnement serait donc biaisé et nous légitimerions les preuves par ordinateur par la formalisabilité de telles preuves qui, elle, découlerait du fait que la preuve par ordinateur est valable. Donc finalement « notre seule certitude concernant l'existence d'une telle preuve formelle présuppose la fiabilité des ordinateurs » [32], et la méthode semble être irrémédiablement enchaînée à son aspect empirique. Cette situation, rapprochée de celle des martiens qui peuvent toujours penser que ce que Simon dit est formalisable dans leurs systèmes mais qui ne pourraient jamais le formaliser explicitement, montrerait alors « que la formalisation survient seulement après [l'utilisation des ordinateurs]. Elle ne peut être utilisée comme un critère pour accepter les preuves assistées par ordinateur » [33]. Nous avons déjà soulevé que, contrairement à Simon, nous savons comment fonctionne un ordinateur – en supposant l'adéquation avec ses spécifications – et il ne fait qu'effectuer un calcul à notre place, mais pas un raisonnement qui nous serait occulté. En effet, Tymoczko pourrait reprocher ici, comme le fait Fallis, le manque de certitude concernant le fonctionnement de l'ordinateur, or il semble reprocher le manque de connaissances de ce qu'est censé faire l'ordinateur, ce qui est bien moins légitime. En effet, ce n'est pas l'ordinateur qui est attaqué, mais le programme, or ce programme est indéniablement un fait mathématique dont la valeur n'a rien à envier aux autres énoncés mathématiques, et cette certitude est de jour en jour renforcée par le développement et la généralisation de la correspondance de Curry-Howard, qui dégage l'identité logique et formelle entre preuves mathématiques et programmes informatiques [34]. Si Simon est un être supérieur dont on ne peut percer les pensées, les ordinateurs sont simplement des exécutants de programmes, autrement dit des lecteurs de preuves mathématiques capable d'en effectuer les tâches de vérification les plus triviales que sont les opérations élémentaires. Le développement moderne de l'informatique théorique et de la théorie des langages nous enseigne que le pinacle de la formalisation est la preuve implémentée sur ordinateur, ce qui rassure concernant la preuve informatique tant décriée par Tymoczko, mais Fallis remarque bien que cela ne s'applique nullement au cas de la méthode PDP.

Le problème de la méthode PDP pourrait être le fait que, contrairement aux ordinateurs, cette méthode ne construit aucune preuve formellement, et il s'agit non seulement d'une preuve fondée sur l'expérience, mais en plus fondée sur un seul résultat et non pas sur un calcul réalisé mais seulement simulé par le comportement constaté de l'ADN : si les preuves par ordinateur ne sont pas vérifiables car elles ne produisent qu'une preuve formelle et ne font qu'exécuter des calculs à la place de l'homme, la méthode PDP franchit une étape supplémentaire en n'étant ni vérifiables ni formalisables.

La question de savoir si toute preuve formalisable est expertisable est immédiatement tranchée par la négative *via* l'argument du temps de l'étude nécessaire pour une telle expertise : certaines preuves formalisables ne sont pas étudiables en une durée humaine, comme nous l'avons déjà remarqué avec le cas des preuves par ordinateurs, telles celle du théorème des quatre couleurs. Un reproche à l'argument est la singularité de la situation : les preuves sont essentiellement formalisées après leur réalisation, et cette entreprise est souvent très longue et prend beaucoup plus de temps du fait des contraintes formelles importantes auxquelles doivent se plier les mathématiciens, formalisation de fait souvent laissée inachevée une fois que la conviction de la correction des arguments est suffisamment forte pour convaincre.

3.2. **Preuves et connaissance mathématique.** Tymoczko conclut finalement qu'« il n'y a pas de preuve vérifiable du [théorème des quatre couleurs], mais nous savons qu'il y en a une preuve formelle » par l'intermédiaire de l'ordinateur. Or, cela ne solutionne en rien la dissension existant entre les partisans de la méthode informatique et ceux qui s'opposent à son utilisation mathématique, ainsi qu'entre les partisans des méthodes probabilistes comme PDP et ceux qui rejettent ce nouvel outil. De fait, quel que soit le nom que l'on donne aux résultats issus de ces nouvelles méthodes, cela ne peut empêcher la question philosophique du statut d'une telle connaissance de se poser, car la preuve doit être le canon de la connaissance mathématique et c'est donc en éclaircissant les objectifs et le statut de cette connaissance que la notion de preuve trouvera ses éclaircissements. Fallis note en effet dès le commencement de son article un état figé de la preuve mathématique dans

30. [1], p. 60
31. [1], p. 72
32. *ibid.*
33. [1], p. 73
34. Ainsi, tout programme est une preuve donc les parties obscures sont des boucles, qui ne sont que des récurrences.

lequel « un argument déductif est considéré par les mathématiciens (et par beaucoup de philosophes) comme étant le *seul* moyen légitime d'établir la vérité d'une assertion mathématique » [35], et s'il admet que des méthodes telles la preuve assistée par ordinateur sont tolérées et ont tendance à entrer dans la norme, d'autres le sont beaucoup moins à l'image des méthodes probabilistes, sans que cette distinction ne soit fondée sur une quelconque argumentation cohérente et mathématiquement ou philosophiquement étayée. La place centrale de la notion de "preuve" est établie depuis l'Antiquité en mathématiques, et les mathématiciens ont dès lors n'eut de cesse de justifier avec précision et irréfutable clarté leurs résultats, augmentant toujours plus les standards de rigueur, et l'importance de cette notion appelle donc une attention toute particulière pour déterminer, de manière plus générale que sur quelques exemples seulement, les tenants et aboutissant des particularités de la preuve, et de fait de la nature épistémique du savoir mathématique.

