COMMENT PENSER LA PÉRIODISATION DES MATHÉMATIQUES CLASSIQUES ?

DIDIER LESESVRE

Table des matières

1. Introduction : methodes et enjeux historiographiques d'une periodisation

Dans tous les domaines, l'histoire a tendance à instaurer des périodes plus ou moins précisément délimitées qui, bien que toujours fondées sur des périodes reflétant une certaine homogénéité en certains aspects tels le politique ou le philosophique, amènent un découpage artificiel d'un mouvement d'évolution global. Roshdi Rashed constate qu'il en va de même dans le domaine pourtant si spécialisé des mathématiques, et « il n'est pas rare que les historiens, soucieux d'ordonner et d'éclairer les différents moments de la pensée mathématique, isolent les mathématiques à l'aube des Temps moderne, en les distinguant des mathématiques anciennes et celles du Moyen-Âge » [1]. Cette période, située aux alentours du XVIe siècle et limitée à l'Europe occidentale, semble donc unanimement être au confluent de deux mathématiques, disjoignant des mathématiques dites « classiques », constituées de l'arithmétique et de la géométrie héritées des grecs, et des mathématiques « moderne », qui naissent avec l'apparition de l'algèbre et de la géométrie algébrique. Rashed propose, à la lumière d'un millénaire de mathématiques arabes tant fécondes qu'ignorées par les historiens, de « restituer ces mathématiques à l'horizon qui est le leur, en brisant les frontières chronologiques héritées de l'histoire politique » [2].

Ce leurre des historiens est d'emblée dénoncé par Rashed, car « si l'on se penche sur les composantes de ces mathématiques classiques, on ne tarde pas à constater que ces chapitres sont loin d'être contemporains » [3]. Si on le voulait, on pourrait trouver les prémisses de ces théories tout autant dans l'Antiquité qu'avec Descartes, et tous ceux qui sont posés par les historiens comme les pères de ces théories modernes semblent s'appuyer très amplement sur les fondements posés par leurs prédécesseurs. Ainsi les problématiques et certaines idées de la géométrie conique ou de l'arithmétique trouvent leurs origine dans la Grèce ancienne, alors que la géométrie algébrique ou la révolution algébrique de Descartes commencent à prendre forme dans le monde arabe médiéval. Tous les fleurons de ces nouvelles mathématiques que les historiens ont érigées comme la modernité mathématique trouvent de telles origines et une continuité historique réelle, contrairement au découpage contre nature qui en est proposé, et « dans tous les cas, on constate qu'un regard global est nécessairement trompeur, impropre à dépeindre le paysage mathématique classique et, surtout, à retracer l'histoire de ses différents composants » [4]. Sans nier l'existence de périodes de renouveau et de grands changements en mathématiques, Rashed met en garde contre la tendance globalisante de l'histoire, et si ces périodes révolutionnaires existent et peuvent être considérées comme un passage d'une période à une autre, cette période dépend fortement du domaine des mathématiques et le classicisme restreint aux XIII–XVIe siècles occidentaux devrait s'élargir jusqu'à atteindre les débuts de nore ère et l'Orient pour couvrir l'intégralité des mathématiques.

Les historiens des sciences n'ont que très récemment « découvert toute l'importance de la recherche textuelle, et la nécessité de retracer la tradition textuelle de chaque écrit scientifique examiné » [5], ce qui a mené vers l'abandon des histoires particulières des découvertes et des hommes pour rechercher l'unité de la science et ses rapports aux autres branches d'une même discipline, et des autres domaines. Cette révolution dans la méthodologie historique provient de la révolution historiagraphique qui a lieu depuis le début du XXe siècle, notamment avec la tradition des *Annales*, et c'est « cette entreprise de réflexion méthodologie, qui par essence ne pouvait que demeurer inachevée, [qui] a permis d'engager le premier véritable travail d'élucidation dans la discipline » [6]. De plus, l'étude historique des sciences se limitait toujours au bassin méditerranéen et à l'Europe, et l'évolution des méthodes historique a mené à l'exploration d'horizons plus ouverts, tels le monde arabe ou l'Asie, jusqu'à présent ignorés. L'histoire sociale des sciences et les techniques entourant la science sont également prises en considération à leur juste valeur quant à leur impact sur la pratique scientifique.

C'est à la lumière du renouveau de l'histoire et d'une fine étude des travaux mathématiques du monde arabe que Roshdi Rashed s'attaque à mettre au jour la réalité des mathématiques « classiques ». Ce clacissime artificiel, tripatitionnant les mathématiques plus par paresse intellectuelle de l'historien et du scientifique que par réalité historique, doit donc être effacé et laisser place à la réalité multiple et vivante des mathématiques. Si l'on peut parler d'un classicisme en mathématiques, cela ne peut être au détriment de son inscription dans les mathématiques anciennes qui les ont précédées et qui ont été leurs conditions de possibilité. Mais cela ne doit pas masquer les apports fondamentaux et les idées proprement révolutionnaires apportées par la tradition arabe qui entoure le Xe siècle et qui ne sont autre qu'une première étape dans ce que l'on considère aujourd'hui comme la révolution classique qui accompagne Descartes. Enfin, ces idées nouvelles ne sont pas des créations spontanées qui demeurent seules et isolées, mais font parties d'un organisme mathématique vivant et en constante évolution, interagissant avec les autres parties des sciences et de la société.

1. p. V
2. p. VI
3. p. V
4. p. VI
5. p. 3
6. p. 4

2. Une periode classique dans la continuite de l'heritage antique

De la tripartition temporelle entre anciennes, classiques et modernes, Rashed met en évidence l'absurdité de l'aspect discontinu. Si les mathématiques anciennes meurent avec le début de notre ère et ne réapparaissent sous un visage classique entre les mains de Viète et Descartes, c'est plus le fait de notre ignorance notamment en ce qui concerne les mathématiques arabes. En étudiant précisément les intérêts et les travaux de ces mathématiciens arabes, il apparaît une continuité indéniable entre la tradition grecque et les mathématiques dites classiques, le monde arabe servant le milieu intermédiaire où l'évolution a continuité à se faire.

2.1. **L'arithmétique.** Ainsi, concernant l'arithmétique, on peut distinguer dans deux domaines relativement séparés au cours de la période arabe, le premier étant l'arithmétique grecque proprement dite, qui étudie les propriétés des nombres et des ensembles de nombres, et le second étant l'aspect calculatoire et algorithmique. L'intérêt affirmé pour le calcul dans les mathématiques arabes anciennes ne disparaît lors des études profondes des traductions de qualité des textes grecs entre les mains des arabes, et cela a permis aux problèmes anciens de trouver un chemin heureux dans les mathématiques arabes, qui mène à une unification des arithmétiques. Les arabes étudient les travaux grecs dans les moindres détails, et vont même jusqu'à remarquer une différence de conception entre les différentes traditions arithmétiques : là où Euclide ne se donne pour outil que les preuves géométriques, les néopythagoriciens se fondent sur une propriété d'induction ; et là où Euclide utilise une méthode abstraite, le Nicomaque aristotélicien utilise des arguments relevant de la philosophie.

Contrairement aux grecs, les arabes considèrent que les objets restent les mêmes, ce qui permet de les étudier en délaisser les éventuels aspects philosophiques, psychologiques, géométriques, etc. mais ce sont bien les mêmes objets ainsi que les mêmes problèmes qui motivent les mathématiques grecques comme arabes.

