KHÔLLES EN MPSI & MP

SEMAINE 3

Programme. Bases de l'algèbre linéaire : extensions linéaires, liberté et liaison, sous-espaces vectoriels, endomorphismes, endomorphismes remarquables, théorie de la dimension.

Exercice 1. Familles libres
Prouver la liberté ou la liaison des familles suivantes :

$$(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}} \quad ; \quad (x \mapsto \chi_{[a,+\infty[})_{a\in\mathbb{R}} \quad ; \quad (x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}} \quad ; \quad (x \mapsto \sin(x^a))_{a\in\mathbb{R}} \quad ; \quad (\ln(p))_{p\in\mathbb{P}}$$

Exercice 2. Réunions de sous-espaces vectoriels
1. Montrer qu'une réunion de sous-espaces stricts n'est jamais un sous-espace vectoriel.
2. Prouver que si une famille $(F_i)_i$ est telle qu'un $F_i \cup F_j$ est toujours inclus dans un F_k, alors la réunion $\bigcup_i F_i$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Espaces supplémentaires
Prouver que les espaces suivants sont supplémentaires :
1. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ F = \{f \mid \forall i,\ f(a_i) = 0\},\ G = \mathbb{R}_n[X]$
2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ F = P(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ G = I(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercice 4. Endomorphismes, images et noyaux
Prouver la linéarité des applications suivantes, trouver leur noyau, leur image, et éventuellement leur réciproque :
1. $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - XP'$
2. $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[X]$
3. $f \in C^\infty_T \mapsto f' \in C^\infty_T$

Exercice 5. Lemme de Schur
1. Prouver qu'un endomorphisme tel que x et $f(x)$ sont toujours colinéaires est une homothétie.
2. En déduire que le centre de $L(E)$ est une homothétie.

Exercice 6. Endomorphismes nilpotents
1. Pour un endomorphisme f nilpotent, prouver que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.
2. Prouver qu'un endomorphisme localement nilpotent en dimension finie est nul.

Exercice 7. Noyaux et images itérés d'un endomorphisme f
1. Prouver que la suite $(Ker(f^k))_k$ est croissante et que la suite $(Im(f^k))_k$ est décroissante.
2. Prouver que ces monotonies sont strictes jusqu'à un certain rang p, à partir duquel les suites stationnent.
3. Montrer qu'alors $Im(f^p) \oplus Ker(f^p) = E$.

Exercice 8. Une propriété dans le plan
Montrer qu'il existe un endomorphisme envoyant trois droites D_i données dans le plan sur trois droites données Δ_i.

Exercice 9. Puissances de matrices
Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & a \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Équations fonctionnelles
Trouver les endomorphismes f tels que :
1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA)$

GR

Programme. gr

Généralités sur les suites

Exercice 1. Prouver qu'une suite de Cauchy converge si, et seulement si, elle admet une valeur d'adhérence.

Exercice 2. Prouver que le plan ne peut être pavé par des cercles. Pour cela, on peut par exemple se placer dans un repère et utiliser le théorème des segments emboités.

Exercice 3. Prouver que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite u est $\cap_n \overline{\{u_k | k \geq n\}}$.

Étude de suites

Exercice 4. Soient u et v les suites définies par

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a,\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

Montrez que ces deux suites convergent vers une même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de u et v.

Exercice 5. Soit u une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{3}n(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$. Étudier la convergence de u.

Exercice 6. Étude générale des suites arithmético géométriques définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

Exercice 7.

Exercice 8.

Semaine 2

Programme. Séries numériques.

NATURES DE SÉRIES À TERMES POSITIFS

Exercice 1. Donner la nature des séries de terme général

$$\sum \sin(n) \quad ; \quad (\sqrt{n^2+n}-n)^n \quad ; \quad \ln \operatorname{sh}\frac{1}{\sqrt{n}} - \ln\frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \frac{1}{C_{5n}^{2n}}$$

Séries de Bertrand. $\sum \frac{1}{n^a \ln^b n}$ en fonction de a et de b.

Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, il en va de même pour $\sum u_n^2$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs, et soit $v_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.
1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors il en va de même pour $\sum v_n$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ peut converger. Que dire si $(u_n)_n$ est bornée ?

Exercice 4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^\star)$, quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 5. Règles de D'Alembert et de Cauchy.
Un condition suffisante utile pour conclure quant à la convergence d'une série à termes positifs est la règle de D'Alembert : si u_{n+1}/u_n converge vers une limite différente de 1, on peut conclure. Nous étudions ici une condition suffisante du même genre, mais plus faible : la règle de Cauchy.

1. Prouver que si $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers une limite l, alors on peut conclure quant à la convergence de $\sum u_n$ si l est différent de 1. Plus précisément, on a la même conclusion qu'avec la règle de D'Alembert.
2. Prouver que la règle de D'Alembert implique la règle de Cauchy dans le sens où si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers l, alors $\sqrt[n]{u_n}$ converge également vers l.
3. Prouver qu'il n'y a pas de réciproque : il se peut que $\sqrt[n]{u_n}$ converge sans que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Exercice 6. Règle de Raabe – Duhamel.

Exercice 7. Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante à termes positifs, telle que $\sum u_n$ converge.
1. Prouver que $(nu_n)_n$ converge vers 0.
2. En déduire la nature de $\sum nu_n^2$.
3. Examiner le cas où il n'y a plus d'hypothèse de décroissance.

Exercice 8. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{k_n}$ où k_n est le n-ième entier supérieur à 1 ne possédant pas de 9 dans son développement décimal propre.

Étude de séries générales

Exercice 9. Donner la nature des séries de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad ; \quad \frac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n} \quad ; \quad \ln\left(\frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+2}\right)$$

Exercice 10. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ des nombres harmoniques.

Exercice 11. Soit $\sum z_n$ une série convergente à termes dans $\mathbb{C}^\star$ telle que $\forall n,\ |\mathrm{Arg}(z_n)| \leq \alpha$ pour un certain $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}$. Montrer que $\sum |z_n|$ converge.

Exercice 12. Étudier la nature de la série de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 13. Transformation d'Abel.
1. Montrer que pour tous entiers $q \geq p$, on a $\sum_p^q u_k v_k = [uV]_p^q + \sum_p^{q-1}(u_k - u_{k+1})V_k$.
2. En déduire le théorème d'Abel : si u_n est réelle décroissante vers 0, et si v_n est une suite d'un espace complet à sommes partielles bornées, alors $\sum u_n v_n$ converge.
3. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n^a}$ en fonction de θ et de a.

Exercice 14. Théorème de Riemann
Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente.
1. Prouver que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.
2. Prouver que pour tout réel l, il existe une permutation $\sigma_l \in \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma_l(n)}$ converge vers l.

Calculs de sommes de séries

Exercice 15. Calculer les sommes de séries de terme général suivant après avoir prouvé leur convergence :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right) \quad ; \quad (n-1)^a - 2n^a + (n+1)^a,\ a \in \mathbb{R} \quad ; \quad \frac{1}{n^3+8n^2+17n+10} \quad ; \quad \frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}}-1},\ z \notin \mathbb{U}$$

Exercice 16. Trouver la somme, si elle existe, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)$.

Développements limités et comportements asymptotiques

Exercice 17. Donner un équivalent pour les restes des séries de terme général

$$\frac{1}{n^a},\ a>1 \quad ; \quad \frac{1}{n^2+\sin n}$$

Exercice 18. Donner un équivalent pour les sommes partielles des séries de terme général

$$\sqrt{n+(-1)^n} \quad ;$$

Exercice 19. Développement limité des nombres harmoniques
1. On pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrer que ces suites sont adjacentes.
2. On pose $t_n = u_n - \gamma = o(1)$, et on cherche un équivalent de $t_{n+1} - t_n$.