Le problème du statut de la connaissance apportée par la preuve du théorème des quatre couleurs est fondamental, et Tymoczko ne manque pas de le noter, car la place centrale des mathématiques en philosophie, « parce que les mathématiques restent comme l'un des pinacles de la raison humaine et de la pensée rationnelle et parce que la connaissance mathématique peut paraître si déconcertante, sinon vraiment mystérieuse » [36], en fait un objet d'étude privilégié des philosophes de la connaissance. La grande importance attachée tant par les philosophes que par les mathématiciens à contrôler la légitimité des méthodes de preuves en mathématiques provient du fait que l'édifice mathématique est une structure cohérente et interdépendante, et la faillite de l'une de ses parties mènerait à la faillite générale du modèle de la science même, c'est la raison pour laquelle « "notre quête de vérités mathématiques absolues" requiert des méthodes qui garantissent une certitude absolue » [37]. Or la méthode PDP est immédiatement identifiée comme souffrant de deux défauts majeurs qui lui ôtent cette propriété fondamentale. Non seulement la méthode n'est pas exhaustive, mais en sus on doit redouter des défaillances techniques lors des phases de manipulation de l'ADN. Toutefois cette faillibilité dans la preuve ne peut être la cause réelle du rejet des méthodes probabilistes par la communauté mathématique car « en dépit de l'importance présumée de la certitude absolue, les méthodes acceptées par les mathématiciens ne garantissent pas non plus une certitude absolue » [38], ainsi la classification des groupes simples. Cette méthode, à l'image de la preuve du théorème des quatre couleurs, n'est donc peut-être pas la meilleure méthode de preuve, mais c'en est une valable. Mis à part quelques écoles, récentes comme restreintes, les mathématiques sont posées comme étant incommensurables aux sciences naturelles, et toutes les oppositions de caractères en sciences sont une certaine projection de cette opposition entre mathématiques et sciences naturelles. Or l'admission mathématique du théorème des quatre couleurs en l'état actuel des connaissances ferait sortir les mathématiques de ces oppositions pour les mélanger aux sciences naturelles, notamment en intégrant la possibilité que les connaissances soient a posteriori, car on ne peut prétendre à la connaissance purement a priori du résultat sans avoir fait l'expérience réalisée par l'ordinateur, et « il n'est pas plausible de soutenir que le théorème des quatre couleurs [soit] connu par la raison seule » [39]. Cela condamnerait « notre connaissance [à reposer] sur des suppositions empiriques générales sur la nature des ordinateurs » [40]. Toutefois, cette connaissance, qui est réellement a priori car potentiellement a priori, demeure soumise à la réalité des ordinateurs qui est bien une contrainte empirique, mais au même titre que nos actes.

3.3. **Le caractère a priori du savoir mathématique.** Tymoczko s'attache à trouver des garanties au caractère général des vérités mathématiques, mais c'est Fallis qui reconnaît que les arguments vont toujours dans le sens d'un "a priori" primordial, caractéristique fondamentale des résultats mathématiques et de la connaissance mathématique, qui ne doit donc reposer que sur une pensée générale. Cependant le problème du flou d'une telle définition est immédiatement soulevé et une connaissance a priori n'a pas nécessairement la même signification d'une personne à l'autre. Cette situation, qui n'est pas marginale et se retrouve dans plusieurs pseudo-preuves exotiques de résultats qui ne sont pas anodins et qui ont une large portée théorique, « entraîne que nombre de croyances usuelles en ce qui concerne les mathématiques doivent être abandonnées ou modifiées » [41], notamment en ce qui concerne la disjonction entre mathématiques et sciences naturelles et le caractère a priori et supérieur des résultats mathématiques.

Une première définition peut être celle que Fallis note comme étant le lieu commun de l'a priori, selon laquelle « quelque chose est une garantie a priori si et seulement si elle justifie notre croyance indépendamment de toutes les expériences que nous pourrions réaliser » [42], ainsi que le sous-entend Tymoczko. Toutefois Fallis remarque qu'elle ne peut être imputée aux méthodes des quatre couleurs ou PDP, car certaines autres méthodes mathématiques acceptées tomberaient également sous le coup d'une telle législation. En effet, les preuves déjà citées de l'infirmation de l'hypothèse de Riemann [43] ou de la

35. [2], p. 165
36. [1], p. 76
37. [2], p. 171
38. *ibid.*
39. [1], p. 77
40. *ibid.*
41. [1], p. 63
42. [2], p. 177
43. [4], qui en est à sa troisième édition !

classification des groupes simples pourraient présenter des erreurs dans leurs preuves, et donneraient donc lieu à des savoirs a priori qui ne sont pas des connaissances réellement mathématiques car ce sont des connaissances fausses.

Il faut donc une caractérisation plus faible, et Fallis propose que « quelque chose est une garantie a priori si et seulement si elle justifie notre croyance indépendamment de toutes les expériences que nous avons réalisées » [44]. D'étrangères, les expériences deviennent simplement non nécessaires, et les connaissances ainsi acquises sont sujettes à des modifications ultérieures éventuelles. (cf. note 23 : la preuve est elle-même une sorte d'expérience). Mais la caractérisation est également imparfaite et certaines méthodes mathématiques tombent hors de son champ, ainsi la preuve informatique du théorème des quatre couleurs qui se fonde sur des qualités supposées des ordinateurs et des programmes, de la même manière que les preuves telles celle de la classification des groupes simples se fonde sur la fiabilité d'autres mathématiciens.

Vient alors la conception d'Azzouni, selon qui « une garantie (qui invoque des données empiriques) peut relever de la science empirique mais elle peut aussi relever seulement de ce que l'on appelle l'expérience préscientifique » [45], établissant ainsi une distinction entre l'empirique et l'expérience, invoquant une gradation épistémique au sein même de l'intervention expérimentale du réel dans les arguments. Plus précisément, « l'expérience préscientifique est tout ce sur quoi repose notre connaissance du sens commun sur le monde » [46], les connaissances qui découlent des capacités dont on ne doute jamais et dont on ne peut douter, en tous cas sans sombrer dans un doute hyperbolique qui ferait que nous ne serions sûr d'aucune preuve mathématique aussi formalisée et limpide soit-elle. Fallis ne manque pas de remarquer que la discussion se situe ici sur une pente relativement glissante et que les arguments frôlent tant l'illusion que la métaphysique : il s'agit de dégager les limites humaines entre la certitude réelle et l'illusion, de réussir à dégager la justification naturelle de la volonté de justification psychologique. « En fait, nous ne pouvons même pas confirmer [une] théorie scientifique si nous n'étions pas déjà convaincu de notre capacité à faire des choses de manière fiable telles que juger de l'emplacement de pointeurs » [47], de la certitude de ce qui est écrit sur un tableau ou un livre, et de manière un peu plus élaborée et osée, mais reposant sur la même habitude demeurée intrahie et intacte du fonctionnement des disques durs : des failles peuvent exister, mais aucune corruption invisible et perverse, telle la modification d'une formule en une autre sans plus d'effet, n'a jamais été observée. Et cela sans que toutes ces certitudes reposent sur une connaissance de théories les justifiant. Cette non nécessité de connaître les intermédiaires théoriques – qui seraient à première vue les seuls à même de justifier la connaissance finale en complétant les arguments de la preuve, mais on risquerait ainsi de tomber dans une régression infinie dont le risque a été tant identifié qu'écarté depuis longtemps – correspond à une sorte d'*axiomatisation de l'usuel*, d'axiomatisation du monde en quelques vérités indubitables et élémentaires mais nécessaires à la justification de la pratique mathématique telle que l'esprit essaye de l'ériger en méthode supérieure.