L'arithmétique se développe notamment à partir des travaux de Thabit ibn Qurra, dont le premier apport consiste en des généralisations de résultats arithmétiques à la classe particulière des nombres amiables. L'objectif est plus généralement la classification, puis la caractérisation des classes d'entiers, tels les parfaits et les premiers, approfondissant ainsi les tendances à séparer les classes des grecs. Ainsi, la première caractérisation des nombres premiers est prouvée par Ibn al Haytam : le théorème de Wilson. Les nombres polynômes et nombres figurés sont un sujet d'étude qui s'intéresse notamment à des sommes de nombres, en prouvant les formules à l'aide d'interprétations combinatoires ou de méthodes algébriques, ce qui permet de voir ce domaine très grec de l'arithmétique s'étendre de manière très large au cours de cette période.

2.2. **La géométrie projective et infinitésimale.** La géométrie infinitésimale est un domaine de la tradition grecque ancienne qui s'arrête brutalement avec Archimède, et qui retrouve vigueur chez les arabes au IX^{e}siècle. Si seuls deux ouvrages archimédiens nous ont été transmis sur le sujet, on peut se douter que l'absence de méthodes intégrales a dû porter un sérieux coup aux prétentions de la géométrie infinitésimale, qui ne pouvait avancer faute d'outil adapté. Les arabes qui ont reçu ces textes travaillent sur les sections coniques et manient cette géométrie différentielle, tant pour l'algèbre que pour les transformations optiques On étudie ici les différents champs.

Al-Kindi est le premier commentateur d'Archimède influencé par la tradition algébrique dans laquelle il vit. Les frères Banu-Musa écrivent des traités archimédiens en ce qui concerne les thèmes d'étude, les problèmes posés et les idées explorées, bien qu'avec une démarche différente et des preuves très éloignées. L'importance centrale des transformations géométriques découle de deux objectifs : le calcul des aires et les propriétés caractéristiques de l'ellipse. Les Banu-Musa ont donc remanié l'ancienne tradition plutôt que la commenter stérilement. La période, dans toutes les sciences mathématiques, est centrée sur la recherche de nouveaux chemins, de nouvelles approches des problèmes anciens, de sorte qu'il y a un « nouvel esprit scientifique très libre au IX^{e}siècle » [7], mais dont la motivation première se trouve dans les problèmes posés par les mathématiques grecques.

La recherche se développe à la suite des Banu-Musa, et Thabit ibn Qurra écrit de nombreux traités fondateurs sur les progressions arithmétiques, les approximations, les aires paraboliques, explorant des idées qui ne sont pas sans faire penser aux notions de bornes supérieures et d'intégrales de Riemann. Il généralise ces idées dans l'espace pour le volume parabolique, et le parallèle des idées est parfait. Il étudie de nombreuses sections et attache une importance toute particulière aux transformations.

al Farghani, dans la tradition des études de planisphères entreprises par Ptolémée, revisite notamment les travaux d'Appolonius du point de vue des projections. On retrouve des preuves et des résultats communs « mais avec des motivations très différentes » [8]. De nombreux mathématiciens développent par la suite cette étude et plusieurs notions de projection sont étudiées, notamment conique et stéréographique. La notion de rabattement apparaît et permet de nombreuses de nombreuses constructions de projections. Al-Quhi fait succéder aux problèmes motivant l'étude leur résolution synthétique, et présente à travers les exemples « la structure mathématique sous-jacente à l'instrument astronomique, c'est-à-dire

7. p. 420
8. p. 517, l'objectif étant d'étudier les bornes géométriques de représentation de la sphère et de ses projections

la projection stéréographique » [9] de manière mathématique et méthodique, complétant ainsi les premiers travaux grecs sur le sujet.

La généralisation de la projection de la sphère de manière théorique comme pratique pour les artisans. La nouveauté provient de l'étude de projections n'envoyant pas un cercle sur un cercle, mais l'accent est mis sur les coniques. « étude purement théorique, avec de nombreux cas particuliers conçus comme cas limites » [10]. « Les études sont très nombreuses » [11], et les textes ne cessent de dialoguer entre eux, « soule[vant] des débats, voire des disputes » entre les différents types de projections, faisant des problèmes géométriques initialement tirés de la tradition grecque le véritable fer de lance d'une grande partie des mathématiques arabes.

2.3. **Météorologie et mathématisation du monde.** Depuis Aristote, la météorologie est considérée comme un amas d'accidents, de phénomènes non physiques, et de nombreuses interprétations des phénomènes météorologiques sont avancées. En reprenant ces questionnements sur la compréhension du monde issues de la tradition grecque, les penseurs arabes attachent un fort intérêt aux observation, tels les arcs-en-ciels ou les étoiles filantes. al-Quhi s'intéresse au contrôle mathématique, technique et linguistique des observations, cherchant à bannir toute métaphysique dans les explications, car pour al-Quhi « les mathématiques fournissent l'idéal de la connaissance » [12]. Les thèses d'Aristote sont communes et bien diffusées dans le monde arabe du temps d'al-Quhi. Bien que les avis se concentrent en une « bien rare unanimité » [13], il se garde bien d'interpréter ce que sont les étoiles filantes, et ne s'intéresse qu'aux observations astronomiques. La méthodologie de l'astronomie arabe est d'observer systématique en deux lieux différents, méthode attestée dès le IXesiècle et rendue possible pour al-Quhi grâce à la présence de nombreux observatoires relativement évolués, ce qui lui permet d'observer ces étoiles et d'évaluer leur distance à partir de leur parallaxe. Il en recherche alors le volume, sans préjuger de la nature de la "chose" [14] qu'il observe, mais elles sont trop petites pour occulter la lune et entrer dans l'application de ses résultats théoriques. C'est tout le problème de l'imprévisibilité du phénomène, doublé de sa très brève manifestation. Toutefois, l'apport fondamental est bien réel : à la méthode et à la rigueur des observations sans préjuger s'ajoute le rejet de toute spéculation sur la nature a priori de l'étoile filante.

Les efforts sont dirigés sur les problèmes des « fondements géométriques de l'observation, plus que sur la mesure » [15]. Il insiste tout particulièrement sur l'application aux phares, et à l'inverse d'Aristote défend que la science est utile, et que cette « science utile [est même] le mot clé de la culture islamique » [16], promouvant une connaissance ayant, sinon des objectifs, tout du moins un lien avec l'extérieur et le réel. Il étudie géométriquement le ciel visible et la surface de la Terre visible, traitées en proportions. L'importance des mathématiques et de la physique est, pour une fois à la place de la métaphysique, au centre de la réflexion.

2.4. **Systèmes optiques.** Les miroirs ardents sont une problématique pratique qui motive les recherches partout en optique comme en mathématiques depuis la Grèce antique, et jusqu'au XVIIesiècle. Le traité sur les miroirs paraboliques de Dioclès n'est connu que par sa transmission orale dans le monde arabe. Il montre néanmoins une recherche très active concernant les miroirs paraboliques de la part des mathématiciens comme des astronomes grecs, et une forte utilité sociale motivant ces efforts se concentrant sur la construction de gabarits de paraboles ainsi. Druthmus écrit dans cette tradition un traité caractérisant les foyers géométriquement et donnant des constructions point par point, alors que Anthénius étudie de nombreux miroirs, et construit la parabole. Le problème de vue est catoptrique, et beaucoup de succès est dû à cette perspective nouvelle, malgré une rigueur naturellement inférieure aux autres. De nombreuses autres études d'optimisation de convergence de rayons sont menées sur d'autres miroirs, notamment sphériques et elliptiques. Anthénius identifie notamment le miroir ellipsoïdal comme solution d'un problème optique, et étudie également d'autres problèmes menant à d'autres formes.