Étude de suites à l'aide de séries

Exercice 20. Prouver que la suite définie par $u_1 > 0$ et $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^a u_n}$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

Semaine 2

Programme.

Exercice 1. Si f est continue sur $[0,1]$ et est telle que $f(0)=f(1)$, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \exists x \in [0,1],\ f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x)$$

Exercice 2. Calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 2 des fonctions

$$x^x \quad ; \quad \cos(\tan(x)) \quad ; \quad \ln(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)))$$

Exercice 3. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions

$$e^x\sin(x) \quad ; \quad (5x^3+4x^2+x+7)e^{-x} \quad ;$$

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que
⋆ $\forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f\circ g = g\circ f$;
⋆ $\forall x \geq \text{à},\ xf(x)+f(1-x)=x^3+1$;
⋆ $\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y)+f(x-y)=2y(3x^2+y^2)$.

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que
⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=f(7x)$;
⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=f\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$.

Exercice 6. Que peut-on dire, en fonction de la parité ou de l'imparité de f et de g, de la parité ou de l'imparité de fg et de $f\circ g$?

Exercice 7. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est telle que $f\circ f$ croît et $f\circ f\circ f$ décroît strictement, montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 8. Pour f et g deux applications bornées définies sur X, prouver que $m(f+g)\leq \mu(f)+\mu(g)\leq M(f+g)$ où m et M dénotent $\inf_X$ et $\sup_X$, et où $\mu=\frac{1}{2}(m+M)$.

Exercice 9. Prouver qu'une application continue et injective est strictement monotone. Pour cela, on peut, par exemple, consid"rer

$$\phi : t\in I \longmapsto f((1-t)b+ty)-f((1-t)a+tx)$$

Exercice 10. Prouver que les combinaisons linéaires et les compositions d'applications uniformément continues dont uniformément continues.

Exercice 11.
1. Montrer qu'une application continue d'un segment dans lui-même admet un point fixe.
2. Montrer qu'une application continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe. Que dire si f était supposée croissante ?
3. Montrer qu'une application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contractante, *i.e.* lipschitzienne de rapport $k<1$, admet un unique point fixe.

Exercice 12. Trouver les applications additives continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit f une fonction uniformément continue vérifiant $f(nx)$ converge vers 0 pour tout $x>0$. Prouver que f converge vers 0.

SEMAINE 3

Programme.

Exercice 1. On se ramène à la dérivation d'exponentielles en écrivant $ch(x\ sh(a)) = \frac{1}{2}(e^{x\ sh(a)} + e^{-x\ sh(a)})$, ce qui aboutit immédiatement à $f(x) = \frac{1}{2}(e^{xe^a} + e^{-xe^a})$. La dérivée n-ième s'obtient alors immédiatement, et on fournit une expression plus compacte en reconnaissance un ch.

Semaine 4

Programme. *Bases de l'algèbre linéaire : extensions linéaires, liberté et liaison, sous-espaces vectoriels, endomorphismes, endomorphismes remarquables, théorie de la dimension, hyperplans, formes linéaires, calcul matriciel, calcul de déterminants, changements de base, matrices équivalentes et semblables.*

Exercice 1. Lemme de Schur

1. Prouver qu'un endomorphisme tel que x et $f(x)$ sont toujours colinéaires est réduit aux homothéties.
2. En déduire que le centre de $L(E)$ est une homothétie.

Exercice 2. Réunions de sous-espaces vectoriels

1. Montrer qu'une réunion de sous-espaces stricts n'est jamais un sous-espace vectoriel.
2. Prouver que si une famille $(F_i)_i$ est telle qu'un $F_i \cup F_j$ est toujours inclus dans un F_k, alors la réunion $\bigcup_i F_i$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Puissances de matrices

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & a \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Calculs de déterminants

Calculer les déterminants ou les polynômes caractéristiques des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{i,j} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Groupe spécial linéaire

Montrer que $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe et que tout matrice inversible s'écrit comme produit d'une homothétie et d'une matrice du groupe spécial linéaire.