Si la méthode de preuve du théorème des quatre couleurs peut éventuellement être défendue, comme le signale Tymoczko, comme faisant partie de cette axiomatisation nouvelle de l'usuel, la méthode PDP reste directement empirique et repose sur trop d'incertitudes et de particularités pour espérer arriver à se justifier d'elle-même. Si les méthodes faisant intervenir des relations physiques, telles l'utilisation des ordinateurs, rencontrent beaucoup de réticences à être considérées comme des preuves, c'est qu'elles reposent sur des faits moins familiers et dont la constance est moins garantie que la phénoménologie de la craie qui sous-tend les pratiques mathématiques usuelles, bien qu'elle pourrait pourtant faire intervenir des théories physico-chimiques des plus élaborées ; il est donc peu étonnant de constater la position plus difficile encore des méthodes reposant sur les comportements probabilistes de l'ADN, dont on ne maîtrise pas parfaitement la manipulation et dont l'utilisation effective reste limitée et faite à un niveau très spécialisé, dont l'accès n'est pas encore ouvert aux mathématiciens eux-mêmes et donc dont ils ne peuvent accepter la fiabilité en en intégrant la pratique. Fallis se montre cependant optimiste et « s'il est possible pour la confiance d'un individu dans la fiabilité des ordinateurs de ne reposer que sur l'expérience préscientifique, alors il devrait éventuellement être possible pour la confiance d'un individu dans la fiabilité des manipulations de l'ADN de ne reposer également que sur l'expérience préscientifique » [48]. Toutefois la différence de considération entre méthodes informatiques et d'autres méthodes, telle la méthode de Rabon, prouve que le problème n'est pas exactement cerné par la proposition de considérer des arguments préscientifiques ainsi qu'Azzouni le propose, et la définition est probablement trop faible et englobe aussi bien des preuves mathématiques que des méthodes non acceptées.

Quoi qu'il en soit, la méthode PDP est fondée sur les mêmes méthodes que toute recherche exhaustive, et « même si les mathématiciens voulaient délaisser les preuves par ordinateur, les preuves probabilistes continueraient à être un problème » [49]. Il n'y a donc pas d'argument épistémique s'opposant à la méthode PDP et qui ne fait pas tomber en défaut d'autres piliers de la pratique mathématique usuelle, et les détracteurs des méthodes probabilistes doivent donc rechercher

44. [2], p. 177
45. [2], p. 178
46. *ibid.*
47. *ibid.*
48. [2], p. 179
49. [2], p. 180

de nouvelles caractérisation de l'a priori propre aux preuves mathématiques, car « il n'apparaît pas, toutefois, que la notion d'"indépendance de l'expérience" puisse établir une démarcation entre la méthode PDP et les méthodes acceptables par les mathématiciens » [50].

De la même manière que Kripke estime que la décision de la primalité d'un nombre est un résultat a posteriori d'un calcul, Tymoczko estime qu'il en va de même pour le théorème des quatre couleurs, ce qui est le cas actuellement. Cependant cela n'en fait pas une connaissance qui est enchaînée aux sciences naturelles, et nous estimons que toutes ces connaissances sont des connaissances authentiquement mathématiques car potentiellement a priori, la technicité de la preuve pouvant mener à cette connaissance a priori ayant été laissée à un intermédiaire au moins aussi fiable que les mathématiciens [51]. De même, le problème des tests de primalité est tout à fait expertisable [52]. Toutefois, Tymoczko estime que, définitivement, « le théorème des quatre couleurs est une partie des mathématiques pures qui ne peut être connue des mathématiciens qu'a posteriori » [53]. S'il est indéniable que le théorème repose actuellement sur un argument qui peut être considéré comme expérimental, artificiel et a posteriori car non opéré par l'esprit humain, il n'est aucune raison de soutenir que « le problème des quatre couleurs n'est pas une question formelle » [54], car il en est une comme tout problème sur les graphes, et comme tout problème d'informatique théorique, et nous pouvons espérer qu'il trouvera un jour un démonstration purement formelle et répondant à tous les requisits philosophiques d'une preuve mathématique, nous le devons.

3.4. **Un a priori a posteriori.** Après avoir passé l'essentiel de la discussion à débattre de l'impact d'une telle preuve dans le contexte de la justification du théorème des quatres couleurs, Tymoczko s'attaque au problème complémentaire de la découverte du résultat, qui est sans aucun doute l'un des aspects les plus particuliers de l'entreprise de Appel, Haken et Koch. Le problème est posé notamment par les limites de l'ordinateur, et nous ne pouvons espérer faire des recherches exhaustives de manière générale grâce à cet outil qui, si puissant soit-il, reste limité. « Il doit y avoir quelque raison d'espérer que l'ordinateur s'arrêtera avec une solution dans un temps raisonnable » [55]. Dans le cas du théorème des quatre couleurs, il s'agit d'une borne arbitraire devinée à partir de quelques considérations probabilistes sur le problème des configurations à tester, qui se trouve être une bonne borne. De plus, « avec cet argument probabiliste il y avait un argument qui requérait que les techniques puissent être programmées dans un ordinateur » [56], et l'immense travail technique de Koch a permis de remplir ces conditions de possibilité pour effectuer la preuve à l'aide de l'ordinateur. Pour Tymoczko, cela rajoute à la nécessité d'inclure l'utilisation des ordinateurs dans les modalités d'une preuve mathématique celle d'y inclure les probabilités. Or si les ordinateurs apportaient un aspect empirique typiquement non mathématique, les probabilités apportent une vérité non totale et « ne peuvent être expliquées en des termes ontologiques pour lesquels toute affirmation est vraie, ou fausse, dans tous les mondes possibles » [57]. Depuis le théorème des quatre couleurs, cette possibilité d'avoir des vérités plus ou moins probables, mais qui « d'autre part [...] contien[t] inévitablement des possibilités d'erreur » [58] que les preuves formelles classiques ne peuvent pas avoir. Ce risque d'erreur inhérent à ces méthodes probabiliste retire l'aspect absolu et immuable des vérités mathématiques.