Ibn Sahl s'intéresse au problème de l'embrasement par réflexion, à la suite de l'étude de Ptolémée, mais en les dépassant par la considération d'un milieu plus général, l'attention étant en particulier portée à la constance du rapport de réfraction, première trace de la considération de l'indice optique de Snell-Descartes. La propriété du retour inverse de la lumière est de la même manière dégagée et utilisée. Il construit toujours géométriquement les lentilles convergentes et convexes, et donne un procédé de tracé continu de l'hyperbole. Les problématiques plus générales de miroirs ardents et de réfraction forment le domaine de la dioptrique, et sont rendues possibles par sa maîtrise des coniques théoriques d'Appolonius. Lentilles et miroirs sont unifiés par la géométrie, et l'aspect pratique permet de faire se lien indépendamment de toute interprétation

9. p. 525
10. p. 531
11. p. 533
12. p. 618
13. p. 621
14. p. 25
15. p. 27
16. p. 27

métaphysique. Ainsi, les premières avancées majeures depuis Ptolémée se situent en cette période, l'absence de lois explicites générales étant due à « l'absence d'interrogation sur les raisons physiques ».

Quel est le lien entre Ibn Sahl et Ibn-al-Haytham, entre leurs deux traditions de travaux tous deux révolutionnaires mais fortement ancrés dans une tradition ancienne ? Ibn-al-Haytham étudie le dioptre sphérique et les lentilles accolées, faisant notamment la première expérience mettant en évidence le phénomène d'aberration sphérique, ce qui en fait « l'un des sommets de la recherche en optique classique » [17]. Avec quelques preuves et les lois de la réfraction, Ibn-al-Haytham montre les propriétés des foyers et étudie les variations d'angle, s'attachant à exploiter des données numériques particulières. De manière générale, le numérique reste marginal et de grandes avancées conceptuelles sont au centre des préoccupations, les dispositifs expérimentaux restant peu précis manifestant un peu d'intérêt pour le quantitatif. Al-Farisi s'y attèlera par la suite, en s'étendant sur les aspects quantitatifs d'Ibn-al-Haytham, de manière très développée. On trouve dans ses travaux les premières relations fonctionnelles, les différences au premier ordre et des interpolations pour corriger des discontinuités. Il aboutit finalement aux lois de Kepler à l'aide d'une interpolation au second ordre. Il cherche un algorithme approchant la relation entre angle d'incidence et angle de réfraction, l'objectif étant de prévoir à partir d'une heuristique plus que d'observer précisément.

Les travaux et problèmes grecs sont repris, et transportés dans le domaine de l'optique par Al-Kindi. Ibn Sahl généralise les outils et les systèmes optiques déjà considérés par les anciens aux lentilles et s'intéresse à la réfraction, aux propriétés et aux localisations des foyers, des convergences et des constructions effectives. Ibn-al-Haytham s'attache plus particulièrement aux problèmes de formation des images, menant quelques recherches quantitatives qui seront principalement développées par al-Farisi et qui ouvre ainsi une brèche vers des problématiques nouvelles de l'optique physique.

2.5. **L'analyse diophantienne.** La naissance de l'analyse diophantienne abec Abu-Kamil aboutit à un fort rapprochement avec l'algèbre des équations polynomiales générales qui émergent avec la tradition arabe, mais finit par s'en détacher et se rattacher définitivement à la théorie des nombres, sans avoir oublié toutefois de s'enrichir de méthodes algébriques.

L'objectif est de résoudre des problèmes d'équations diopahntiennes, et la considération d'inconnues fait que les résolutions méthodiques et systématiques des problèmes par l'algèbre trouvent naturellement leur place dans cette démarche, avec leurs méthodes de résolution et leurs conditions suffisantes d'existence de solution. Qusta Ibn Qurra traduit les écrits fondamentaux de Diophante, tout en réinterprétant algébriquement [18] et en y adjoignant des contraintes et des ajouts. Al-Karaji développe alors l'analyse indéterminée comme de l'algèbre, généralisant les racines de polynômes en ramenant des problèmes à des problèmes polynomiaux pour expliquer les méthodes d'extraction. L'organisation est nouvelle et se fait selon cette forme algébrique abstraite, qui est en effet l'objectif de l'étude qui n'a d'autre but que la systématisation. Des problèmes successifs sont présentés pour faire comprendre et faire exercer la méthode sont destinés au grand public cultivé arabe, rejoignant une certaine tradition didactique et rhétorique grecque, alors qu'un second est plus élaboré et expose de nombreux problèmes généraux qui serviront à tracer la voie de la recherche future. Tous les successeurs se basent naturellement sur ce nouveau et motivant pan de l'algèbre, qui n'est autre qu'une nouvelle vision d'un domaine ancien.

Le problème des solutions entières est également considéré et fait appel tant à des méthodes euclidinnes qu'à des techniques algébriques, qui s'unifient en le « commencement d'une nouvelle analyse diophantienne » [19] : c'est une renaissance des problèmes diophantiens qui marrie les méthodes grecques à de nouvelles idées. Ce qui change comparé à des utilisations qui auraient pu se trouver être similaires dans les écrits grecs, c'est qu'« ils étaient conscients de la nouveauté » des nouveaux concepts fondamentaux et puissants qu'ils manipulaient. La preuve en est que de nombreuses équations trouvèrent alors leur solution générale. L'intérêt est très marqué pour le problème de Waring, et les premiers problèmes impossibles [20] comment à attirer l'attention, apportant ainsi une contribution immense depuis l'axiomatisation euclidienne à l'évolution de la logique et la considération de problèmes de décidabilité, donnant lieu à de nombreux travaux. Al-Sijzi s'intéresse à la recherche d'algorithmes pour résoudre des équations quadratiques, le principe de récurrence est exploité pour certaines résolutions, ainsi que des méthodes d'analyse et synthèse. Alors que les grecs avaient pour mot d'ordre d'insister sur la différence fondamentale entre aire et longueurs, les arabes ont, au contraire, compris la puissance de l'abstraction en assimilant sans réserve aires et longueurs.

3. L'APPARITION PROGRESSIVE DU CLASSICISME CARTESIEN : EVOLUTION DES METHODES ET DES IDEES

Si les mathématiques arabes héritent sans aucun doute des idées et des problèmes des mathématiques anciennes, elles n'en sont pas moins extrêmement novatrices et sont la source d'une profusion de concepts et de méthodes sur lesquelles se fondent les mathématiques des siècles futurs, et notamment la révolution cartésienne. Le classicisme mathématique étant considéré comme une tradition mariant analyse et algèbre, Rashed dégage au cours de son parcours du paysage

17. p. 685
18. p. 285
19. p. 290
20. p. 294

mathématique arabe le cœur de la révolution classique attribuée exclusivement à Viète et à Descartes, et tout ce que le classicisme occidental doit à cette féconde période orientale.

3.1. **Le commencement de l'algèbre.** La constitution de l'empire islamique permet un développement particulier des mathématiques, à l'extrême opposé de ce qu'il était dans la tradition grecque. La science mathématique est considérée dans son aspect purement formel, comme un ensemble de règles syntaxiques sans sémantique particulière. Il n'y a pas de distinction profonde identifiée et exhibée entre science et art, et si la science rationalise les pratiques, l'art peut également résoudre des problèmes. Ce mariage et cette vision des mathématiques est rendu nécessaire par la volonté d'établir clairement les lois de l'héritage coranique, et de se mettre à l'abri du flou qui englobe les textes et qui délaisse la loi pour laisser place aux interprétations.