Montrer que $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe.

Exercice 6. Matrices à diagonales dominantes

Montrer qu'une matrice à diagonale dominante, *i.e.* vérifiant $\forall i,\ \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$, est inversible.

Exercice 7. Matrices semblables

Montrer que deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Équations fonctionnelles

Trouver les endomorphismes f tels que :

1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA)$.
2. $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{R}),\ f(ABC) = f(BCA)$.

SEMAINE 5

Programme. Retour ses les bases de l'algèbre linéaire ; espaces vectoriels normés : suites, normes usuelles, valheurs d'adhérence, complétude.

Exercice 1. Norme de la convergence en moyenne quadratique

On pose, pour $f \in \mathbb{C}([a,b])$, $N_2(f) = \left(\int_a^b [f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

1. Montrer que N_2 est une norme – hermitienne – pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}$.
2. Prouver que $\forall f \in \mathbb{C}([a,b]),\ N_2(f) \leq \sqrt{b-a}N_\infty(f)$ et $N_1(f) \leq \sqrt{b-a}N_2(f)$.

Exercice 2. Complétude d'espaces fonctionnels

On cherche ici à prouver la complétude des espaces de suites $l^\infty(\mathbb{N})$. On considère une suite de CAUCHY $(u^p)_p = ((u_n^p)_n)_p$ de suites de l^∞.

1. Prouver que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l^∞.
2. Prouver que pour tout n, $(u_n^p)_p$ est une suite de CAUCHY dans $\mathbb{C}$, donc converge vers un complexe u_n.
3. Prouver que $u = (u_n)_n$ est une suite de l^∞, pour cela revenir à l'expression du caractère de CAUCHY.
4. Prouver que $(u^p)_p$ converge vers u dans $l^p(\mathbb{N})$.
5. Prouver que l^∞ est de dimension infinie.

Exercice 3. Caractérisation des normes par les boules

Prouver que si deux normes ont les mêmes boules fermées ou ouvertes, alors elles sont égales.

Exercice 4. Exemples de normes

Les applications suivantes sont-elles des normes, et sur quel espace ?

1. $N(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_i|x_i|$ pour des réels a_i fixés.
2. $N(A) = Tr({}^tAA)$ pour des matrices A.
3. $N(P) = \sum_i = 1^n P(x_i)$ pour des x_i distincts et un polynôme P.
4. $N_{1,1}(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour des fonctions $f \in C^1([a,b])$. Est-elle équivalente à N_∞ ?
5. Donner une CNS sur a pour que $N_a(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n|x_n|$ soit une norme sur l^∞. La comparer à N_∞.

Exercice 5. Inégalité et normes de Holder

Considérons $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Prouver que, pour $a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
2. Appliquer cela à et à , prouver que $\langle x, y\rangle_1 \leq \|x\|_p\|y\|_q$.
3. Prouver l'inégalité de MINKOWSKI : $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
4. En déduire que les $\|\cdot\|_p$ sont des normes.
5. Prouver que $\|\cdot\| \longrightarrow \|\cdot\|_\infty$ lorsque p croît infiniment.

SEMAINE 8

Programme. Relations de comparaison. Rappels de calcul diff ?rentiel ?l ?mentaire d'une variable : valeurs vectorielles, C^k-diff ?omorphisme, accroissements finis, fonctions convexes.

Exercice 1. Montrer que la compos ?e (? gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.

Exercice 2. Que peut-on dire d'une fonction convexe et born ?e sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3. Montrer qu'une fonction convexe est continue.

Exercice 4. Montrer qu'un minimum local est n ?cessairement global pour une fonction convexe.

Exercice 5. Montrer qu'une fonction v ?rifiant $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ est convexe.