Ces changements fondamentaux dans la pratique interne des mathématiques ne peuvent qu'engendrer des révolutions de grande ampleur en philosophie, et « après le théorème des quatre couleurs, les preuves formelles ne peuvent continuer à servir la philosophie des mathématiques comme le seul paradigme de l'activité mathématique » [59]. Après une réticence initiale à tolérer la présence des ordinateurs en mathématiques, Tymoczko se plie au jugement interne de la pratique mathématique et des routes suivies par les mathématiciens pour prouver les vérités de leur domaine, admettant que « l'ancienne idée qu'une preuve est une expérience de pensée se suggère elle-même ici. Il n'y a pas un tel abîme entre les expériences de pensées et les expériences sur ordinateur qu'il y en a entre les preuves formelles et les expériences » [60]. Il suggère, pour reprendre le concept de paradigme scientifique de Thomas Kuhn ainsi que son jugement sur le sujet, que le paradigme classique des mathématiques est en train d'écouler en s'enrichissant de l'intervention des ordinateurs et des techniques probabilistes. Si on ne peut nier que la recherche mathématique a toujours été relativement expérimentale, et Kuhn lui-même reconnaît

---

50. *ibid.*
51. Et le résultat est alors potentiellement connu de manière a priori : soit on peut expertiser la preuve exécutée par l'ordinateur et la confirmer, la réductibilité totale ayant été réellement prouvée, soit on trouve que l'un des cas est incoloriable par quatre couleurs, et le théorème est infirmé. Cette possibilité fondamentale est d'autant plus accessible que le nombre de cas à vérifier pour prouver le théorème des quatre couleurs est fini.
52. d'autant plus que nous savons depuis peu que « PRIME is in P », et donc que le problème mentionné par Kripke est « relativement accessible » par rapport au temps humain.
53. [1], p. 77
54. [1], p. 78
55. [1], p. 79
56. *ibid.*
57. [1], p. 80
58. *ibid.*
59. *ibid.*
60. [1], p. 81

que l'intuition fait partie intégrante du paradigme classique des mathématiques, Tymoczko constate que cette évolution est essentiellement due aux conditions de familiarité dans laquelle sont les mathématiciens vis-à-vis de l'ordinateur, et si la nouvelle méthode est tolérée et que le théorème des quatre couleurs est accepté consensuellement comme un théorème, c'est que les mathématiciens travaillent désormais tous avec des ordinateurs et ont fini par leur accorder leur confiance, ainsi qu'il le font à leurs développements ou à leurs calculettes, faisant que « le monde mathématique était déjà prêt à reconnaître la méthodologie de Appel et Haken comme légitime » [61]. Comme toujours, un changement de paradigme est une évolution douleureuse qui se fait dans l'adversité et les oppositions, mais comme l'histoire nous l'a montré, seule l'utilité et la fécondité des nouvelles méthode juge le nouveau modèle qui s'impose avec le développement des nouvelles branches de la science, notamment l'informatique et les probabilités. L'éclosion d'un nouveau paradigme, malgré la difficulté à le saisir et à le juger au moment de son apparition, est une occasion importante de développer la philosophie des sciences de Kuhn, et le problème des quatre couleurs aura de toutes manières des conséquences pour l'ensemble des théories de la connaissance.

4. Le jugement interne comme gage de fiabilite : le pouvoir et la valeur de la conviction

4.1. **La fiabilité des méthodes.** En ce qui concerne le théorème des quatre couleurs, la preuve semble convaincante car la communauté mathématique l'a consensuellement acceptée, indépendamment de possibles controverses philosophiques. On peut déduire de cela que la méthode utilisée a été de fait mise au même niveau que les vérifications usuelles, et ce fait, de toutes manières imposé par l'intérieur des mathématiques, amène nécessairement à une révision de la notion de preuve, et cela « pourrait servir de stimulation à la philosophie générale pour repenser les relations communément acceptées entre connaissance, raison et expérience » [62]. Mis à part d'éventuelles incertitudes physiques et techniques que Fallis ne manque pas de soulever très justement, la fiabilité des ordinateurs est sans pareille, et jamais il n'a été observé de programme ne faisant pas ce qui était attendu de lui [63]. Ce n'est pas seulement sa puissance et sa vitesse qui sont louées, mais plus généralement l'extrême fiabilité de l'exécution des tâches, constat de nos jours formalisé par les développements de la logique et son application à deux branches de l'informatique légitimant l'utilisation de l'ordinateur : la spécification et la vérification. De manière plus général, les mathématiciens ne doutent pas de leurs capacités de calcul, alors qu'elles sont bien peu fiables ; ils ne doutent pas de la constance des formules écrites dans leurs livres, alors que les théories quantiques autorisent ces formules à être spontanément modifiées ; ils ne doutent pas de la pointe de leur crayon, alors que rien ne garantit qu'elle écrit ce qu'elle est censée écrire, ni qu'ils voient ce qu'il sont censés voir, et la liste des tels doutes pourrait s'allonger à volonté. Si ces croyances sont fondées sur certaines théories physiques ou biologiques, c'est essentiellement le constat pratique de leur infaillibilité et de la constance de leur comportement qui amène à ne plus en douter, et il n'y a alors aucune raison de ne pas appliquer ce critère aux ordinateurs qui ont montré une robustesse bien plus grande que les autres actes élémentaires des mathématiques. Tymoczko dépasse toutefois cette caractéristique en affirmant qu'elle ne suffit pas pour justifier le qualificatif de preuve, reposant la question de savoir ce qui légitime un tel jugement, si ce n'est la pratique interne et la connaissance réelle du domaine. Si le philosophe peut réfléchir à la signification et au sens des mathématiques ainsi qu'à ses portées philosophiques, la légitimité de définir les standards de la pratique mathématique incombe-t-elle plus au mathématicien ou au philosophe ?

La méthode d'Adleman présente une possibilité d'erreur lorsque tous les chemins ne sont pas engendrés à la première étape, mais la probabilité d'une telle défaillance est très faible et n'est qu'un argument supplémentaire pour accréditer la thèse du résultat de la non existence de chemins hamiltoniens, de sorte que « pour tout objectif pratique, ce résultat pourrait être considéré comme une certitude, puisque la majorité des conclusions "certaines" dans la vie de tous les jours est basée sur des probabilités nettement inférieures » [64]. Fallis remarque donc que bien que l'on prouve généralement qu'un résultat est vrai en en fournissant une preuve, la méthode PDP suggère un cheminement inverse, en suggérant que le résultat admet une preuve en donnant de bonnes raisons de considérer le résultat comme vrai. Si la position est celle d'un réaliste optimiste et progressiste, elle se heurte aux problèmes de l'axiomatisation des mathématiques et de leurs limites, car si un résultat prouvable est toujours vrai, un résultat vrai – ce qui n'est pas ambigü dans le cas de l'existence d'un chemin hamiltonien – n'est pas forcément prouvable, en tous cas pas dans le système axiomatique que le monde mathématique a actuellement admis comme étant le "bon", et les théorèmes d'incomplétude de Gödel nous condamenent d'ailleurs à souffrir éternellement de cette insuffisance. Quoi qu'il en soit, l'usage d'un ordinateur souffrant des même maux que la méthode PDP mais étant accepté, on ne peut imputer le caractère expérimental et a posteriori PDP et la même démarche

61. [1], p. 82
62. [1], p. 78
63. Précisons notre pensée : d'un point de vue purement théorique, l'électronique et la mécanique de l'ordinateur étant censés fonctionner comme ils le doivent – et lorsque tel n'est pas le cas, cela aboutit infailliblement à une défaillance du système explicitement déclarée, et tous les composants matériels d'un ordinateur sont aujourd'hui contrôlés extérieurement et les systèmes de contrôle peuvent récupérer une erreur à différents niveaux ; c'est bien la raison pour laquelle le « bug » est aujourd'hui le concept fondamental de l'informatique –, l'ordinateur semble d'une perfection inégalable par l'homme.
64. [2], p. 170

intellectuelle qui légitime les résultats obtenus grâce aux ordinateurs devrait s'appliquer aux résultats obtenus grâce à la méthode PDP.