La première apparition du terme même d'« algèbre » remonte à Al-Khwarizmi, dans un ouvrage qui est mathématiquement très simple et que l'on pourrait considérer comme une simple réécriture d'idées et de méthodes déjà connues des grecs, mais qui cache une profonde révolution conceptuelle, celle-là même que l'on n'hésite pas aujourd'hui à attribuer à Descartes. Cette simplicité est assumée de la part d'Al-Khwarizmi, ce qui importe est de pouvoir tout ramener aux règles simples qui y sont explicitées. Tous les concepts qui fondent l'algèbre moderne y sont présents et exploités tels qu'ils le sont encore aujourd'hui : opérations élémentaires, équations, formes normales et résolutions algorithmiques. Si les preuves sont essentiellement géométriques, comme dans la tradition hellène, l'idée novatrice d'Al-Khwarizmi est de ne pas s'y limiter : là où les grecs n'utilisaient les mêmes symboles que lui comme simples étiquettes pour désigner des objets, lui affirme que l'inconnue n'a pas de nature et que le problème ne dépend pas de la géométrie particulière dans lequelle on l'insère. L'impact sur les contemporains est immense, et la recherche algébrique ainsi née peut se poursuivre dans un essor croissant.

Ibn Qurra s'attache au parallèle entre l'algèbre et la géométrie tout en les distinguant clairement quant à leur réalité, mais les confondant dans les interprétations que l'on en peut faire. La théorie des équations se développe avec Abu-Kamil. Cette première période créatrice des mathématiques arabes est marquée par l'arithmétisation des travaux grecs, essentiellement géométriques. Ainsi les *Arithmétiques* de Diophante sont entièrement revisitées dans le langage d'Al-Khwarizmi, puis Al-Karaji cherche à étendre l'arithmétique aux polynômes algébriques. Son ouvrage est repris et énormément développé, et les fonctions élémentaires bien connues des modernes – puissances, factorielles, coefficients binomiaux, etc. – apparaissent, ainsi que l'extension, purement syntaxique, des règles de calcul aux irrationnels qui avaient tant handicapé les grecs. La question concernant les extractions de racines polynomiales de petits degrés est posée par Al-Sulami et n'est pas sans rappeler le même effort de la part de l'école italienne plusieurs siècles plus tard.

3.2. **Combinatoire.** L'étude des combinaisons comme un domaine en soi est un héritage du XVIIe siècle, qui va de pair avec l'émergence du calcul des probabilités motivé par les problèmes de jeux de hasard. L'utilisation du concept de combinaison et leur utilisation existait pourtant antérieurement, et ce fait a été oublié de l'histoire car aucune identité formelle, aucun nom ne leur avait été conféré. Al-Khalil est le premier à composer un dictionnaire, servant de base à sa conception de la langue comme simples combinaisons de lettres, limitées aux combinaisons ayant en effet un sens [21]. En s'intéressant à la recherche de phonèmes élémentaires de la langue, il obtient tous les mots potentiellement possibles de la langue arabe, et en supprimant les mots qui n'existent pas, il obtient son dictionnaire.

Les estimations quantitatives du nombre de possibilités sont trop grandes pour être entreprises à la main, et il devait sans doute connaître les idées combinatoires ou des identités récurrentes comme celle du triangle de Pascal. Si les valeurs ne sont données explicitement que pour de petites valeurs, les justifications sont générales et reflètent une compréhension des fonctions combinatoires utilisées. C'est le début d'une conscience du caractère calculatoire des lettres, qui sont désormais à l'image des nombres. La cryptographie et la cryptanalyse apparaissent également à cette période, et se fondent sur l'utilisation de permutations. Bien d'autres domaines, tels l'astronomie ou la composition, tirent profit de cette nouvelle conception du calcul. Au Xe siècle les formules du binôme étaient déjà connues et utilisées dans leur généralité, et ils avaient conscience de ce nouveau domaine sans prendre la peine de le nommer, mais ce qui se révèle avec certitude dans leurs travaux. Les interprétations en termes combinatoires se systématisent, et Al-Farisi donne l'interprétation combinatoire des coefficients binomiaux. Al-Tusi va jusqu'à appliquer la combinatoire à la philosophie, traitant de l'émancipation des esprits. Al-Halubi est le père du premier traité entièrement consacré à la combinatoire, où ces objets sont étudiés pour eux-mêmes et les formules données hors de tout contexte d'application ou de modélisation, et il y développe les calculs d'Al-Tusi en s'abstrayant entièrement des objets permutés.

La conceptualisation des combinaisons commence avec Al-Khalil, qui ignore la nature des lettres qu'il permute et ne prêtant guère attention à leur sens. Mais on ne sait pas qui a réellement fait ce pas conceptuel immense, même si Al-Tusi avance beaucoup dans cette direction et se rapproche d'une abstraction totale correspondant aux combinaisons abstraites, et Al-Halubi est le premier connu à l'avoir fait indépendamment de toute application. L'évolution de la théorie continuera naturellement avec Fermat et Pascal.

21. Ce qui n'est pas sans laisser entrevoir tout le développement informatique de la théorie des langages, fondé sur les mêmes principes.

3.3. **Géométrie.** Beaucoup d'erreurs historiques et peu d'études sur la quadrature des lunules ont été menées. Ibn-al-Haytham est le premier mathématicien postérieur au Vesiècle avant Jésus-Christ à l'étudier pleinement. Il distingue la quadrature du cercle et la construction possible d'une telle quadrature, et continue dans son second traité à développer des résultats plus généraux et à réinterpréter les problèmes en termes trigonométriques.

Les problèmes d'isopérimètres et d'isépiphanes sont des problèmes d'extremum d'aires intéressant tant les mathématiciens que les astronomes depuis l'Antiquité, tout en étant un problème central pour les thèses philosophiques. al-Khazin étudie ces problèmes et bien d'autres à sa suite. Tout est fondé sur des axiomes implicites, mais al-Khazin semble avoir compris toute l'information qui peut être apportée par la considération d'invariants de transformations. Il traite le cas de polygones pour approcher les cercles. Ibn-al-Haytam s'intéresse aux mêmes problèmes en s'attachant aux comportements asymptotiques. Il cherche également à prouver que l'aire augmente au fur et à mesure que le polyèdre se rapproche du cercle, voulant en d'autres termes prouver l'inégalité périmétrique bien connue aujourd'hui. Malheureusement, les tentatives analogues à celles d'al-Khazin dans l'espace ne peuvent aboutir compte tenu du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de polyèdres. Malgré cet échec partiel, aucune autre étude avant plusieurs siècles n'égale ces deux al-Khazin et Ibn-al-Haytham sur le sujet, en richesse et en puissance des idées.

Les recherches sur isépiphanes de Ibn-al-Haytham sont l'occasion de développer implicitement quelques résultats intermédiaires faisant intervenir la notion d'angle solide. C'est la première théorie importante sur le sujet à partir d'une définition reprise d'Euclide, mais dont les développements restaient bien limités. La théorie se développe donc au IXesiècle suivant deux directions : améliorer les preuves d'Euclide et réussir à approcher la sphère par des polyèdres convexes. Al-Sijzi est le premier à classifier les angles solides. Ibn-al-Haytham fait preuve d'une reprise standard des idées euclidiennes pour en élaborer toute la théorie des isopérimètres, pour pouvoir comparer et manipuler les angles solides. Ibn-al-Haytham s'inspire donc des idées planes, mais elles sont malheureusement loin de suffire. Il définit alors les angles solides en rapport avec les surfaces sphériques, et développe à partir de cette définition une riche théorie aisément manipulable. Ainsi, les angles solides deviennent des grandeurs comme les autres, munies de leurs règles formelles de calcul et de leurs propriétés comportementales élémentaires. Une révolution qui ne sera poursuivie qu'entre les mains d'Euler, sept ou huit siècles plus tard.

3.4. **Coniques et projections : l'importance des transformations.** L'importance croissante des transformations et des relations dans les mathématiques arabes, jusque là quasi-inexistantes, s'impose au cours des études géométriques. Les projections apparaissent avec le besoin de représentation de l'espace, pour la cartographie ou les cadrans solaires notament.