Exercice 6. Th ?or ?me de Darboux.
1. Prouver qu'une fonction d ?riv ?e v ?rifie le th ?or ?me des valeurs interm ?diaires.
2. Donner un exemple de fonction non continue v ?rifiant le th ?or ?me des valeurs interm ?diaires.

Exercice 7. Exemples et contre-exemples.
Que dire de l'uniforme continuit ? et de la lipschitzianit ? des fonctions racine, logarithme et $x \mapsto x \ln x$?

Exercice 8. Une fonction d ?finie par borne sup ?rieure.
Pour f et g continues sur $[0,1]$, on d ?finit $\phi : t \mapsto \sup_{[0,1]}(f+tg)$. Prouver que ϕ est bien d ?finie et qu'elle est lipschitzienne.

Exercice 9. Lemme de Croft
Prouver qu'une fonction uniform ?ment continue f telle que $f(nx) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout x, tend vers 0 en l'inifni.

Donner un exemple de fonction qui tend vers 0 selon toute suite arithm ?tique mais qui ne tend pas vers 0.

SEMAINE 7

Programme. Espaces vectoriels normés : définitions et propriétés élémentaires, continuité des applications linéaires et multilinéairaires, compacité, équivalence des normes.

Exercice 1. Les normes sur $M_n(\mathbb{R})$ sont quasi-sous-multiplicatives.
Pour toute norme sur $M_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour toutes matrices A et B, $N(AB) \leq \lambda N(A)N(B)$.

Exercice 2. Convergence de polynômes.
Soit $x = (x_0, \dots, x_d)$ une famille de $d+1$ points distincts. Considérons $N(P) = \sum_{i=0}^{d} |P(x_i)|$.
1. Prouver que N est une norme sur l'espace $\mathbb{R}_d[X]$ des polynômes de degré inférieur à d.
2. Prouver que la convergence simple équivaut à la convergence uniforme sur tout segment, et également à la convergence des coefficients.

Exercice 3. Prouver que pour u linéaire et continu, $Sp(u) \subseteq B(0, \|u\|)$

Exercice 4. Calcul de normes d'applications linéaires
Prouver que les applications suivantes sont linéaires et calculer leur norme :

- $\star$ (l^∞, N_∞) $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ et $\Delta : (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$
- $\star$ $P : f \in (C^0([0,1]), N_1 = \| \cdot \|_\infty) \mapsto \int_0^{\cdot} f \in (C^1, N_2 = \| \cdot \|_\infty + \| \cdot' \|_\infty)$.
- $\star$

Exercice 5. Normes équivalentes et applications linéaires.
1. Montrer que deux normes sont équivalentes définissent les mêmes applications linéaires.
2. Trouver deux normes sur $\mathbb{R}[X]$, l'une rendant continue la dérivation et l'autre non. Qu'en déduire sur ces normes ?

Exercice 6. Un théorème de point fixe
Soit f une application d'un compact dans lui-même, vérifiant $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ dès que $x \neq y$. Prouver que f admet un point fixe.

Exercice 7. Prouver que le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un compact.

Exercice 8. Les termes d'une suite convergente
Soit $(x_n)_n$ une suite convergente, et x sa limite. Prouver que $X = \{x_n\}_n \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 9. Théorème de Heine
Une application continue sur un compact est uniformément continue.

Exercice 10. Ensemble triadique de Cantor
On considère l'ensemble $[0,1] = C_0$. On lui retire son tiers central $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et on obtient C_1. On itère pour obtenir C_{n+1} à partir de C_n en retirant les tiers centraux de tous les segments. L'intersection des C_n est notée C. Prouver que c'est un compact d'intérieur vide.

