Math. Ann. 256, 199–214 (1981)

Mathematische Annalen

Conducteur des représentations du groupe linéaire

H. Jacquet[1], I. I. Piatetski-Shapiro[2], and J. Shalika[3]

[1] Department of Mathematics, Columbia University, New York, NY 10027, USA
[2] Department of Mathematics, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA
[3] Department of Mathematics, Yale University, New Haven, CT 06520, USA

1. Introduction et notations

(1.1) Soit F un corps local non archimédien, ψ un caractère additif non trivial de F, π une représentation admissible et irréductible du groupe $G_r = \mathrm{GL}(r, F)$ sur un espace complexe V. Dans [G–J], on a défini des facteurs $L(s, \pi)$ et $\varepsilon(s, \pi, \psi)$ qui sont de la forme:

$$\begin{gathered} L(s,\pi) = P_\pi(q^{-s})^{-1}, \qquad P_\pi \in \mathbb{C}[X], \qquad P_\pi(0) = 1\,; \\ \varepsilon(s,\pi,\psi) = \varepsilon_\pi(q^{-s},\psi), \qquad \varepsilon_\pi(X,\psi) = cX^m\,; \end{gathered} \tag{1}$$

où l'on désigne par q le module du corps F. Nous ferons toujours l'hypothèse que l'exposant du caractère ψ est 0, c'est à dire que le plus grand idéal de F sur lequel ψ est trivial est l'anneau des entiers $\mathfrak{R}$. Lorsqu'il en est ainsi, l'entier m ne dépend que de π.

Par exemple, si $r=1$, alors π est un caractère de $F^\times$ (non nécessairement de module un) et l'entier m est positif. De plus si $m=0$ le caractère est non ramifié c'est-à-dire de la forme $\pi(x) = |x|^s$. Si au contraire m est strictement positif alors π est ramifié; de plus, si $\mathfrak{P}$ est l'idéal maximal de l'anneau $\mathfrak{R}$, on sait que π est trivial sur le groupe $1+\mathfrak{P}^m$ et non trivial sur les groupes $1+\mathfrak{P}^a$ avec $0<a<m$.

Pour $r>1$, on peut se demander si l'entier m est positif. On peut se demander aussi s'il existe une interprétation de l'entier m analogue à celle rappelée ci-dessus. Nous allons démontrer que tel est bien le cas, pourvu que la représentation π soit «générique» [cf. (1.2)]. Par exemple si $r=2$, alors une représentation générique est simplement une représentation de dimension infinie et le résultat est maintenant classique [C, D, N].

Cette question avait été d'abord soulevée par A. Weil (pour $r>2$) et résolue, tout au moins dans le cas cuspidal, par D. Kazdan et M. Novodvorsky. Peut-être d'ailleurs d'autres mathématiciens ont-ils, avant nous, résolu cette question-complètement. Aussi ne prétendons nous à aucune espèce d'originalité. Mais comme beaucoup de mathématiciens se sont posés ou nous ont posé cette question, il ne nous à pas paru tout à fait inutile de publier notre démonstration. Elle est du reste calquée sur celle donnée dans [C] pour le cas $r=2$.

0025-5831/81/0256/0199/$03.20

(1.2) Introduisons maintenant les notations et les définitions dont nous aurons besoin. Nous noterons $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$, ω, v, q l'anneau des entiers, l'idéal maximal, une uniformisante, la valuation normalisée et le module du corps F respectivement. Nous poserons $\alpha(x)=|x|=q^{-v(x)}$. En particulier $|\omega|=q^{-1}$.

Soit A_r le sous-groupe des matrices diagonales dans G_r. Si les coefficients diagonaux de la matrice $a\in A_r$ sont les nombres $(a_1,a_2,\dots,a_r)$ nous écrirons

$$a=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\dots,a_r). \tag{1}$$

Soit N_r le groupe trigonal strict supérieur dans G_r. Un caractère additif non trivial ψ de F étant choisi, nous définirons un caractère $\theta_{\psi,r}$ de N_r par la formule

$$\theta_{\psi,r}(n)=\prod_{i=1}^{r-1}\psi(n_{i,i+1}). \tag{2}$$

Une représentation admissible et irréductible π de G_r est dite *générique* s'il existe un espace $\mathscr{W}$ de fonctions sur G_r se transformant à gauche par $\theta_{\psi,r}$ qui soit invariant par translations à droite, la représentation de G_r sur $\mathscr{W}$ étant équivalente à π. L'espace $\mathscr{W}$ est alors unique et se note $\mathscr{W}(\pi;\psi)$. La condition d'être générique ne dépend pas de ψ. D'ailleurs si ψ_1 est un autre caractère additif non trivial de F, on a $\psi_1(x)=\psi(a_1x)$ avec a_1 dans $F^\times$. Pour W dans $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ la fonction W_1 définie par

$$W_1(g)=W(ag),\qquad a=\operatorname{diag}(a_1^{r-1},a_1^{r-2},\dots,a_1,1),$$

est dans $\mathscr{W}(\pi;\psi_1)$. Enfin si π est générique la représentation contragrediente $\tilde{\pi}$ l'est aussi. De plus, si W est dans $\mathscr{W}(\pi;\psi)$, alors la fonction $\tilde{W}$ définie par

$$\tilde{W}(g)=W(w_r{}^tg^{-1}),\qquad w_r=\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}, \tag{3}$$

est dans $\mathscr{W}(\tilde{\pi};\bar{\psi})$, où l'on désigne par $\bar{\psi}$ l'imaginaire conjugué de ψ.

(1.3) Quelques remarques sur l'organisation de cet article. Nous vérifions au Par. 2 des propriétés simples mais essentielles des polynômes $P_\pi(X)$ pour π générique. Au Par. 3 nous étudions les propriétés des fonctions se transformant à gauche par $\theta_{\psi,r}$ qui sont, à droite, fonctions propres de l'algèbre de Hecke. Au Par. 4, imitant la méthode du cas $r=2$, nous définissons le «vecteur essentiel» de l'espace $\mathscr{W}(\pi;\psi)$. Pour cela nous utilisons l'équation fonctionnelle (4.2)(1). Avec les résultats rappelés ou prouvés au Par. 2, c'est la seule propriété des facteurs L et ε dont nous aurons besoin. Les propriétés du vecteur essentiel sont établies au Par. 5: elles découlent aussitôt de l'identité (4.2)(1).