Concernant la fiabilité du résultat, Fallis défend que le progrès de la technique réduira les écarts de mesures et les défauts de manipulation, permettant d'atteindre une certitude potentielle arbitrairement grande. C'est un argument qui s'appliquerait également à la faillibilité des ordinateurs. Une éventuelle borne supérieure de certitude, trace d'une imprécision inhérente à toute mesure, n'est conditionnée que par l'expérience effectivement menée, et si elle est irrémédiablement bornée, elle est aussi potentiellement infinie et la certitude intrinsèque à la méthode est donc potentiellement parfaite [65]. Toutefois, ces espoirs sont essentiellement pragmatiques et a posteriori, et ne jouent pas en faveur de la conception générale que l'on peut se faire d'une preuve mathématique. De plus, le principe d'incertitude de Heisenberg, tel qu'il est formulé dans les théories physiques actuelles, ferme la porte à tout espoir de précision absolue dans le domaine des mesures. Indépendamment de la vérité ou non de la théorie physique actuelle, cette possibilité d'une certitude maximale non totale ne peut être écartée sans plus de justification et ne peut donc légitimer entièrement les méthodes. Mais nous croyons que cela ne change pas du cas du calcul humain : nous avons "crée" l'écriture, en nous fondant sur certaines propriétés de la nature qui sont les conditions de possibilité de cette écriture, et nous nous y fions sans plus de doute, et nous avons de même crée l'ordinateur et la manipulation génétique. Nul ne peut nier l'influence croissante des comportements naturels et la complexification de la maîtrise, mais ce mouvement de création, exploitant les constats usuels sur la nature des choses, puis d'intégration au corpus des méthodes demeure identique.

Ces méthodes sont toutefois incontestablement des risques supplémentaires d'incertitude, mais « il n'est pas clair que l'introduction de sources d'incertitude supplémentaires soit nécessairement un revers au niveau épistémique » [66], car une source d'incertitude supplémentaire n'implique pas nécessairement une incertitude supplémentaire effective. Et comme nous avons déjà remarqué concernant la supériorité de fiabilit de l'ordinateur sur l'homme, « les méthodes probabilistes sont typiquement beaucoup plus simples que les méthodes déterministes qui font les mêmes tâches » [67], et si une source d'incertitude supplémentaire apparaît avec l'introduction de méthodes probabilistes, elle est amplement contrebalancée par la réduction de l'incertitude résultant de la difficulté d'exécution, ce qui fait que l'on peut s'attendre à une certitude plus forte en fin de comptes.

« Les mathématiciens préfèrent clairement les méthodes qui fournissent une garantie (in ?)conditionnelle, mais cette préférence peut être due à des considérations esthétiques plus qu'épistémiques » [68]. Fallis conclut à des critiques globalement non pertinentes et qui relèvent plutôt, comme le remarque Tymoczko, de la réticence à accepter un changement de paradigme, tout du moins un changement de méthode, ce qui fait que « nous devons encore connaître les raisons de l'importance épistémique [de la question] et nous devons savoir que dire au sujet des cas tels que le second théorème d'incomplétude » [69].

4.2. **Neutralité épistémique des méthodes.** Malgré cette nécessité d'une puissance inhumaine et l'intervention de l'informatique, « dans ses grandes lignes, la logique de la preuve du théorème des quatre couleurs est aisée à voir. Il s'agit d'une preuve par récurrence qui requiert une disjonction de nombreux cas » [70]. Les idées de la preuve existent donc bien derrière l'utilisationd es ordinateurs, et c'est la théorie proprement mathématique et humaine qui a rendu possible la structure d'une telle preuve et sa réalisation, seul l'outil étant une réelle innovation. De manière générale, Tymoczko remarque bien que l'utilisation des ordinateurs n'est plus étrangère aux mathématiciens depuis déjà longtemps, par exemple dans le domaine du traitement des équations aux dérivées partielles qui se fait essentiellement par approximations numériques, ou encore en logique propositionnelle avec les logiciels de preuves assistées. Mais à la grande différence de ces deux exemples, « ce qui rend l'utilisation des ordinateurs si dramatique dans le cas du théorème des quatre couleurs est le fait qu'il apporte une extension authentique de notre connaissance en mathématiques pures. Ce n'est pas qu'un simple calcul, mais la production d'une preuve d'un résultat substantiellement nouveau » [71]. Toutefois, si Tymoczko reconnaît que les simples calculs ne seraient pas un problème, quel est le problème apporté par le cas particulier des quatre couleurs ? Il affirme pourtant lui-même que la partie créatrice de la preuve, sa structure et ses idées, est apportée par le mathématicien de manière classique, et que seules quelques vérifications techniques sont confiées à un ordinateur, qui ne fait finalement qu'opérer des calculs. Le calcul a d'ailleurs toujours été un moyen et n'a jamais été érigé comme fin en soi, et les théories qui cherchent à optimiser le calcul ont toujours une visée plus lointaine, ainsi l'optimisation ou les différentes méthodes d'approximation ou d'accélération de convergence, qui permettent d'accélérer non pas les calculs qui devaient être faits, mais l'arrivée du résultat qui, lui, est

65. Nous retrouvons là l'esprit des infinis et des limites de la pratique analytique, qui est un infini potentiel et non un infini essentiel.
66. [2], p. 175
67. [2], p. 176
68. [2], p. 175
69. [2], p. 176
70. [1], p. 68
71. [1], p. 69

unique et est bien l'objectif de tous. L'effort reste constant et tend à trouver des résultats théoriques et faire progresser la connaissance mathématique.