Le traité sur les ellipse d'Ibn Musa est perdu, mais suffisamment de témoignages en restent pour pouvoir en reconstruire fidèlement les grandes lignes du contenu et de la progression. L'impact est important pour la recherche future. C'est en particulier le cas de Thabit Ibn Qurra qui connaît les *Coniques* d'Appolonius et emploie en plus des méthodes grecques l'étude de transformations géométriques. Ibn Musa ne connaissait pas ces travaux d'Appolonius, mais seules ses définitions ont permis à Thabit ibn Qurra de s'engager dans la voie des projections [22] à travers desquelles de nombreuses considérations sur les sections et les aires sont faites.

Ibn al-Sanh ne connait pas les travaux de Thabit ibn Qurra, mais reste proche des travaux d'Ibn Musa qu'il connait bien. Thabit ibn Qurra et lui diffèrent beaucoup, ne serait que dans le heurt des définitions des coniques par génératrice ou bifocale, et Ibn al-Sanh poursuit les recherches de Ibn Musa dans la même direction, en utilisant, comme Thabit ibn Qurra, les projections. La première théorie autonome des projections est établie par al-Quhi, puis complétée par Ibn al-Sanh, sans aucune motivation pratique, ou tout du moins s'évadant de sa justification.

3.5. **Tracé et mouvement.** La motivation des réflexions sur le tracé et sur la classification des courbes vient de la nécessité d'élaborer, en théorie ou en pratique, un instrument pour tracer les coniques, nécessitant d'« engager un travail conceptuel » [23], justifiant l'apparition d'une partie importante de la géométrie à la fin du Xesiècle, motivée par cette problématique. L'innovation est totale, le problème du tracé n'ayant presque jamais été soulevé comme un thème de recherche autonome dans le monde grec. Trois mathématiciens important s'attachent à cela avec des points de vue parallèles, cherchant à construire des systèmes mécaniques exploitant la propriété des foyers des coniques, ou pour mettre au point un compas parfait.

Ibn Sahl exploite les propriétés des foyers et des directrices pour mettre au point un dispositif mécanique, de même qu'al-Quhi quête le compas parfait à travers des études géométriques et théoriques du compas parfait basé sur sa position angulaire par rapport au plan du tracé, motivé par les problématiques provenant d'Appolonius. Al-Sijzi cherche à améliorer le compas parfait en étudiant l'étude du tracé par points comme l'étude du tracé continu, permettant de tracer ainsi les sections semblables avec le compas.

22. p. 494
23. p. 535

La classification se fait en fonction du nombre de mouvements nécessaires pour le tracé. Al-Quhi s'intéresse aux lignes mesurables engendrées par le compas parfait, soumises à la théorie des proportions. Al-Sijzi fait plusieurs classifications, rajoute celles tracées par deux mouvements continus puis sépare parmi elles encore une classe supplémentaire, les mécaniques. Ainsi, « l'importance est majeure pour la géométrie, et pour la géométrie algébrique beaucoup plus tard ».

3.6. **Les premiers problèmes de fondements.** À la suite de l'axiomatique euclidienne, Thabit ibn Qurra est le premier à s'intéresser au contenu de ces axiomes, en s'attachant notamment au problème du cinquième postulat, en publiant deux traités sur le sujet. Il savait caractériser de diverses manières le parallélisme, dont l'équidistance [24] qui montre l'importance accordée par les mathématiciens arabes à la notion de mouvements, et Thabit ibn Qurra arrive finalement à prouver la dépendance du cinquième axiome, mais en supposant implicitement d'autres résultats.

3.7. **Cinématique céleste.** Ibn-al-Haytham opère la « réforme de l'astronomie en développant la cinématique céleste » [25] si fondamentale historiquement. L'astronomie est de manière générale importante dans son œuvre, tant par ses études théoriques que par ses études pratiques, toujours d'une grande diversité. La critique de Ptolémée est permanente et la volonté de reforger l'astronomie est affichée. C'est donc un travail critique, mais qui ne s'y limite pas, beaucoup d'efforts étant consacrés à la détermination de l'altitude des astres. « Le contenu le place à l'avant-garde de son temps » [26] : il élabore une théorie planétaire mathématique, mais travaille également beaucoup sur ses calculs et met au point des instruments. Le style est démonstratif et s'appuie sur de nombreux lemmes mathématiques, introduisant l'étude des variations, des relations trigonométriques, de la géométrie infinitésimale et des méthodes aux différences finies. L'objectif déclaré est de mathématiser systématiquement des explications astronomiques [27]. Il poursuit en profondeur l'œuvre de Thabit ibn Qurra, cherchant une théorie unifiée et non plus étudier des singularités et refonder le faux système de Ptolémée. Il place les phénomènes connaissables avant les concepts, en astronomie comme en optique. « Il ne considère que les mouvements observés, rompant avec toute cosmologie » [28]. Il a « trois intentions : mathématiser, éviter les contradictions de Ptolémée, et justifier les observations ».

« Tout au long [de son œuvre,] il a œuvré pour une théorie mathématique et phénoménologique » [29], sans jamais sombrer dans un quelconque finalisme et s'attachant à conserver un minimum d'hypothèses. Il n'y a pas d'explication causale, mais seulement descriptive assortie d'une cinématique géométrique. La géométrie, notamment sphérique, a beaucoup évolué grâce à cet enjeu extérieur qui a agit comme une source de motivation et d'orientation des recherches et des réflexions. Ainsi, suite à ces études, « le physique est réduit au géométrique » [30], introduisant une nouvelle cinématique intermédiaire entre celle de Ptolémée et celle de Képler. Plus aucune cosmologie postérieure n'est admise, et en tous cas les résultats, les méthodes et même le langage est profondément novateur.

3.8. **Conception du mouvement.** « Résoudre un problème philosophique théorique à l'aide des mathématiques » [31] comme le faisait al-Tusi, ce qui a « un rôle fondamental dans le développement de l'analyse combinatoire ». De même, l'application de la géométrie à la physique aristotélicienne mène à la cinématique. Ainsi, les sciences ne sont pas la propriété de la philosophie, mais aussi des mathématiques.

Al-Quhi émet notamment de fortes critiques à l'encontre de la physique aristotélicienne, défendant la possibilité d'un mouvement infini en temps fini en proposant un montage hyperbolique, cherchant donc l'infini là où Aristote le refuse, mais sans utiliser d'argument métaphysique mais seulement des constructions géométriques précises. Ainsi, mathématiques et philosophie se rencontrent en la mécanique pour l'enrichir.

3.9. **Optique.** L'importance constante de marier sciences et techniques est également affirmé dans le développement de l'optique, et si parfois les machines sont difficiles à retrouver, elles ont souvent une « utilité qui leur assigne une finalité qui dépasse la simple connaissance » [32], en faisant également des vecteurs de transmission du savoir.

Concernant l'optique de manière plus générale, on constate un « changement de perspective lors de la transmission arabe » [33]. Alors qu'aucun grec ne l'avait fait précédemment, al-Kindi est le premier à unifier ces thèmes, mettant en place une tradition anaclastique qui est également l'occasion de développer les aspects d'une géométrie pratique. Al-Kindi approfondit les travaux grecs, fournissant preuves et constructions, recherchant les propriétés générales de réflexion des rayons

24. p. 557
25. p. 571
26. p. 578
27. p. 580
28. p. 581
29. p. 610
30. p. 611
31. p. 635
32. p. 653
33. p. 661

parallèles, mettant en place des systèmes optiques élaborés, tels les systèmes de miroirs hexagonaux. Ibn-Luqa et ses successeurs perpétueront cette tradition. Il y a aussi un intérêt porté « aux procédés de fabrication destinés aux artisans » [34], dépassant donc un simple prolongement des idées des grecs et mettant en place de nouvelles directions de recherches, vers un certain constructivisme physique. Pour suivre les traces de l'optique, il devient donc nécessaire de les traquer sur tout le pourtour méditerranéen, et sur une durée immense.