2. Le facteur L des représentations génériques

(2.1) Le but de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant:

Proposition. *Soit π une représentation générique irréductible de G_r. Alors les polynômes*

$$P_\pi(X)\ \text{et}\ P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1})$$

sont premiers entre eux dans l'anneau $\mathbb{C}[X,X^{-1}]$.

(2.2) Nous aurons à utiliser quelques résultats simples sur les représentations génériques et les représentations induites. Soit Q le sous-groupe parabolique standard de type $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ de G_r. Pour chaque entier $i, 1 \leqq i \leqq n$, soit π_i une représentation admissible et irréductible de G_{r_i}. Nour noterons $I(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ la représentation de G_r induite par la représentation suivante de Q:

$$\begin{pmatrix} g_1 & & \\ 0 & g_2 & * \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & & g_n \end{pmatrix} \mapsto \pi_1(g_2) \otimes \pi_2(g_2) \otimes \ldots \otimes \pi_n(g_n).$$

Cette représentation admet une suite de composition finie; pour que l'un des quotients irréductibles de la suite de composition soit générique, il faut et il suffit que chacun des π_i le soit, et il y a alors un seul quotient irreductible générique (cf. [R]). Si tous les π_i sont génériques nous noterons $\sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ l'unique composant générique de $I(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)$. La «transitivité» de l'opération d'induction montre aussitôt que si les π_i sont génériques, alors:

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = \sigma[\sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{j-1}), \sigma(\pi_j, \pi_{j+1}, \ldots, \pi_n)]. \tag{1}$$

Comme la représentation contragrédiente d'une représentation générique est elle même générique, la relation évidente

$$I(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)^{\sim} = I(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \ldots, \tilde{\pi}_n). \tag{2}$$

entraîne

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)^{\sim} = \sigma(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \ldots, \tilde{\pi}_n). \tag{3}$$

De même, on a

$$I(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \otimes \mu = I(\pi_1 \otimes \mu, \pi_2 \otimes \mu, \ldots, \pi_n \otimes \mu) \tag{4}$$

pour tout caractère μ de $F^\times$. D'où:

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r) \otimes \mu = \sigma(\pi_1 \otimes \mu, \pi_2 \otimes \mu, \ldots, \pi_r \otimes \mu). \tag{5}$$

Enfin toute représentation admissible et irréductible de G_r est un composant d'une représentation induite $I(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_2)$ où les π_i sont cuspidales («supercuspidal» dans la terminologie d'Harisch-Chandra); de plus, si $I(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ et $I(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s)$ ont un composant irréductible commun, alors $n = s$ et $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, à l'ordre près. Il s'en suit que toute représentation générique est de la forme

$$\pi = \sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n),$$

où les π_i sont cuspidales et $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ est bien déterminé à l'ordre près.

Par exemple, si Q est le sous-groupe parabolique de type $(1, 1, \ldots, 1)$ dans G_r et si $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ sont des caractères de $F^\times$ tels que $\pi_i(\pi_{i+1})^{-1} = \alpha$, alors on a

$$\pi_i = \mu \alpha^{\frac{1}{2}(r+1)-i}, \quad 1 \leqq i \leqq r,$$

et

$$\sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r) = \mu \otimes \sigma_r,$$

où σ_r est la représentation spéciale de Steinberg: cela résulte par exemple de ce que σ_r est de carré intégrable, donc générique (cf. [G–J, Par. 7; J2]).

(2.3) Vérifions maintenant la proposition (2.1) pour une représentation de la forme

$$\pi = \mu \otimes \sigma_r. \tag{1}$$

On a alors $\tilde{\pi} = \mu^{-1} \otimes \sigma_r$. Si μ est ramifié la proposition est évidente car alors

$$P_\pi(X) = 1, \qquad P_{\tilde{\pi}}(X) = 1. \tag{2}$$

Si μ n'est pas ramifié, alors $\mu = \alpha^t$ pour un t convenable et [G–J, Par. 7]:

$$P_{\mu \otimes \sigma_r}(X) = P_{\sigma_r}(q^{-t}X) = 1 - q^{-t-\frac{1}{2}(r-1)}X, \tag{3}$$

$$P_{\mu^{-1} \otimes \sigma_r}(X) = 1 - q^{t-\frac{1}{2}(r-1)}X. \tag{4}$$

La proposition est donc encore évidente.

Passons maintenant au cas d'une représentation de la forme

$$\pi = \sigma(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r) \tag{5}$$

où les π_i sont des caractères non ramifiés.

Nous pouvons supposer que la suite $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)$ est de la forme

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1^1, \mu_2^1, \ldots, \mu_{r_1}^1, \mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_{r_2}^2, \ldots, \mu_1^m, \mu_2^m, \ldots, \mu_{r_m}^m \\ \mu_k^i(\mu_{k+1}^i)^{-1} = \alpha, \qquad \mu_{r_i}^i(\mu_1^j)^{-1} \neq \alpha, \quad \text{si} \quad i \neq j. \end{array}\right\} \tag{6}$$

En posant $\mu_1^i = \alpha^{u_i}$, nous avons donc

$$\sigma(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_{r_i}^i) = \sigma_{r_i} \otimes \alpha^{u_i - \frac{r_i - 1}{2}},$$

$$\pi = \sigma\left(\sigma_{r_1} \otimes \alpha^{u_1 - \frac{r_1 - 1}{2}}, \ldots, \sigma_{r_m} \otimes \alpha^{u_m - \frac{r_m - 1}{2}}\right).$$

Il résulte alors de [J2, (2.7.4)] que $P_\pi[X]$ divise le produit

$$\prod_i P_{\sigma_{r_i}}\left(q^{-u_i + \frac{1}{2}(r_i - 1)}X\right).$$

De même $P_{\tilde{\pi}}(X)$ divise le produit

$$\prod_i P_{\sigma_{r_i}}\left(q^{u_i - \frac{1}{2}(r_i - 1)}X\right).$$

Si $P_\pi(X)$ et $P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1})$ ont un facteur commun (non trivial) dans l'anneau $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$, il existe au moins un couple (i,j) tel que les polynômes

$$P_{\sigma_{r_i}}\left(q^{-u_i + \frac{1}{2}(r_i - 1)}X\right) = 1 - q^{-u_i}X,$$

$$P_{\sigma_{r_j}}\left(q^{u_j - \frac{r_j - 1}{2}} q^{-1}X^{-1}\right) = 1 - q^{u_j - r_j}X^{-1},$$

soient identiques, au produit près par une unité. C'est impossible si $i=j$. Si $i\neq j$, cela impose $\alpha^{u_j-r_j}=\alpha^{u_i}$ ou encore $\mu_1^i(\mu_{r_j}^j)^{-1}=\alpha^{-1}$. Or ceci contredit (6). La proposition est donc prouvée dans ce cas.