Finalement, les preuves faisant appel aux ordinateurs, telle la preuve du théorème des quatre couleurs, n'ont pas le même statut pour Tymoczko que les preuves classiques, et notamment « aucune preuve connue du théorème des quatre couleurs n'est vérifiable, et il n'y a pas de preuve connue qu'une preuve formelle existe » [72] du fait de l'inétudiabilité des ordinateurs eux-mêmes, faisant des preuves fondées sur cet usage des preuves particulières. Ainsi la preuve du théorème des quatre couleurs repose sur une partie théorique classique, qui prouve le résultat voulu si un ordinateur sort une réponse affirmative, et sur une partie purement expérimentale, qui est de vérifier si, en effet, toutes les réponses sorties sont positives. Indéniablement cette dernière étape est une expérience, et on ne peut conclure de manière purement a priori, autrement dit avant d'avoir réalisé cette expérience et d'en avoir vu les résultats. Mais c'est une expérience du même ordre que tout calcul que l'on mènerait à la main , que toute disjonction de cas, que toute vérification d'un développement formel. Nous découvrons dans les propos de Tymoczko, avec Maximilien Winter, « le vieux préjugé scolastique contre l'expérience [qui] repose au fond sur une confusion, la confusion entre la méthode *empirique* et la méthode *expérimentale* » [73]. Contrairement à la généralisation en une loi ou en un théorème de quelques observations hasardeuses et peu représentatives, l'expérience est une observation qui a une valeur générale et théorique et qui est fondée sur une méthode scientifique. Or l'expérience mathématique n'est autre que le calcul, que nous faisons toujours pour voir comment se comporte une fonction ou une suite en regardant des valeurs particulières, mais que nous faisons aussi pour prouver tous les théorèmes généraux, et c'est ce qui fait dire à Winter que « ce qui distingue l'empirisme de l'expérimental, c'est l'introduction rigoureuse du calcul » [74], car le modèle de la science est les mathématiques et le modèle de l'expérience scientifique doit donc être l'expérience mathématique, qui n'est autre que le calcul. Et cette position est, une fois encore, légitimée de l'intérieur des mathématiques et par un incontesté maître, car « l'expérience n'est pas pour M. Poincaré un procédé de contrôle, mais une méthode de démonstration » [75], et on ne saurait retirer à Poincaré sa valeur de mathématicien. Tymoczko suggère finalement non pas d'accepter d'introduire les expériences sur ordinateur dans la méthodologie générale des mathématiques, mais d'accepter les preuves assistées par ordinateur, rejoignant notre espoir de conserver à l'ordinateur sa place de simple appui de la pensée qui n'hypothèque en rien son autonomie et sa portée dans les preuves.

Fallis relève comme première objection immédiate à cette possibilité de preuve le fait que « le problème avec PDP est qu'il ne nous fournit pas une compréhension des raisons pour lesquelles un théorème est vrai » [76], de la même manière que la preuve informatique du théorème des quatre couleurs ne permet aucunement de comprendre une éventuellement structure mathématique sous-jacente qui explique les raisons du résultat. Mais cette compréhension est une information supplémentaire que l'on ne peut qu'espérer dans la preuve de tout résultat, et Fallis s'empresse de remarquer qu'« il est apparent cependant que si apporter la compréhension est une bonne chose, ce n'est pas requis » [77] pour que la preuve ait valeur de preuve mathématique à part entière. De nombreux exemples à travers l'histoire vont en ce sens et légitiment ces propos, la compréhension réelle d'un théorème et la structure sous-jacente à un résultat ne se dégageant généralement que longtemps après son apparition, ses premières preuves et ses nombreuses utilisations. On peut par exemple citer le cas des travaux de Galois sur la résolubilité des équations polynômiales, où il a su exploiter les propriétés fondamentales des groupes de permutation de racines dont Lagrange avait commencé à entrevoir le rôle et l'intérêt, mais il a fallu attendre plusieurs décennies pour voir la notion de groupe et de résolubilité apparaître, et la justification des résultats de Galois illuminée et, en quelque sorte, expliquée par la théorie qui porte aujourd'hui son nom, mais qui lui est bien postérieure. D'autres exemples plus flagrants existent et sont plus représentatifs encore de preuves entièrement *ad hoc* ne véhiculant aucune idée ou méthode générale, et qui n'ont jamais été éclairées par une théorie englobante. Ainsi la majorité des preuves analytiques élémentaires du théorème fondamental de l'algèbre. C'est également le cas de la première preuve que Gauss a donné de la loi de réciprocité quadratique, dont lui-même n'était pas satisfait, bien que ne doutant pas de sa valeur, et n'a pu s'arrêter sans continuer toute sa vie à rechercher de meilleures preuves. Si d'autres méthodes ont éclairé la provenance du résultat et les mécanismes mathématiques qui le sous-tendent, cette première preuve reste encore aujourd'hui une preuve qui n'est comprise par aucun spécialiste de la théorie des nombres et qui ne paraît être qu'une montagne d'artifices de calculs et d'actuces formelles sans vraiment de sens, qui finissent par aboutir au résultat escompté, que l'esprit pourtant prodigieux de Gauss a mis plus d'une année entière à élaborer. La méthode PDP reste cependant une méthode qui se doit de prouver sa valeur mathématique, ainsi que la preuve du théorème des quatre couleurs, car ces preuves sont, malgré une apparence proche du réel et résultats et des motivations de type expérimentaux, de réels outils permettant de dégager des résultats éminemment mathématiques.

72. [1], p. 73
73. [3], p. 608
74. [3], p. 609
75. [3], p. 615
76. [2], p. 170
77. *ibid.*

4.3. **La conviction interne.** La dernière caractéristique que Tymoczko relève des théorèmes mathématiques est leur potentiel convainquant. Il note d'emblée qu'il s'agit d'une caractéristique peu intéressante pour le philosophe, car d'une appréciation essentiellement interne au milieu mathématique et teintée de subjectivité. Mais cela rejoint les argumentations d'Alain Bernard en faveur du rôle de la rhétorique dans le discours scientifique [78], et si cet aspect fait partie de la réalité sociale des mathématiques, il est aussi partie constituante de la pratique même des mathématiques, et depuis l'Antiquité les problèmes mathématiques ont été posés dans un objectif de convaincre un auditeur qui, ayant les mêmes armes de compréhension et de connaissance, est juge et non élève, et l'acceptation communautaire de la preuve est la garantie de sa réalité. Ainsi des idées révolutionnaires ont été très malvenues en leur temps et discréditées par un manque de compréhension, d'attention ou de foi, telles la théorie des transfinis de Cantor ou encore les idées novatrices de Galois, qui toutes étaient indéniablement correctes, vérifiables et formalisables, les propriétés mêmes par lesquelles Tymoczko caractérise les preuves, mais qui ont simplement failli passer inaperçues du fait de l'opposition interne de la communauté mathématique. Alors que Tymoczko en fait un simple critère interne et subjectif, nous pourrions argumenter qu'il est en réalité tout le contraire, une garantie fiable, sinon objective, mais opposant parfois des résistances internes purement psychologiques : le critère que Tymoczko catégorise comme étant trop faible est peut-être plus fort que les critères qu'il défend. Se pose alors la question de savoir quelle est la valeur de ce jugement interne, car s'il a tant de puissance qu'il semble le manifester par ces quelques exemples, peut-être est-ce que sa valeur s'impose par sa supériorité naturelle, et que les jugements ainsi rendus ont une plus grande valeur épistémique qu'un jugement extérieur du philosophe qui est relativement déconnecté de la réalité mathématique.