Philosophes, médecins, et météorologues se mêlent alors dans les problématiques de l'optique. Tout de développe avec Ptolémée qui apporte de nombreux commentaires, des rectifications et de nombreux nouveaux résultats ajoutés à des théories préexistantes. Cela amène une « profonde rupture » [35] dans la pratique et la conception de l'optique. Au X^e^siècle, al-Haytham unifie de nombreux domaines en apportant des thèmes nouveaux. Il manifeste une volonté ferme de réformer l'optique, en insistant sur l'intérêt des conditions de la vision [36], la conscience du modèle géométrique, de la réalité physique et des expériences. Les rayons lumineux sont vus différemment, l'œil n'est plus qu'un instrument et on essaye de dégager les conditions de vision et de la lumière, ainsi que l'objectivité de la lumière et des phénomènes lumineux tels la couleur. De nombreuses recherches portent sur les miroirs ardents, et l'expérimental acquiert son importance, l'optique étudiant désormais les phénomènes lumineux. L'image et la lumière « acquièrent un statut objectif ». La révolution latine attribuée à Kepler, Descartes et Huygens est déjà en marche.

4. L'ETABLISSEMENT D'UNE TRADITION : DIFFUSION ET DéVELOPPEMENT DU CLASSICISME

L'arrivée du renouveau arabe dans et autour des mathématiques grecques et des pratiques physiques s'accompagne, pendant de nombreux siècles, d'un développement constant et enrichissant constamment les idées scientifiques, contribuant ainsi à la mise en place d'un milieu mathématique favorable à son développement autonome, et devenant les conditions de possibilité des mathématiques classiques telles qu'elles « apparaîtront » en Europe occidentale avec Viète et Descartes.

4.1. **Vers une géométrie algébrique.** Les recherches sur les problèmes algébrisés de l'airhtmétique gecque, notamment les extractions de racines, montrent l'importance accordée à l'obtention de formules explicites pour les solutions d'équations, à l'aide de radicaux et des opérations usuelles. Les problèmes de sections coniques s'y ramènent en les réinterprétant en termes d'équations cubiques via une traduction algébrique. La résolution géométrique d'équations permet ainsi de se ramener à des expressions algébriques des solutions, les deux mondes étant reliées par la notion d'« unité de mesure ». Une forme de géométrie algébrique commence à être mise au jour, unifiant géométrie et algèbre et tirant parti des deux visions.

Al-Tusi rédige un traité sur les équations, qu'il traite d'un point de vue local et analytique plutôt que du point de vue usuel global et algébrique. Les notions d'extremum et d'études locales motivent la recherche de point d'annulation de l'accroissement, et à leur recherche explicite via la méthode de Newton. Si le non symbolisme adopté dans cette première démarche algébrique est handicapant pour certaines preuves et notamment pour justifier la correction et la terminaison (en termes modernes, mais c'est bien ce qui est fait), les idées fondamentales sont présentes, et il faudra attendre une nouvelle vision des choses avec Fermat et Descartes pour apporter un symbolisme particulier à ces objets. « Peut-être la principale raison de méconnaissance de ce chapitre résidait-elle dans l'absence d'une perspective historique, qui aurait montré que cette recherche en analyse diophantienne entière n'était pas l'œuvre d'un seul mathématicien, mais de toute une tradition » [37]

4.2. **Classification des courbes.** Les courbes sont la première motivation des problèmes mathématiques depuis l'Antiquité. Pendant bien longtemps, très peu de familles de courbes sont connues, mais cela n'empêche pas les mathématiciens et penseurs grecs à essayer de les classer. Cela vient notamment des différentes notions de courbes qui se collisionnent, traduisant des problèmes de définitions et des hésitations quant à la nature des objets mathématiques. Pour Platon et Aristote dont l'influence est largement dominante dans le monde grec, seuls le cercle et la droite sont les courbes simples. Pour d'autres, l'hélice en est aussi, comme composition des deux mouvements circulaires et rectilignes. Les coniques et les quadratrices, quant à elles, sont mixtes et se rapportent apparemment à la pratique, sans motivation théorique. Quel que soit le point de vue adopté, les classifications sont ambiguës.

La séparation apparaît parfois entre sections coniques et cylindriques et les autres courbes. Al-Quhi propose un compas parfait pouvant caractériser la traçabilité des courbes qui sont simples. La classification est parfois raffinée en mesurables, mécaniques et non mécaniques. La première limitation est d'abord à la constructibilité des courbes, qui empêche de considérer des courbes hors quelques cas très particuliers de la géométrie euclidienne. Le fait de ne pas voir les courbes par des équations conforte cette limitation. Al-Sijzi commence à classifier selon le rang et les sections planes. La notion de « courbe mécanique » demeure une constante de la période, ainsi que les courbes engendrées par les traces de transformations de

34. p. 664
35. p. 704
36. p. 707
37. p. 291

figures simples telles le cercle. Ibn-Sinan voit par la suite les sections coniques par déformation du cercle, idée qui est à la base du développement futur de la théorie des coniques.

Al-Khayyam donne l'équivalent de chaque équation de degré trois avec une conique. Même sans dépasser le degré trois, il y a là une première classification des courbes algébriques, qui est le premier rapport direct établi entre des courbes et des équations (on retrouve les prémisses de la géométrie algébrique). L'idée de classifier les courbes en classifiant les équations auxquelles on les rapporte est féconde, et permet par exemple de ramener la recherche de sections – difficile à entreprendre géométriquement – à une recherche de racines. Al-Tusi exploite plus avant l'idée en faisant de l'analyse sur ces équations représentant les courbes. Descartes apportera alors les évolutions suivantes en étudiant les cubiques.

Les cubiques, bien que certaines soient connues, n'ont jamais été définies par des équations avant Descartes, qui classe les problèmes selon les courbes nécessaires à leur représentation. Puis il classe les courbes par le mouvement générateur, puis par les équations. Pour lui, certaines courbe mécaniques sont en fait très géométriques. Lui définit les courbes par leurs équations, et plus tard Leibniz fera de même avec des équations différentielles. Dans tous les cas, on généralise à des courbes non connues au préalable. C'est ce qui mène Descartes à affirmer que les courbes géométriques et les courbes mécaniques ne sont qu'un seul et même type de courbes. La classification se fait alors par genre, par l'invariance du degré par rapport au repère, par certains invariants affines. Le problème de la limitation des exemples aux petits degrés mène toutefois à des illusions et à de fausses généralisations. Si les premières classifications sont très critiquables, elles sont justement fondamentales pour comprendre l'évolution et la périodisation des mathématiques car elles ont été très critiquées, et de fait ont permis un approfondissement réel et fécond des propriétés importantes et intéressantes des courbes. Le point de départ de toutes les études ultérieures visent à la classification des courbes.

Pour poursuivre la classification des courbes, il faut dégager des critères servant à discriminer pour établir une classification. Fermat se propose d'égaler une courbe à la longueur d'une droite donnée : la méthode est différentielle-discrétisée utilisant les taux d'accroissement sans le dire, et assimilant les courbes aux tangentes identiques, ce qui n'est pas sans laisser penser au théorème fondamental de l'intégration. Les courbes sont également considérées comme bien définies par leur équation implicite, fournissant ainsi une classification intermédiaire entre les anciennes et les modernes. Leibniz ira ensuite jusqu'à considérer des courbes non-algébriques.