(2.4) En général, écrivons π sous la forme

$$\pi=\sigma(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_j,\pi_{j+1},\ldots,\pi_n),$$

où les représentations cuspidales $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_j$ ne sont pas des caractères non-ramifiés tandis que $\pi_{j+1},\ldots,\pi_n$ sont des caractères non ramifiés de $F^\times$. Alors:

$$\pi=\sigma(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_j,\zeta) \quad \text{avec} \quad \zeta=\sigma(\pi_{j+1},\ldots,\pi_n).$$

Toujours d'après [J2, (2.7.4)] le polynôme $P_\pi(X)$ divise le produit

$$P_\zeta(X)\prod_{1\leqq i\leqq j}P_{\pi_i}(X)$$

Mais $P_{\pi_i}(X)=1$ [loc. cit. (3.1)]. Donc $P_\pi(X)$ divise en fait $P_\zeta(X)$. De même $P_{\tilde\pi}(q^{-1}X^{-1})$ divise $P_{\tilde\zeta}(q^{-1}X^{-1})$. D'aprés (2.3) ces polynômes sont premiers entre eux. Le résultat s'en suit.

(2.5) Nous aurons aussi besoin du résultat auxiliaire suivant:

Proposition. *Soit π une représentation irréductible générique de G_r. Le degré de P est au plus r. Pour que π contienne la représentation unité du sous groupe compact maximal $K_r=\mathrm{GL}(r,\mathfrak{R})$, if faut et il suffit que le degré de P_π soit r.*

Démonstration. Ecrivons π sous la forme

$$\pi=\sigma(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m)$$

où les π_i sont cuspidales et $m\leqq r$. Une fois de plus $P_\pi(X)$ divise le produit $\prod P_{\pi_i}(X)$. Comme chaque P_{π_i} est de degré au plus un, on voit que P_π est de degré au plus r. Supposons maintenant que P_π soit de degré r. Alors $m=r$ et chaque P_{π_i} doit être de degré un. Cela signifie que chaque π_i est un caractère non ramifié de $F^\times$. Supposons la représentation induite $\zeta=I(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_r)$ non irréductible. Alors il existe au moins un couple (i,j) tel que $\pi_i\cdot\pi_j^{-1}=\alpha$ [B–Z, Theorem (4-11)]. On peut supposer que c'est le couple $(1,2)$. Alors on a:

$$\pi=\sigma(\zeta,\pi_3,\ldots,\pi_r), \qquad \zeta=\sigma(\pi_1,\pi_2)=\sigma_2\otimes\mu.$$

A nouveau P_π divise le produit

$$P_\zeta\prod_{i=3}^{r}P_{\pi_i}.$$

Mais comme P_ζ est de degré un [G–J, Par. 7] on obtient une contradiction. Ainsi ξ est irréductible et $\pi=\xi$. Donc π contient la représentation unité de K_r.

En sens inverse, si π est une représentation irréductible qui contient la représentation unité de K, ou comme nous dirons encore, une représentation *non-ramifiée*, alors π est le composant non-ramifié d'une représentation induite

$\xi = I(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)$ où les π_i sont des caractères non-ramifiés de $F^\times$. Alors

$$P_\pi(X) = \prod_{1 \leqq i \leqq r} P_{\pi_i}(X)$$

et chaque P_{π_i} est de degré un [G–J, Par. 6]. Donc P_π est de degré r.

(2.6) *Remarque.* On peut montrer que l'énoncé obtenu en supprimant dans la Proposition (2.5) le mot générique est encore vrai.

3. Fonctions de Whittaker formelles

(3.1) Nous aurons à utiliser des résultats élémentaires sur les fonctions se transformant à gauche par le caractère $\theta = \theta_{\psi, r}$. Nous les énonçons une fois pour toutes.

Pour g dans G_r posons

$$\begin{aligned} \alpha_i(g) &= a_i/a_{i+1}, \qquad 1 \leqq i \leqq r-1 \\ \alpha_r(g) &= a_r \end{aligned} \tag{1}$$

si $g = nak$ avec $n \in N_r$, $k \in K_r$ et

$$a = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_r).$$

Soit φ une fonction lisse à droite telle que

$$\varphi(ng) = \theta(n)\varphi(g).$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\varphi(g) \neq 0 \Rightarrow |\alpha_i(g)| \leqq C, \qquad 1 \leqq i \leqq r-1. \tag{2}$$

En effet, comme φ n'a qu'un nombre fini de translatées à droite par K_r, il suffit de montrer l'existence d'un C tel que

$$\varphi(a) \neq 0 \Rightarrow |\alpha_i(a)| \leqq C, \qquad 1 \leqq i \leqq r-1.$$

Mais en prenant

$$n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & x_{r-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

on doit avoir

$$\varphi(an) = \varphi(ana^{-1}a) = \prod_{i=1}^{r-1} \psi(\alpha_i(a)x_i)\varphi(a).$$

Or $\varphi(a) = \varphi(an)$ si les $|x_i|$ sont assez petits. D'où la conclusion. On voit même que si φ est K_r-invariant alors on peut prendre $C=1$.

De même on a

$$\varphi\left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_{r-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \varphi\left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\psi[(0, \ldots, 0, 1)gu]. \tag{3}$$

On en conclut que la relation

$$\varphi\left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_{r-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\varphi\left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \quad \text{pour tout} \begin{pmatrix} 1_{r-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in K_r,$$

a lieu pour tout g, si et seulement si la relation

$$\varphi\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\neq 0$$

implique que la dernière ligne de g a tous ses coefficients entiers.