Semaine 9

Programme. *Suite et séries de fonctions.*

Exercice 1. Étude de convergence de suites d'application.
Étudier la convergence simple et uniforme des suites d'applications suivantes :

⋆ $\dfrac{nx^2+x^3}{1+n^3x^4}$ sur $[0,+\infty[$

⋆ $\dfrac{1-x^n}{1+x^{2n}}$ sur $[0,1]$

⋆ $n^2e^{-nt}(1-nt)$ sur $[0,+\infty[$

Exercice 2. Stabilité de la notion de convergence uniforme.
Soit $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites d'applications convergeant uniformément vers f et g.
1. a. Prouver que pour toute application ϕ, $f_n\circ\phi$ converge uniformément vers $f\circ\phi$.
b. Prouver que pour ϕ uniformément continue, $\phi\circ f_n$ converge uniformément vers $\phi\circ f$.
2. Prouver que f_ng_n converge uniformément vers fg si f et g sont bornées.

Exercice 3. Limite uniforme de fonctions uniformément continues.
Prouver qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 4. Convergences de polynômes.
Soit $x=(x_0,\dots,x_d)$ une famille de $d+1$ points distincts. Considérons $N(P)=\sum_{i=0}^d |P(x_i)|$.
1. Prouver que N est une norme sur l'espace $\mathbb{R}_d[X]$ des polynômes de degré inférieur à d.
2. Prouver que la convergence simple équivaut à la convergence uniforme sur tout segment, et également à la convergence des coefficients.

Exercice 5. Théorème de Dini.
Prouver qu'une suite de fonctions *continues* et croissantes convergeant simplement sur un segment vers une fonction *continue* converge uniformément.

Exercice 6. Convergence diagonale.
Si f_n converge uniformément vers f et si x_n converge vers x, prouver que $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 7. Continuité des limites uniformes en dimension finie.
Prouver qu'en dimension finie, une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Exercice 8. Étude de convergence de séries d'applications.
Étudier la convergence des séries d'applications suivantes :

⋆ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^3x^2}$ sur $[0,+\infty[$

⋆ $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ sur $[0,+\infty[$

Exercice 9. Fonction continue et nulle part dérivable : l'exemple de Van der Waerden.
Notons ϕ_0 l'application 1-périodique définie par

$$\begin{cases} x & \text{pour } 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{pour } \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$$

On définit alors la suite de fonctions $\phi_n : x\mapsto \frac{\phi_0(4^nx)}{4^n}$. Montrer que la somme de cette suite de fonctions est bien définie, continue et nulle part dérivable.

Exercice 10. Intégration terme à terme et formule remarquable.
Prouver que pour tout $a\geq 0$ et $b>0$, $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$.

SEMAINE 10

Programme. Suites et séries de fonctions, séries géométriques dans une algèbre normée, théorème de WEIERSTRASS. Intégration sur un segment : approximation uniforme par des fonctions en escalier, approximation part les sommes de RIEMANN, théorème fondamental du calcul intégral, intégration par parties, changement de variables, formules de TAYLOR.

Exercice 1. Calculs élémentaires d'intégrales.

$$\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \qquad \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \qquad \int \cos^3 \qquad \int e^t\cos(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \qquad \int t\arctan(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 2. Calculs un peu moins élémentaires d'intégrales.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+\sin} \quad ; \quad \int \frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)}dx$$

Exercice 3. Relations intégrales.
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et non nulle vérifiant $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Prouver que $f = 1$.

Exercice 4. Un petit théorème de point fixe.
Montrer qu'une fonction continue sur $[0,1]$ et d'intégrale $\frac{1}{2}$ admet un point fixe.

Exercice 5. Fonctions positives et continues par morceaux d'intégrale nulle.
Montrer qu'une fonction positive, continue par morceaux et d'intégrale nulle est nulle sauf en un nombre fini de points.

Exercice 6. Théorème des moments.
Soit f continue sur $[0,1]$ et vérifiant $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ pour tout entier n.
1. Pour $0 < \alpha < \beta < 1$, trouver un polynôme supérieur à 1 sur $[\alpha, \beta]$, et compris entre 0 et 1 sur$[0,\alpha] \cup [\beta, 1]$.
2. Prouver que pour tout n, $\int_0^1 P^n f = 0$, et en déduire que f est nulle.