Ainsi, les classifications premières ne sont pas artificielles mais bien liées aux conceptions mathématiques du temps où elles se sont établies. Deux problèmes se posent de manière générale, à savoir celui de la génération des courbes et celui de leur définition théorique. En réunissant les deux on arrive à avancer, les formules étant l'outil d'étude comme la définition. Les classifications sont engendrées par les différences dérivant de l'inadéquation entre le problème et les connaissances mathématiques, mais ces problèmes découlent aussi de l'évolution des mathématiques, ainsi la différence de moyens en ce qui concerne la possibilité de tracés, donc de visualiser ou de contrôler, une courbe. Mais les classifications sont fondées sur des oppositions, des caractéristiques que l'on pose comme étant fondamentales et que l'on met à la base de ces classifications qui varient d'un auteur à l'autre. Le point commun reste heuristique et unificateur, le problème commun étant de subsumer sous une formulation en équations une classe de courbes.

4.3. **Méthodes algorithmiques.** De nombreux algorithmes existaient implicitement dans les mathématiques anciennes. Il faut interpréter les méthodes pour être capables de les retrouver [38]. Jusqu'à Al-Khwarizmi, ces algorithmes étaient essentiellement arithmétiques. Dès lors, les algorithmes apparaissent dans tous les domaines et dominent toutes les idées qui régissent les preuves [39]. L'apparition de l'algèbre renforce leur importance, pour la première fois intégrée aux mathématiques. Ce ne sont plus des règles de calcul, mais des règles abstraites pour des problèmes indéterminés. La nécessité de justifier les algorithmes utilisés est toujours de mise (info moderne, correction et terminaison). Al-Khwarizmi faisait ces justifications à l'aide de preuves géométriques, mais les méthodes de l'algèbre arithmétisée ont été centrales par la suite. De nombreux algorithmes, numériques et formels, se développent alors. L'astronomie motive en particulier la question de la performance des algorithmes.

Les premières méthodes d'extraction de racines sont de Al-Karaji, mais ces idées trouvent leurs origines dans les pratiques systématiques des arabes, des indiens et des grecs anciens. À partir du IXe siècle, cette réalité de la pratique et du calcul s'intègre aux mathématiques. On détaille les algorithmes importants : Al-Karaji propose une formule médiocre qui sera largement reprise à sa suite. Un autre algorithme est donné par al-Haytham grâce à des équations tronquées qu'il relie entre elles par récurrence. Les méthodes se diffusent largement. al-Sijzi définit les approximations et étudie l'écart à la limite. Les algorithmes sont nombreux, et leurs commentaires les détaillent et les expliques énormément, attachant un soin tout particulier à leur justification.

al-Uqlidisi est le premier à mentionner les fractions décimales, et al-Karaji développe par la suite le sujet de manière théorique. La motivation demeure l'approximation de racines, les idées sont algébriques : al-Sijzi fait le parallèle entre notation polynomiale et fraction décimale. Puis, al-Karaji insiste sur l'analogie avec les expressions en différentes bases,

38. p. 301
39. p. 302

puis s'attache à approcher des irrationnels, identifie la particularité des racines en les nommant, et s'attaque même à π et à d'autres nombres. Les notations apparaissant, le concept atteint l'Europe occidentale peu après, soit bien avant le XVII^e^ siècle de Descartes.

Les équations numériques avec al-Khayyam sont traitées de manière systématique et algorithmique. al-Khayyam résout des équations de Fibonacci, al-Tusi justifie et généralise en théorie ces algorithmes et traite les équations numériques pour elles-mêmes, et non sur un arrière-plan algébrique. La démarche d'al-Tusi consiste en prouver premièrement l'existence de solutions, puis de rechercher successivement les chiffres de la solution en ramenant ce problème à la recherche de racines de polynômes récurrents. Les algorithmes sont représentés par tableaux d'itérations. La méthode, bien que relativement élaborée et fondée par exemple sur les polynômes dominants, demeure explicitée et justifiée en langage parlé, et cette absence de symbolisme efficace limite énormément l'étude. Les astronomes ont proposé des algorithmes géométriquement motivés, et de même al-Kashi propose un algorithme motivé par la trigonométrie, ou aI se base sur une propriété de point fixe !

Les tables de valeurs, telles les tables astronomiques, s'étendaient en des tables très détaillées, et même trop pour que cela soit humainement faisable. Fort probablement, les mathématiciens arabes ont trouvé des méthodes d'interpolation efficaces et fiables. On aperçoit dans les méthodes employées le "début explicite des différences finies" : on veut améliorer l'interpolation linéaire, et prouver l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation d'une certaine classe. Généralement des constructions donnent l'existence de ce polynôme, mais l'unicité n'est que rarement au centre des préoccupations. Les astronomes interpolaient à l'ordre 1, et il faut attendre le X^e^ siècle pour passer à l'ordre 2 et arriver à mathématiser un minimum les algorithmes. De nombreuses méthodes apparaissent et beaucoup portent leurs fruits. al-Biruni étudie théoriquement les inversions et justifie leur supériorité par rapport aux interpolations linéaires, puis s'attache à des études de comparaison entre les différentes méthodes.

4.4. **Fibonacci et le pont entre les mondes arabe et occidental.** La rencontre entre Fibonacci et Frédéric II est centrale et se traduit par la très haute position de Fibonacci, tant historique que mathématique, politique que diplomatique, ainsi que sur son impact et son influence. Le mathématicien comme l'empereur ont eu des influences arabes, ce qui a mené vers un contact si fécond entre les deux, qui se retrouve dans les *Liber* de Fibonacci. On constate en effet que « l'ordre d'exposition est [exactement] celui » [40] des mathématiciens arabes, et que tant les méthodes de preuves que les formulations sont celles propres à l'école arabe. Il traite plusieurs problèmes dont la plupart sont empruntés aux arabes, toutefois en généralisant le cadre notamment à des coefficients irrationnels. Fibonacci a donc fait un travail essentiellement deutéronomique, les réels fondateurs étant ses prédécesseurs arabes [41]. Il n'y a cependant pas eu d'influence apparente de la part des successeurs arabes d'al-Khwarizmi et d'Abu-Kamil [42], laissant à croire que seuls leurs ont trouvé une traduction honnête et une transmission efficace.

Les travaux arithmétiques, numériques et en théorie des nombres de Fibonacci ont aussi subi les influences arabes : notamment en ce qui concerne le parallèle entre $\sqrt{3}$ et le théorème chinois. Mais il laisse dans l'ombre les caractérisations. Il demeure généralement en retard sur les arabes, ressemblant ainsi aux commentateurs contemporains. La mise en parallèle des démarches et formulations très similaires de Fibonacci et de al-Khazin est frappante, toutefois « son œuvre fut source de renouvellement pour les mathématiques latines » [43], établissant ainsi un pont entre les IX^e^ et X^e^ siècles arabes et les XV^e^ et XVI^e^ siècles occidentaux.

Fibonacci hérite, commente et développe la tradition arabe des IX-X^e^siècles arabes. Les réelles innovations sont rares [44] « mais s'y arrêter c'est occulter » [45]. Son apport est « un prolongement en latin des mathématiques arabes ». Tout est fondé sur les échanges entre Fibonacci et des mathématiciens de la cour qui connaissent bien les traductions arabes et de nombreux travaux inconnus en latin.

Les problèmes et résultats de Fibonacci étaient ainsi très proches de ceux connus et exploités des arabes, mais les preuves demeureraient fondamentalement différentes. Les influences et connaissances arabes de Fibonacci sont incontestables, mais également le retard de Fibonacci qui ne connaissait pas les développement récents du monde arabe, plus précisément toute la période postérieure au X^e^siècle. L'originalité des problèmes et idées arabes de cette période a donc été le fertile terreau dans lequel il a pu y développer d'autres méthodes et d'autres idées, développant les mathématique arabes dans d'autres directions et avec originalité, faisant ainsi un « prolongement latin » [46].