Tymoczko ne peut croire que l'on puisse être prêt à intégrer à la méthode mathématique pure le recours aux ordinateurs « lorsque l'on ne peut percevoir la forme générale de leur travail » [79], mais on peut non seulement comprendre ce que l'ordinateur fait, en comprenant la structure purement mathématique du programme qu'il exécute, mais on peut également le vérifier dans les moindres détails, celui-ci pouvant simplement afficher ce qu'il exécute, toutefois de manière toujours douteuse si l'on ne veut y croire, car rien ne garantit que ce qui est affiché ou ce qui est imprimé par un ordinateur est effectivement ce qu'il est censé afficher ou imprimer. La question de savoir « si oui ou non les mathématiciens auront suffisamment de foi dans la fiabilité des ordinateurs pour accepter ces résultats » [80] reste donc une question de croyance en l'outil plus que de justification épistémique a priori, car elle reste suspendue à la réalité du mathématicien et à l'imperfection des intermédiaires entre sa pensées et son objet, voire de sa pensée même.

Si la méthode PDP donne un résultat pour un certain graphe, le résultat a de bonnes chances d'être supposé vrai et il suffirait alors de vérifier le résultat à l'aide de méthodes plus couramment admises, comme par exemple la vérification par ordinateur, ou plus encore la vérification à la main. De plus, il est des preuves qui tombent dans cette catégorie, telle la preuve du second théorème d'incomplétude de Gödel qui n'est pas entièrement prouvé. Mais mis à part quelques résultats qui semblent être d'ordre relativement techniques et peu conséquents épistémiquement, les preuves sont généralement complètes et ce n'est jamais le cœur de la preuve et ses arguments centraux qui disparaissent par ces méthodes de la vue des mathématiciens. Si « dans ces deux cas [...] une bonne preuve est fournie que [les] détails [manquants] pourraient être comblés » [81], la méthode informatique est fondée sur le fait que la preuve est formellement parcourue et vérifiée par l'ordinateur, alors que la méthode PDP donne un résultat dont l'obtention repose sur des méthodes probabilistes moins certaines et moins maîtrisées, en tous cas pas par les mathématiciens eux-mêmes, contrairement à l'informatique, tout du moins aux ordinateurs.

4.4. **Une conviction raisonnée.** Fallis reconnaît toutefois les mêmes défauts aux preuves *via* ordinateur que Tymoczko, à savoir les risques de faillibilité soit du matériel, soit du programme. « Alors que le problème de PDP ne peut pas être qu'il ne fournit pas une certitude absolue, on peut encore suggérer qu'il ne fournit pas *assez* de certitude » [82]. La méthode PDP donne des résultats dont le degré de certitude est inférieur aux méthodes assistées par ordinateur, qui elles-mêmes sont moins certaines que les preuves purement formelles a priori [83]. Mais cela n'empêche aucune de ces deux méthodes, dont le degré de certitude semble inférieur à l'idéal mathématique, à être suffisante pour prouver la vérité mathématique qu'elles prétendent prouver. Les arguments d'ordre technique que sont la quantité ou la manipulation d'ADN pour la méthode PDP, ou les défauts matériels ou les failles logicielles pour la méthode assistée par ordinateur, ne sont donc pas un argument contre la méthode. Fallis défend, à l'inverse de Tymoczko, la légitimation des méthodes et des résultats non par des jugements a priori mais par sa non infirmation future. Si cela peut rejoindre une certaine légitimité conférée par l'intérieur de la communauté mathématique, l'argument est potentiellement biaisé par le fait qu'un tel résultat – et le

78. [5]
79. [1], p. 74
80. [1], p. 75
81. [2], p. 181
82. [2], p. 171
83. Indépendamment des faillibilités réelles et a posteriori déjà notées.

découragement général que peut être la tâche de reprendre 15000 pages de preuves pour trouver d'éventuelles failles – crée un consensus par défaut qui ne peut aboutir qu'à une forte diminution des efforts menés dans ce sens, par exemple dans la recherche de nouveaux groupes exceptionnels. Ainsi, si une telle recherche est possible, l'espoir apparaît dès lors comme trop faible pour qu'il vaille la peine d'être entretenu : il faudrait en effet non seulement que la preuve soit erronée, ce qui n'est a priori pas souhaitable car l'objectif des mathématiques comme de toutes sciences est de tendre vers une plus grande compréhension des phénomènes et de l'Univers, mais en plus que l'on trouve un groupe extraordinaire inconnu.

Fallis remarque donc que le problème n'est pas tant au niveau de la qualité de la preuve fournie, mais « que le problème avec PDP est qu'il ne fournit pas le *bon type* de certitude que ces détails [manquants] peuvent être comblés » [84]. On doit donc trouver d'autres arguments en faveur de cette méthode, qui sont centrés sur la possibilité d'achever cette preuve de manière formelle et usuelle, tout du moins potentiellement, et en tous cas trouver des arguments augmentant la fiabilité apparente de la preuve au sein de la communauté mathématique, alors que « la méthode PDP permet au mathématicien d'imaginer aisément qu'elle pourrait être incapable de compléter la preuve » [85] si elle le devait. Mais Fallis relègue ces arguments et ces nécessités à un point de vue plus psychologique qu'épistémique, car « la phénoménologie d'une expérience n'a pas nécessairement un impact épistémique » [86]. C'est donc une distinction infondée entre les différentes méthodes qui est généralement faite, basée sur une vision floue et rassurante de la preuve, plutôt que sur sa valeur épistémique réfléchie. C'est ce qui fait dire à Fallis que « c'est [sa] conviction cependant que "voir que" n'a aucun impact épistémique et que ce n'est qu'une distinction phénoménologique entre PDP et les méthodes acceptées des mathématiciens » [87]. En effet, la certitude apportée doit être absolue pour entrer dans les standards usuels des mathématiques, or ici cette certitude n'est que conditionnelle et reste suspendue à la nécessité d'un déroulement expérimental conforme à l'expérience théorique que l'on veut réaliser. Ainsi, « les méthodes acceptables pour les mathématiciens font sans doute intervenir la réalisation d'une procédure qui est telle que, si elle est réalisée correctement, alors le résultat mathématique doit être vrai » [88]. Ce qui revient à la transposition formelle théoriquement possible de l'expérience, mais ce n'est manifestement pas le cas de PDP qui est d'essence probabiliste.