(3.2) Nous aurons à utiliser des résultats connus sur les représentations «non-ramifiées» du groupe G_r. Soit H_r l'algèbre de convolution des fonctions bi-invariantes par $K_r = \mathrm{GL}(r, \mathfrak{R})$ et à support compact. On sait que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre S_r des polynômes en $X_1, X_1^{-1}, X_2, X_2^{-1}, \ldots, X_r, X_r^{-1}$ qui sont invariants par permutation des variables. Notons $T_1, T_2, \ldots, T_r$ les fonctions symétriques élémentaires des X_i. Ainsi:

$$T_1=\sum_i X_i, \qquad T_2=\sum_{i<j} X_i X_j, \ldots, T_r=\prod_i X_i. \tag{1}$$

Alors S_r est encore isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[T_1, T_2, \ldots, T_r, T_r^{-1}]$.

Dans la suite nous adopterons les conventions suivantes pour les mesures de Haar et les mesures invariantes. La mesure de Haar de G_r (et de K_r) est normalisée par la condition $\mathrm{mes}(K_r)=1$, celle de N_r par $\mathrm{mes}(K_r \cap N_r)=1$. La mesure invariante de $N_r \backslash G_r$ est le quotient des mesures précédentes.

Soit maintenant $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ une suite de r nombres *non nuls*. Elle détermine un morphisme $S_r \to \mathbb{C}$, à savoir

$$P \mapsto P(x_1, x_2, \ldots, x_r). \tag{2}$$

L'homomorphisme correspondant $\lambda: H_r \to \mathbb{C}$ s'obtient ainsi. Soit $I(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ la représentation de G_r induite par le caractère

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \; a_r \end{pmatrix} \mapsto x_1^{v(a_1)} x_2^{v(a_2)} \ldots x_r^{v(a_r)} \tag{3}$$

du groupe trigonal supérieur. Alors l'espace de cette représentation contient un vecteur et un seul fixé par K_r et égal à un sur K_r. Soit f ce vecteur. Pour tout $\varphi \in H$ on a:

$$\int f(gh)\varphi(h)dh=\lambda(\varphi)f(g). \tag{4}$$

(3.3) Soit maintenant ψ un caractère additif non trivial de F d'exposant 0. Pour toute suite de nombres complexes non nuls $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, il existe une fonction W et une seule telle que

$$W(ngk)=\theta(n)W(g), \qquad n\in N, \qquad k\in K; \tag{1}$$

$$W(e)=1; \tag{2}$$

pour tout $\varphi \in H$

$$\int W(gh)\varphi(h)dh = \lambda(\varphi)W(g), \tag{3}$$

où λ est le morphisme de H dans $\mathbb{C}$ décrit dans (3.2) (cf. [S]). Nous noterons cette fonction

$$W(g, x_1, x_2, \ldots, x_r; \psi). \tag{4}$$

Il résulte de l'unicité que

$$W(w{}^t g^{-1}, x_1, x_2, \ldots, x_r; \psi) = W(g, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_r^{-1}; \bar{\psi}). \tag{5}$$

De plus si $q^{-s} = x$, alors

$$W(g, x_1, x_2, \ldots, x_r; \psi)|\det g|^s = W(g, x_1 x, x_2 x, \ldots, x_r x; \psi). \tag{6}$$

La formule explicite donnée en [S] montre qu'il existe pour chaque $g \in G_r$ un élément $W(g, X_1, X_2, \ldots, X_r; \psi)$ de S_r dont $W(g, x_1, x_2, \ldots, x_r; \psi)$ soit la spécialisation. On a ainsi défini une fonction sur G_r à valeurs dans S_r; d'ailleurs ses valeurs sur un ensemble compact modulo N_r sont dans un sous-espace vectoriel de dimension *finie* de S_r. D'après (3.1), le support de $W(g, X_1, X_2, \ldots, X_r; \psi)$ est contenu dans l'ensemble des g tels que

$$|\alpha_i(g)| \leqq 1, \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq r-1. \tag{7}$$

Si de plus $|\alpha_r(g)| \leqq 1$ alors $W(g, X_1, X_2, \ldots, X_r; \psi)$ est en fait dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_r]$.

(3.4) Nous aurons à considérer des «intégrales» de la forme

$$\int_{N_r \backslash G_r} W(g, X_1, X_2, \ldots, X_r; \psi)\varphi(g)|\det g|^s dg, \tag{1}$$

où φ est une fonction se transformant à gauche par $\theta_{\bar{\psi}, r} = \bar{\theta}_{\psi, r}$. La fonction φ sera supposée lisse à droite, c'est-à-dire invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert de G_r. De plus le support de φ sera toujours contenu dans l'ensemble des g tels que

$$|\alpha_r(g)| \leqq C, \tag{2}$$

où C est une constante non nulle. L'intégrale est à interpréter comme série formelle

$$\sum a_n X^n, \quad X = q^{-s}, \tag{3}$$

à coefficients dans S_r, les coefficients étant donnés par l'intégrale ordinaire

$$a_n = \int_{N_r \backslash G_r} W(g, X_1, X_2, \ldots, X_r; \psi)\varphi(g)\mu_n(\det g)dg, \tag{4}$$

où μ_n est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{x \in F^\times | v(x) = n\} \tag{5}$$

dans $F^\times$. Il est clair que les conditions (3.3)(7), (3.4)(2) et $v(\det g) = n$ impliquent que g est dans un ensemble compact mod N_r: la fonction à intégrer dans (4) est donc à support compact mod N_r et l'intégrale a bien un sens. De plus notons que les relations (3.3)(7) et (3.4)(2) entrainent $v(\det g) \geqq m$, où m est un entier qui dépend de C. Il en résulte que dans la série (3) on a $a_n = 0$ pour $n < m$.

(3.5) **Lemme.** *Gardons les hypothèses de* (3.4) *mais supposons de plus que φ soit invariante à droite par K_r. Alors la relation*

$$\int W(g,X_1,X_2,\dots,X_r;\psi)\varphi(g)|\det g|^s dg=0$$

entraine $\varphi=0$.