40. p. 349
41. p. 350
42. p. 351
43. p. 360
44. p. 362
45. p. 362
46. p. 379

Les travaux de Fermat se basent sur l'analyse diophantienne et l'arithmétique euclidienne. Les deux traditions s'entremêlent depuis le Xesiècle, la seconde étant souvent occultée. Cela est sans nul doute dû à l'importance des résultats de Fermat en analyse diophantienne qui ont permis les grandes avancées connues de la postérité. Les difficulté historiques devant un travail novateur mais héritant toutefois de nombreuses traditions se pose donc ici en sa pleine portée. De la même manière, c'est les idées de caractérisations de classes de nombres, les preuves géométriques et le principe d'induction qui remontent à Euclide qui ont été les conditions de possibilité des preuves algébriques des XIeet XIIesiècles. Mais contrairement à la tradition antique et à Diophante en particulier, à partir d'al-Khwarizmi on recherche le sens mathématique des algorithmes [47] : fondamental [48].

Ainsi, l'examen en détails de l'évolution de la pratique mathématique de Fibonacci montre cette influence arabe, sa portée et ses limites, qui ne peut plus être ingorée car mettant en évidence l'héritage exploité par la mathématicien et la continuité d'une réflexion passant du monde arabe à l'occident, évolution parallèle autant que différente de celle que les mathématiques ont connues en restant dans le monde arabe.

4.5. **D'autres évolutions.** La totalité des travaux mathématiques arabes qui émergent autour du Xe siècle donnent lieu à de longues et riches traditions qui les développent, les enrichissent, les renouvellent sans cesse, permettant l'instauration d'une véritable époque des mathématiques arabes qui a vu naître les idées et qui en sera le fertile terreau jusqu'à une évolution touchant jusqu'à l'Europe occidentale.

En ce qui concerne la géométrie infinitésimale, les transformations et les sommes intégrales se développant, al-Muhi puis Ibn Sahl améliorent les preuves, et trouvent des invariants géométriques [49] en combinant les deux idées. Al-Quhi améliore les preuves pour les volumes de paraboloïdes développant les sommes intégrales.

Ibn-al-Haytham « traverse ce qui sera plus tard l'analyse » [50], faisant preuve d'une grande virtuosité arithmétique, proposant des preuves dans un cadre très général pour le calcul de volumes de solides de révolution. La recherche du comportement asymptotique [51] et la préoccupation des infinis ne fait que rajouter à la charge. S'il ne dégage aucune méthode générale, c'est qu'il compare toujours des aires et des volumes connus, d'où le manque de généralité pour calculer les "intégrales". « La notion n'est plus seulement géométrique mais arithmétique », et est puissante mais entravée « par manque de symbolisme efficace » [52].

Ibn-Sahl développe l'optique, généralise les études et s'intéresse aussi à la réfraction des rayons. On obtient ainsi l'essentiel de son traité sur de nombreux miroirs et lentilles, toujours avec une place accordée aux problèmes de leur construction pratique. La réflexion est notamment ramenée au plan tangent à la surface du miroir ou de la lentille. Ibn-al-Haytham « combine géométriquement et expérimentalement » [53], présentant les gabarits de construction ainsi que les interprétations et commentaires physiques. L'étude en détails des sphériques, les caractéristiques des foyers et rayons et certaines autres propriétés caractéristiques inédites sont soulevées, notamment la notion de zone de convergence. C'est une profonde rénovation des perspectives données aux études optiques, tant par leurs buts que par leurs présentations, qui apparaît au cours de ces développements arabes, dépassant de très loin le simple prolongement de la tradition grecque.

Le monde latin est en possession de traductions des travaux d'Ibn-al-Haytham à partir du XIIesiècle. Très populaire en arabe comme recherches optiques, ses traités sont très prisé par le monde latin pour leur aspect théorique sur les coniques, théorie très peu connue et servant d'intermédiaire à la motivation de la recherche en optique. Ibn Sahl poursuit les études d'Ibn-al-Haytham et considère les concaves plus généraux, les paraboles exploitées comme sections de cônes, et finalement c'est la tradition technique dominante dans le monde arabe qui servira à enfanter les nouvelles idées théoriques qui trouveront leur essor dans le développement théorique de la théorie des coniques.

5. Conclusion : Une periodisation multiple et vivante

C'est en retraçant l'histoire de différentes des branches des mathématiques, de l'Antiquité jusqu'à la période moderne en passant par le monde arabe, que Roshdi Rashed propose de mettre en évidence une rupture qui n'est qu'une illusion découlant tant de l'amalgame entre histoire des mathématiques et histoire politique que la preuve d'une profonde ignorance d'un millénaire d'histoire des mathématiques arabes.

À l'inverse des ruptures révolutionnaires défendues par Kuhn, Roshdi Rashed défend donc une continuité certaines au sein des mathématiques, et s'il est indéniable que des idées nouvelles apparaissent abruptement, leur intégration et leur

47. p. 836
48. p. 390
49. p. 437
50. p. 443
51. p. 451
52. p. 453
53. p. 666-667

exploitation est toujours le résultat d'un processus d'assimilation qui fait intervenir la totalité du monde mathématique et dont la conscience ne s'acquiert qu'au fil du temps.

La recherche de cette continuité est la condition première de compréhension du sens de l'histoire des mathématiques et de ses idées, et tous les exemples exposés sont un splendide argument en sa faveur. Les mathématiques grecques ont été le berceau de la tradition arabes, en lui fournissant les objets, les problèmes et les idées élémentaires, que le monde arabe a su dépasser en diversifiant les problèmes, en trouvant de nouveaux chemins de résolution ou de raisonnement, en redéfinissant les objectifs d'une étude ou encore en rapprochant ces domaines d'autres sciences ou d'autres problèmes concrets, tout en conservant leurs traditions et leur culture, qui semblent justifier plus naturellement l'apparition d'une volonté constante d'abstraction là où les grecs ne croyaient que les lignes qu'ils pouvaient voir. Cette lente évolution dévoile au fil des siècles l'édifice qui apparaît brutalement en Europe occidentale autour des idées de Descartes, et qui n'aura en fait été que la synthèse d'idées multiséculaires dont l'ignorance donnait l'impression d'une soudaine apparition.

Sans rejeter toute périodisation en mathématiques, seul le doute envers la fiabilité d'un tel arbitraire demeure au terme des études qui ont été menées, et la méfiance à l'égard de tout système clos découpant l'histoire s'impose. Finalement, si l'on peut parler de mathématiques classiques pour une certaine tradition unifiant analyse et algèbre et éclairer ainsi les idées dominantes en histoire des mathématiques, on ne peut ni ne doit espérer la délimiter sans de multiples réserves, et il convient toujours de garder à l'esprit qu'une idée apparaît au sein d'une tradition qui la rend plus naturelle, tradition qui est le résultat toujours complexe d'une lente maturation des idées et des méthodes, des problèmes et des conceptions, et que la seule apparition d'une idée, bien que la postérité puisse l'ériger en principe central d'un période, ne peut justifier ni un commencement ni un achèvelent. Les traditions et les idées demeurent multiples et changeantes selon les points de vue, et c'est dans cet incessant ballet des histoires particulières de chaque mathématicien que seule peut se saisir toute la richesse et la portée d'une idée, ainsi que sa place dans l'histoire.

6. Bibliographie

[1] R. Rashed, *D'Al-Khwārismī à Descartes. Étude sur l'histoire des mathématiques classiques*, Hermann, Paris, 2011.