Exercice 7. Soit f continue sur $[0,1]$ et vérifiant $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ pour tout entier $n \leq N$. Prouver que f a au moins $N+1$ zéros.

Exercice 8. Lemme de Riemann – Lebesgue.
1. Pour f de classe C^1 sur $[a,b]$, prouver que $\int_a^b f(t)\sin(nt)dt \to 0$.
2. Prouver que ce résultat est vrai pour des fonctions en escalier.
3. En déduire qu'il en va de même des fonctions continues par morceaux.

Exercice 9. Lemme de Gronwall.
Soient f et g continues sur $[0,+\infty[$ et positives. On suppose que

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq C + \int_0^x fg$$

1. Montrer que si $C > 0$, alors pour tout $x \geq 0$ on a$f(x) \leq C\exp\left(\int_0^x g\right)$.
2. Que dire si $C = 0$?

Exercice 10. Théorème des noyaux réguliers.
On appelle une suite de noyaux réguliers une suite de fonctions $(\rho_n)_n$, positives, continues, nulles hors de $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. On définit la convolée de deux fonctions f et g par

$$f \star g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy$$

Montrer que $f \star \rho_n$ converge vers f pour toute fonction f continue.

Exercice 11. Sommes de Riemann.
Pour une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$, une subdivision $\sigma = (a_i)_i$ adaptée, et des points $x_i \in]a_i, a_{i+1}[$, on note $\mu(\sigma) = \sup|a_i - a_{i+1}|$ le pas de la subdivision et on définit la somme de Riemann associée par

$$R(f,(a_i)_i,(x_i)_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(x_i)$$

1. Montrer que si f est lipschitzienne, alors les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f lorsque $\mu \to 0$.
2. Montrer qu'il en va de même pour f continue.

Exercice 12. Déterminer la nature de la suite de terme général $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 13. Irrationalité de π.
1. Pour $a, b \in \mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\frac{a}{b}$ des valeurs entières.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \to 0$.
3. En supposant $\pi = a/b$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$ et conclure.

Exercice 14. Intégrales de Wallis & Formule de Stirling
Pour tout entier naturel n, on note $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n$ la n-ième intégrale de Wallis.
1. Calculer explicitement I_n en établissant une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. Montrer que $(I_n)_n$ est décroissante, strictement positive, et que $I_{n+1} \sim I_n$.
3. Trouver un équivalent de I_n en considérant le produit nI_nI_{n+1}.

SEMAINE 11

Programme. Intégration sur un intervalle quelconque.

Exercice 1. Intégrabilité.
Étudier l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2. Convergence d'intégrale.
Que dire de la convergence des intégrales (de DIRICHLET et de FRESNEL) $\displaystyle\int \frac{\sin t}{t}dt$ et $\displaystyle\int \cos(t^2)dt$ sur $]0,+\infty[$?

Exercice 3. Extension de convergence.
Prouver que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ converge avec f continue, alors les $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ convergent pour $s > s_0$.

Exercice 4. Intégrales de Bertrand.
Que dire de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^a \ln^b t}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$?

Exercice 5. Fonctions intégrables et décroissantes.

1. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, prouver que les tranches $\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f$ tendent vers 0 en $+\infty$ pour a et b deux fonctions tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Pour une fonction f intégrable et décroissante, prouver que $f(x)$ et $xf(x)$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 6. Fonctions intégrablme de dérivée intégrable.
Si f est de classe C^1 et si f et f' sont intégrables, montrer que f tend vers 0.

Exercice 7. Fonctions intégrables et fonctions bornées.
1. Quand peut-on affirmer qu'une fonction bornée est intégrable ?
2. Dans le cas d'une fonction uniformément continue, montrer qu'une fonction intégrable converge vers 0.
3. Donner un exemple de fonction intégrable et non bornée.