Démonstration. If suffit de démontrer le lemme lorsque φ a un support compact modulo N_r. L'hypothèse du lemme s'écrit alors:

$$\int_{N_r\backslash G_r} W(g,x_1,x_2,\dots,x_r;\psi)\varphi(g)dg=0, \tag{1}$$

pour tout $(x_1,x_2,\dots,x_r)$. Montrons que cela entraine $\varphi=0$. Pour cela considérons la représentation π de G_r induite, au sens de Mackey, par le caractère (de module 1) $\theta_{\bar\psi,r}$. Décomposons la en somme continue de représentations irréductibles:

$$\pi=\int \pi_x d\mu(x).$$

Soit V l'ensemble des fonctions lisses à droite et support compact modulo N_r dans l'espace de la représentation π. Comme V a une base linéaire dénombrable, il existe, pour presque tout x, une application linéaire A_x de V dans l'espace de la représentation π_x telle que

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle=\int\langle A_x\varphi_1,A_x\varphi_2\rangle d\mu(x),\qquad \varphi_1,\varphi_2\in V. \tag{2}$$

De plus, pour presque tout x, on a

$$A_x\pi(g)\varphi=\pi_x(g)A_x\varphi,\qquad g\in G_r,\qquad \varphi\in V.$$

Soit maintenant φ_0 un élément de V invariant sous K_r. Alors $A_x\varphi_0=0$ à moins que π_x ait un vecteur $v_x\neq 0$ invariant sous K_r. Supposons qu'il en soit ainsi; alors il existe une fonction W et une seule se transformant à gauche par $\theta_{\psi,r}$ telle que, pour tout $\varphi\in V$,

$$(A_x\varphi,v_x)=\int_{N_r\backslash G_r}\varphi(g)W(g)dg.$$

Comme v_x est K_r-invariant la fonction W est K_r-invariant à droite. De plus v_x doit être un vecteur propre pour l'algèbre H_r. Il en est donc de même de la fonction W. Par conséquent cette fonction est un multiple d'une fonction $W(x_1,x_2,\dots,x_r;\psi)$. Si φ_0 satisfait (1) alors $(A_x\varphi_0,v_x)=0$ ou encore $A_x\varphi_0=0$. Ainsi $A_x\varphi_0=0$ pour presque tout x. D'après (2) on a $\varphi_0=0$. Q.E.D.

4. Le vecteur essentiel

(4.1) Nous sommes maintenant en mesure de définir le vecteur essentiel d'une représentation générique π de G_r. Rappelons une fois de plus que l'exposant de ψ est supposé être 0. Pour tout $W\in\mathscr{W}(\pi;\psi)$, posons

$$\begin{aligned}&\Psi(X,W,X_1,X_2,\dots,X_{r-1})\\&=\int_{N_{r-1}\backslash G_{r-1}} W\begin{pmatrix}g&0\\0&1\end{pmatrix}W(g,X_1,X_2,\dots,X_{r-1};\bar\psi)\\&\qquad|\det g|^{s-1/2}dg,\qquad X=q^{-s}.\end{aligned} \tag{1}$$

La fonction $g \mapsto W\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisfait évidemment les conditions de (3.4) et l'intégrale représente une série de Laurent formelle à coefficients dans S_{r-1}. D'après (3.4)(6) on a, si U est une indéterminée,

$$\Psi(UX, W, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}) = \Psi(X, W, UX_1, UX_2, \ldots, UX_{r-1}). \tag{2}$$

Théorème. *Il existe un élément et un seul W de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ tel que*

(i) $W\left(g\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = W(g)$ *pour* $h \in K_{r-1}$,

(ii) $\Psi(X, W, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}) = \prod_{i=1}^{r-1} P_\pi^{-1}(XX_i)$,

le second membre de (ii) *étant la série formelle en X à coefficients dans S_{r-1} obtenue en développant $P_\pi^{-1}(XX_i)$ suivant les puissances croissantes de X.*

Démonstration de l'unicité. D'après le lemme (3.4) la restriction de W au sous-groupe

$$\left\{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| g \in G_{r-1}\right\} \tag{3}$$

est uniquement déterminée. Or, d'après les résultats de [B–Z, Théorème (4.9)], un élément de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ est toujours déterminé par sa restriction au sous-groupe (3). L'unicité est donc évidente.

(4.2) *Démonstration de l'existence.* Nous nous appuierons sur une identité dans l'espace des séries de Laurent à coefficients dans S_{r-1}. Notons que cet espace peut être regardé comme un module sur l'anneau des polynômes en X, X^{-1} à coefficients dans S_{r-1}. De plus cet espace admet un automorphisme changeant la série $F(X) = \sum a_n X^n$ en la série

$$F(X^{-1}) = \sum a_n X^{-n} = \sum a_{-n} X^n.$$

Cet automorphisme est compatible avec l'automorphisme correspondant de l'algèbre des polynômes en X, X^{-1}. L'identité que nous avons en vue s'écrit, pour tout élément W de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$:

$$\begin{aligned} &\Psi(q^{-1}X^{-1}, \tilde{W}, X_1^{-1}, X_2^{-2}, \ldots, X_{r-1}^{-1}) \prod_{\pi=1}^{r-1} P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1}X_i^{-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} \varepsilon_\pi(XX_i, \psi) \Psi(X, W, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}) \prod_{i=1}^{r-1} P_\pi(XX_i). \end{aligned} \tag{1}$$

Dans cette formule $\tilde{W}$ est défini par (1.2)(3). Rappelons que c'est un élément de l'espace $\mathscr{W}(\tilde{\pi};\bar{\psi})$ attaché à la représentation contragrédiente $\tilde{\pi}$ et au caractère $\bar{\psi}$ imaginaire conjugué de ψ.

L'identité (1) est équivalente à la réunion d'une infinité d'identités dans l'anneau S_{r-1}. Pour démontrer (1) il suffit donc de démontrer l'identité analogue obtenue en remplaçant les X_i par des nombres complexes $x_i \neq 0$. On peut même se restreindre au cas où tous les x_i sont de module 1. Alors la représentation induite $\pi' = I(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$ de G_{r-1} est irréductible et générique et la fonction

$W'=W(x_1,x_2,\ldots,x_{r-1};\bar\psi)$ est un élément de l'espace $\mathscr{W}(\pi';\bar\psi)$. De même $W(g,x_1^{-1},x_2^{-1},\ldots,x_{r-1}^{-1};\psi)$ n'est autre que la fonction $(W')^{\sim}$. En posant, pour $\mathscr{W}'\in W(\pi';\bar\psi)$,

$$\Psi(X,W,W')=\int W\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} W'(g)|\det g|^{s-1/2}dg\,,\qquad X=q^{-s},$$

les résultats énoncés dans [J–P–S2] montrent que

$$\begin{aligned}&\Psi(q^{-1}X^{-1},\tilde W,\tilde W')\prod_i P_{\tilde\pi}(q^{-1}X^{-1}x_i^{-1})\\ &=\prod_i \varepsilon_\pi(Xx_i,\psi)\Psi(X,W,W')\prod_i P_\pi(Xx_i)\,,\end{aligned}\tag{3}$$

pout tout W'. En prenant $W'=W(x_1,x_2,\ldots,x_{r-1};\bar\psi)$ nous obtenons bien la spécialisation de (1).