Toutefois cet argument est soulevé par Fallis comme étant imputable à la méthode, mais également comme ne pouvant être rédhibitoire car d'autres preuves acceptées par le monde mathématiques souffrent du même défaut, à l'image de la preuve du second théorème d'incomplétude de Gödel, qui demeure lacunaire et « en dépit du fait que Gödel a laissé de côté de nombreux détails d'une preuve du second théorème d'incomplétude, les mathématiciens ont senti que Gödel avait prouvé ses résultats » [89]. À l'image de la preuve du théorème des quatre couleurs assistée par un ordinateur, le théorème de Gödel n'est que virtuellement vrai mais la vérité potentielle est une vérité à part entière et la différence de statut n'est que psychologique, et Gödel pourrait achever de vérifier les détails de sa preuve comme habituellement pour la prouver. Toutefois on doit également se méfier du risque d'illusion que les résultats encourent alors, et l'argumentation en faveur de ces méthodes doit permettre d'éliminer toute possibilité de doute. Même sans vouloir définir plus avant ce critère du "voir que", qui semble condamné par essence à conserver un aspect définitivement flou, Fallis se propose de prouver que son utilisation en pratique n'en fait pas un critère pouvant rejeter la méthode PDP. À l'image de grands penseurs, on omet toujours certaines preuves en fonction du niveau de connaissances et de compréhension auquel on se place [90]. Toutes les preuves actuelles semblent donc reposer sur ces évidences du "voir que" qui est reproché à la méthode PDP, et cela ne peut donc constituer une différence entre les deux. De plus, les illusions sont nombreuses et les arguments du type "on voit que" sont la porte ouverte aux erreurs qui passent inaperçues parce que le mathématicien s'est dispensé de toute tentative de justification, par paresse ou de par la réputation de l'auteur. Ainsi des résultats grossièrement faux sont parfois avancés. En outre, « tant que nous n'aurons pas une caractérisation précise de "voir que", il y aura des doutes sur les raisons que les mathématiciens ou les philosophes pourraient avoir de rejeter PDP » [91], en tous cas pas de raison autre que subjective et psychologique, voire sociale.

84. [2], p. 181
85. [2], p. 182
86. *ibid.*
87. *ibid.*
88. [2], p. 174
89. [2], p. 175
90. Ce que l'on ne manque pas de constater dans le côtoiement usuel des « donc » comme des « clairement » ou des parties laissées en exercice au lecteur dans les publications mathématiques, sans que personne n'y trouve à y redire.
91. [2], p. 184

5. CONCLUSION : LA NECESSITE D'UN CONTROLE EPISTEMIQUE A POSTERIORI

Les deux études de Tymoczko et Fallis remettent en cause les positions classiques de la philosophie des mathématiques, et la recherche d'une plus grande précision n'aboutit qu'à la mise au jour des insuffisances des conceptions qui étaient peut-être idéales au début du XX^{s} siècle, mais qui ne sont plus ni nécessaires ni suffisantes compte tenu de l'évolution de la pratique mathématique et des exigences des mathématiciens. Ainsi l'apparition et le développement des méthodes informatiques et probabilistes montre l'illusion nourrie dans la demande d'expertisabilité des preuves tout en dévoilant la structure lacunaire inhérente à toute preuve mathématique, comblée par une intuition et une pratique sociale dont les fiabilités sont des plus douteuses. L'idéal de formalisation se montre satisfaisant ni pour contrôler ces dérives, ni pour augmenter la certitude des résultats en découlant, et les failles des mathématiques formelles semblent ne pouvoir être comblées que par la pratique réelle des mathématiques, autrement dit grâce à l'expérience. C'est enfin sur le champ désormais ouvert des réflexions sur la connaissance mathématique et sur le statut des preuves dans le processus d'acquisition de cette connaissance que les caractéristiques proposées par Tymoczko et Fallis pourraient trouver leurs complémentaires en les méthodes réelles de démonstration ainsi qu'en la pratique réelle des mathématiques.Les mathématiciens discriminent entre les méthodes de manière faussement argumentée, se fondant sur des raisons floues et subjectives, et il ne saurait y avoir de position claire sur le sujet tant que la communauté mathématique ne se sera pas accordée sur le rejet absolu de tout résultat découlant d'un expérimental non humain, ou sur l'acceptation de méthodes expérimentales dont les critères sont clairement établis.

Les échecs successifs rencontrés lors des tentatives de caractérisation des preuves mathématiques ou de la nature de la connaissance mathématique mènent ainsi à l'abandon partiel des thèses classiques, et l'apparition de méthodes fondamentalement novatrices accorde à l'opinion interne à la communauté mathématique ainsi qu'à la fécondité des résultats leur poids dans le jugement des méthodes, sinon à la compréhension de la nature de la connaissance mathématique. Si ces deux études n'apportent pas de réponse aux problèmes primordiaux qu'elles soulèvent, elles ont le mérite de dévoiler les faiblesses d'une conception figée des mathématiques. Si les deux auteurs ne défendent pas une intégration sans réserve des nouvelles méthodes et des croyances des mathématiciens à la méthodologie mathématique, ils ont le mérite de montrer le rôle central des méthodes de preuves comme de la psychologie des mathématiciens dans l'acquisition et le jugement de la connaissance mathématique. Si l'édifice abstrait et logiciste des mathématiques s'effrite, c'est pour mettre au jour une charpente humaine sur laquelle tout se fonde. L'histoire témoigne aujourd'hui des échecs de ceux qui ont espéré construire de toutes pièces une système englobant les mathématiques, Tymoczko comme Fallis le constatent encore et semblent conclure dans le même sens, celui d'une mathématique en constante évolution dont les idées et les méthodes grandissent en même temps que les hommes, celui d'une mathématique ouverte dont la compréhension doit grandir à l'abris de toute prédétermination arbitraire, celui d'une mathématique vivante.

6. BIBLIOGRAPHIE

[1] T. TYMOCZKO, 1979, *The Journal of Philosophy* 76 :57-83.
« The four-color problem and its philosophical significance »

[2] D. FALLIS, 1997, *The Journal of Philosophy* 94 :165-186.
« The epistemic status of probabilistic proof »

[3] M. WINTER, 1905, *Revue de Métaphysique et de Morale* 13 :589-619.
« Métaphysique et logique mathématique »

[4] H. BERLIOCCHI, 2004, *Infirmation de l'hypothèse de Riemann*, Economica, Paris.

[5] A. BERNARD, 2003, *Science in Context* 16(3) :391-412.
« Ancient rhetoric and Greek mathematics : a response to a modern historiographical dilemma »