D'après les remarques de (3.4) la série formelle $\Psi(X,W,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ n'a qu'un nombre fini de termes avec un exposant négatif. Il en est donc de même du membre de droite de (1). Au contraire le membre de gauche est une série formelle avec un nombre fini d'exposants positifs. L'identité (1) montre donc que chaque membre est un polynôme en X,X^{-1} à coefficients dans S_{r-1}. D'après (4.1)(2) il existe même un élément $\Xi(W,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ de S_{r-1} tel que

$$\begin{aligned}&\Xi(W,XX_1,XX_2,\ldots,XX_{r-1})\\ &=\Psi(X,W,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})\prod_{i=1}^{r-1} P_\pi(XX_i)\,.\end{aligned}\tag{4}$$

D'une manière imagée, on peut écrire.

$$\begin{aligned}&\Xi(W,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})\\ &=\int_{N_{r-1}\backslash G_{r-1}} W\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} W(g,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1};\bar\psi)|\det g|^{-1/2}dg\prod_{i=1}^{r-1}P_\pi(X_i)\,.\end{aligned}\tag{5}$$

Soit alors $I(\pi)$ le sous espace vectoriel de S_{r-1} engendré par les $\Xi(W,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ avec W dans $\mathscr{W}(\pi;\psi)$. C'est en fait un idéal de l'anneau S_{r-1}. En effet soit P un élément quelconque de S_{r-1} et φ l'élément correspondant de H_{r-1}. Alors

$$\begin{aligned}&\int W(gh,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})\varphi(h)dh\\ &=W(g,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1};\bar\psi)P(X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})\,.\end{aligned}$$

Si W est dans $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ la fonction W_1 définie par

$$W_1(g)=\int W\left(g\begin{pmatrix} h & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\varphi(h^{-1})|\det h|^{-1/2}dh$$

est encore dans $\mathscr{W}(\pi;\psi)$. En partant de la formule (5) un calcul formel facile à justifier montre que

$$\Xi(W_1,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})=\Xi(W,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})\cdot P(X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})\,.$$

D'où notre assertion.

L'idéal $I(\pi)$ contient le produit $\prod P_\pi(X_i)$. En effet d'après les résultats de [G–K, Théorème (5.2)], il existe un élément W de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ tel que

$$W\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \theta_{\psi,r-1}(n), \quad \text{si} \quad g=nk, \qquad n\in N_{r-1}, \qquad k\in K_{r-1}; =0 \text{ sinon}.$$

Pour ce W on a évidemment d'après (5):

$$\Xi(W,X_1,X_2,\dots,X_{r-1}) = \prod_{i=1}^{r-1} P_\pi(X_i).$$

D'où la conclusion.

Finalement l'identité (1) s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} &\Xi(\tilde{W},q^{-1}X_1^{-1},q^{-1}X_2^{-1},\dots,q^{-1}X_{r-1}^{-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} \varepsilon_\pi(X_i,\psi)\Xi(W,X_1,X_2,\dots,X_{r-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

En échangeant les rôles de π et $\tilde{\pi}$ cela montre que le produit $\prod_{i=1}^{r-1} \mathrm{P}_\pi(\mathrm{q}^{-1}\mathrm{X}_i^{-1})$ appartient aussi à $I(\pi)$. D'après la proposition (2.1) on voit qu'il n'existe pas de suite $(x_1,x_2,\dots,x_{r-1})$ avec $x_i \neq 0$, sur laquelle tous les éléments de $I(\pi)$ s'annulent. Si J est l'ideal correspondant de l'anneau $\mathbb{C}[T_1,T_2,\dots,T_{r-1},T_{r-1}^{-1}]$ [notations de (3.1)], cela signifie que les éléments de J n'ont pas de zero commun $(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})$ avec $t_{r-1}\neq 0$. Il en résulte que

$$J=\mathbb{C}[T_1,T_2,\dots,T_{r-1},T_{r-1}^{-1}]$$

et $I(\pi)=S_{r-1}$.

En particulier il existe un élément W de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ tel que

$$\Xi(W,X_1,X_2,\dots,X_{r-1})=1.$$

En revenant aux définitions, cela s'écrit

$$\prod_{i=1}^{r-1} P_\pi(XX_i)\Psi(X,W,X_1,X_2,\dots,X_{r-1})=1.$$

Or $\Psi(X,W,X_1,X_2,\dots,X_{r-1})$ appartient à l'espace des séries de Laurent n'ayant qu'un nombre fini de termes avec exposant négatif; cet espace est un module *sans torsion* sur l'anneau $S_{r-1}[X,X^{-1}]$. La fonction W satisfait donc bien à la condition (ii) du théorème (4.1). Alors la formule

$$W_1(g) = \int_{K_{r-1}} W\left[g\cdot\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] dk$$

definit un element de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ qui satisfait à la condition (i). Comme l'intégrale Ψ ne change pas lorsqu'on remplace W par W_1 la fonction W_1 satisfait aussi (ii). Le théorème est donc démontré.

(4.3) *Exemple.* Supposons que π contienne la représentation unité de K_r. Alors π est équivalente à une représentation induite $I(y_1,y_2,\dots,y_r)$ et

$W = W(y_1, y_2, \ldots, y_r; \psi)$ appartient à $\mathscr{W}(\pi; \psi)$. On a alors

$$P_\pi(X) = \prod_{i=1}^{r} (1 - y_i X).$$

D'après les résultats de [J–P–S2], on a aussi:

$$\Psi(X, W, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}) = \prod_{1 \leqq i \leqq r,\, 1 \leqq j \leqq r-1} (1 - y_i X_j X)^{-1}.$$

Comme W est invariant sous K_r, on voit que W satisfait les conditions du théorème (4.1).

(4.4) *Définition.* Sous les hypothèses du théorème (4.1), on dira que W est le vecteur essentiel de $\mathscr{W}(\pi; \psi)$.

5. Propriétés du vecteur essentiel

(5.1) Soit à nouveau π une représentation irréductible et générique de G_r. Rappelons que ψ désigne un caractère additif d'exposant 0. Soit m l'entier tel que

$$\varepsilon_\pi(X, \psi) = C X^m. \tag{1}$$

Dans ce paragraphe, nous établissons le théorème suivant:

Théorème. (i) *On a* $m \geqq 0$.

(ii) *Pour tout entier* $a > 0$ *soit* $K_r(a)$ *le sous-groupe de* K_r *forme des matrices du type*

$$\begin{pmatrix} h & v \\ u & x \end{pmatrix}, \quad h \in K_{r-1}, \quad x \in \mathfrak{R}^\times, \quad x \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}^a, \quad u \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^a.$$

On pose aussi $K_r(0) = K_r$. *Alors le vecteur essentiel est invariant sous* $K_r(m)$ *et la dimension de l'espace des vecteurs fixés par* $K_r(m)$ *est un.*

(iii) *Si* $a \geqq 0$ *et s'il existe dans la représentation* π *un vecteur non nul fixé par* $K_r(a)$, *alors* $a \geqq m$.

(5.2) Pour démontrer le théorème nous introduirons, pour chaque entier $a \in \mathbb{Z}$, le sous-groupe $H(a)$ de G_r formé des matrices du type

$$\begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où h est dans K_{r-1} et où les éléments de la matrice colonne u sont dant $\mathfrak{P}^a$. Cela étant, le premier pas est de démontrer que le vecteur essentiel W est invariant sous $H(0)$. Par définition W est invariant sous le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| h \in K_{r-1} \right\}.$$

If suffit donc de démontrer que W est invariant sous le sous-groupe de $H(0)$ formé des matrices de $H(0)$ pour lesquelles $h = 1_{r-1}$. Comme W est déterminée par sa restriction au sous-groupe (4.1)(3), il suffit, d'après les remarques de (3.1), de prouver le lemme suivant:

Lemme. *Si W est le vecteur essentiel de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ alors la relation*

$$W\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad g \in G_{r-1},$$

entraine que la dernière ligne de g est à coefficients entiers.

Démonstration du lemme. Soit u le degré de P_π. On a donc $u \leqq r$ (2.5). Supposons que $u=r$. Alors π contient la représentation unité de K_r (loc. cit.). D'après (4.3) W est alors invariante sous K_r et notre assertion est alors évidente. Supposons maintenant $u \leqq r-1$ et écrivons

$$P_\pi(X) = \prod_{i=1}^{u} (1 - y_i X).$$

Nous distinguerons deux cas: $u<r-1$ et $u=r-1$.

Dans le cas $u<r-1$, on a l'identité (cf. [J–P–S2]):

$$\int_{N_u \backslash G_u} W\left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}; \bar{\psi}\right] W(g, y_1, y_2, \ldots, y_u; \psi) |\det g|^{s-\frac{1}{2}(r-u-1)} dg$$
$$= \prod (1 - y_j X_i X)^{-1}, \quad 1 \leqq j \leqq u, \quad 1 \leqq i \leqq r-1.$$

Définissons maintenant une fonction φ sur G_{r-1} par les conditions suivantes:

$$\varphi(ngk) = \theta_{\psi, r-1}(n) \varphi(g) \quad \text{si} \quad n \in N_{r-1}, \quad k \in K_{r-1};$$

si $a = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1})$ alors

$$\varphi(a) = W(b, y_1, y_2, \ldots, y_u; \psi) \quad \text{avec} \quad b = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_u)$$

si $|a_{u+1}| = \ldots |a_{r-1}| = 1$; $=0$ sinon. Il est clair que φ satisfait les conditions de (3.3). On a évidemment

$$\int_{N_{r-1} \backslash G_{r-1}} \varphi(g) W(g, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}; \bar{\psi}) |\det g|^{s+\frac{1}{2}(r-u-1)} dg = \prod P_\pi(X X_i)^{-1}.$$

D'après le lemme (3.4), on a donc

$$W\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(g) |\det g|^{\frac{1}{2}(r-u)} \quad .$$

Le lemme en découle aussitôt.

Si $u=r-1$, on a (cf. [J–P–S2])

$$\int_{N_{r-1} \backslash G_{r-1}} W(g, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}; \psi) W(g, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}; \bar{\psi})$$
$$\cdot \Phi[(0, 0, \ldots, 0, 1) g] |\det g|^s dg = \prod (1 - y_i X_j X)^{-1},$$

où Φ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \ldots \times \mathfrak{R}$ dans F^{r-1}. En raisonnant comme plus haut on trouve

$$W\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W(g, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}; \psi) \Phi[(0, 0, \ldots, 0, 1) g] |\det g|^{1/2}$$

et, à nouveau, le lemme découle aussitôt de cette relation.

(5.3) Dénotons toujours par W le vecteur essentiel de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$. Alors d'après (4.2)(1):

$$\Psi(q^{-1}X^{-1},\tilde{W},X_1^{-1},X_2^{-1},\ldots,X_{r-1}^{-1})\prod_{i=1}^{r-1}P_{\tilde{\pi}}(q^{-1}X^{-1}X_i^{-1})=\prod_{i=1}^{r-1}\varepsilon_\pi(XX_i,\psi).$$

Comme $\Psi(X,\tilde{W},X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ n'a que des termes avec exposants positifs cela s'écrit aussi [cf. (5.1)(1)]:

$$\Psi(X,\tilde{W},X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})=C^{r-1}q^{-m(r-1)}X^{-m(r-1)}\prod_{i=1}^{r-1}X_i^{-m}\prod_{i=1}^{r-1}P_{\tilde{\pi}}^{-1}(XX_i).$$

Soit W' le vecteur essentiel de $\mathscr{W}(\tilde{\pi};\bar{\psi})$. Alors

$$\Psi(X,W',X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})=\prod_{i=1}^{r-1}P_{\tilde{\pi}}^{-1}(XX_i).$$

Définissons maintenant un élément W_1 de $\mathscr{W}(\tilde{\pi};\bar{\psi})$ par la formule

$$W_1(g)=W'(ga),\qquad a=\operatorname{diag}(\omega^m,\omega^m,\ldots,\omega^m,1).$$

Alors, il y a une constante C' telle que

$$\Psi(X,\tilde{W},X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})=C'\Psi(X,W_1,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1}).$$

D'après le lemme (3.4) cela implique $\tilde{W}=C'W_1$ sur le sous-groupe (4.2)(3). Donc, d'après une remarque déjà faite, $\tilde{W}=C'W_1$. Comme W' est invariante sous $H(0)$, cela implique que $\tilde{W}$ est invariante sous $H(m)$. En revenant à la définition de $\tilde{W}$ on voit que cela implique l'invariante de W sous le groupe transposé ${}^tH(m)$.

Si on avait $m<0$, les groupes $H(0)$ et ${}^tH(m)$ engendreraient G_r. La fonction W serait donc constante ce qui est absurde. On a donc $m\geqq 0$. Les groupes $H(0)$ et ${}^tH(m)$ engendrent alors $K(m)$ de sorte que W est bien invariante sous $K(m)$.

Soit maintenant u un entier $\geqq 0$ et W_1 un vecteur de $\mathscr{W}(\pi;\psi)$ invariant sous $K(u)$. L'invariance de W_1 sous $H(0)$ implique que

$$W_1\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq 0\Rightarrow|\alpha_i(g)|\leqq 1,\qquad 1\leqq i\leqq r-1$$

[cf. (3.1)]. En particulier dans l'intégrale (4.1)(1) pour $\Psi(X,W_1,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ on peut supposer que $|\det g|\leqq 1$ et $W(g,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1};\bar{\psi})$ est dans $\mathbb{C}[X_1,X_2,\ldots,X_{r-1}]$ [cf. (3.3)]. La série n'a donc que des termes à exposants positifs et ses coefficients sont dans $\mathbb{C}[X_1,X_2,\ldots,X_{r-1}]$. Il en résulte que $\Xi(W_1,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ est un polynôme P en $X_1,X_2,\ldots,X_{r-1}$. D'autre part W_1 étant invariante sous ${}^tH(u)$, la fonction $\tilde{W}_1$ est invariante sous $H(u)$. La fonction W_2 définiee par

$$W_2(g)=\tilde{W}_1(ga),\qquad a=\operatorname{diag}(\omega^{-u},\omega^{-u},\ldots,\omega^{-u},1),$$

est donc invariante sous $H(0)$. Comme plus haut, il en résulte que $\Xi(W_2,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ est un élément de $\mathbb{C}[X_1,X_2,\ldots,X_{r-1}]$. Alors il existe un multiple constant Q de $\Xi(W_2,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})$ tel que:

$$\Xi(\tilde{W}_1,X_1,X_2,\ldots,X_{r-1})=(X_1X_2\ldots X_{r-1})^{-u}Q(X_1,X_2,\ldots,X_{r-1}).$$

D'après (4.2)(7) on a alors:

$$(X_1X_2\ldots X_{r-1})^u Q(q^{-1}X_1^{-1}, q^{-1}X_2^{-1}, q^{-1}X_2^{-1}, \ldots, q^{-1}X_{r-1}^{-1})$$
$$= C^{r-1} q^{-u(r-1)} (X_1, X_2, \ldots, X_{r-1})^m P(X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}).$$

Si on avait $u<m$, $Q(q^{-1}, X_1^{-1}, \ldots, q^{-1}, X_{r-1}^{-1})$ serait un polynôme en $X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$ divisible par le produit $X_1X_2\ldots X_{r-1}$, ce qui est absurde. On a donc $u \geqq m$. Enfin si $u=m$ la relation ci-dessus montre que P est une constante. D'après l'unicité dans le théorème (4.1) la fonction W_1 est alors un multiple de W. Q.E.D.

(5.4) *Remarque.* Si π est une représentation admissible irréductible de G_r, générique ou non, on peut encore poser $\varepsilon_\pi(X, \psi) = CX^m$. On peut montrer que l'on a encore $m \geqq 0$ et que $m=0$ si et seulement si π contient la représentation unité de K_r. Toutefois, si $m>0$ la dimension de l'espace des vecteurs fixés par $K(m)$ peut être 0, comme le montre l'exemple des représentations de la forme $g \mapsto \chi(\det g)$, où χ est un caractère ramifié de $F^\times$.

Bibliographie

[B–Z] Bernstein, I.N., Zelevensky, A.V.: Induced representations of reductive p-adic groups. I. Ann. Sci. École Norm. Sup. **4**, 441–472 (1977)

[C] Casselman, W.: On some results of Atkin and Lehner. Math. Ann. **206**, 311–318 (1973)

[D] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations de GL(2). In: Modular functions of one variable. II. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 349. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973

[G–J] Godement, R., Jacquet, H.: Zeta functions of simple algebras. In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972

[G–K] Gelfand, I.M., Kazdan, D.A.: Representations of $GL(n, K)$ where K is a local field. In: Lie groups and their representations, pp. 95–118. New York: Wiley 1975

[J1] Jacquet, H.: Generic representations. In: Non commutative harmonic analysis, Marseille-Luminy 1976. In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 587, pp. 91–100. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976

[J2] Jacquet, H.: Principal L-functions of the linear group. In: automorphic forms, representations, and L-functions, Part 2. Am. Math. Soc. 63–95 (1979)

[J–P–S1] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Automorphic forms on GL(3). I. Ann. of Math. **109**, 169–212 (1979)

[J–P–S2] Jacquet, H., Piatetski-Shapiro, I.I., Shalika, J.: Facteurs L et ε du groupe linéaire. C. R. Acad. Sci. Ser. A **289**, 59–61 (1979)

[N] Novodvorsky, M.: On certain stationary groups in infinite dimensional representations of Chevalley groups. Funkcional. Anal. i. Prilozen **5**, 87–88 (1971). Transl. Functional Anal. Appl. **5**, 74–76 (1971)

[R] Rodier, F.: Whittaker models for admissible representations of real algebraic groups. In: Harmonic analysis on homogeneous spaces. Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc. 425–430 (1976)

[S] Shintani, T.: On an explicit formula for class-1 "Whittaker functions" on GL_n over p-adic fields, Proc. Japan Acad. **52**, 180–182 (1976)

Reçu le 4 août 1980