Exercice 8. Fonction Gamma d'Euler.
On introduit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
1. Montrer que Γ est bien définie pour tout $x > 0$.
2. Prouver la formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 1$ et calculer les valeur de Γ sur les entiers.

Exercice 9. Calcul d'intégrale.
1. $J = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.
2. Etablir $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 10. Un autre calcul.
Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan}$.

Exercice 11. Relation de récurrence pour une suite d'intégrales.
On considère ici la suite double d'intégrales $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln^q(x)dx$.
1. Trouver une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$.
2. En déduire la valeur de $I_{n,n}$.

SEMAINE 12

Programme. Séries entières. Rayons de convergence et lemme d'ABEL ; opérations élémentaires sur les séries entières et produit de CAUCHY ; résultats de régularité et fonctions développables en série entière.

Exercice 1. Calcul de rayon de convergence
Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n^2+1}{\pi^n} z^n \qquad \sum e^{-n^2} z^n \qquad \sum \binom{2n}{n} z^n \qquad \sum \sin(n) z^n$$

Exercice 2. Quelques résultats sur les séries entières
1. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon R, que peut-on dire du rayon des séries $\sum a_n z^{2n}$ et $\sum a_n^2 z^n$?
2. Prouver que si $\sum a_n x_0^n$ est semi-convergente, alors $\sum a_n x^n$ a un rayon $|x_0|$.
3. (Règle de CAUCHY) Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ converge vers l, prouver que $R = \frac{1}{l}$.
4. Si la suite $(a_n)_n$ est périodique, prouver que $\sum a_n x^n$ est de rayon 1 et sa somme est une fraction rationnelle.

Exercice 3. Une fonction lisse non développable
Prouver que la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 4. Fonctions absolument monotones
Prouver qu'une fonction lisse de dérivées successives toutes positives – on dit qu'elle est absolument monotone – est localement développable en série entière.

Exercice 5. Une série entière à coefficients intégraux
On considère $I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q \mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de $\sum I(n,n)x^n$.

Exercice 6. Développement en série entière *via* une équation différentielle
Donner le développement en série entière en 0 de $\mathrm{sh}(\mathrm{Arcsin}(x))$.

Exercice 7. Développements en série entière
Donner le développement en série entière des fonctions suivantes, sur un certain domaine à préciser :

$$\ln(x^2-5x+6) \qquad \frac{1-x^2}{1-2x\cos t + x^2}$$

Exercice 8. Calcul de sommes de séries entières
Calculer la somme des séries entières suivantes, sur un domaine à préciser :

$$\sum \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} \qquad \sum \frac{x^{2n+1}}{3n+2}$$

SEMAINE 13

Programme. Compléments sur les séries numériques; théorème de Fubini; intégrales à paramètres : convergence dominée, intégration terme à terme, continuité, dérivabilité, fonction Gamma d'EULER.

Exercice 1. Une banale convergence.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $\lim_{n\infty} \int_0^1 f^n = 0$.

Exercice 2. Intégrale de Gauss.

Exprimer $\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ en fonction de l'intégrale de GAUSS $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, et en déduire sa valeur.

Exercice 3. Un cas particulier du lemme d'Hadamard.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment lisse et nulle en 0. Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ et prolongée en 0 par $f'(0)$ est infiniment lisse.

Exercice 4. Calculs d'intégrales à paramètres.

Calculer les valeurs de $\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$, $\int_0^\infty e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha-1} dt$ et $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} e^{2i\pi tx} dt$.

Exercice 5. Soit f de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que si $(f')^2$ est intégrable, alors f est bornée.

Exercice 6. Quelques propriétés de la fonction Γ d'Euler.

Rappeler l'ensemble de définition de $\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, montrer qu'elle est convexe, que son logarithme est convexe, qu'elle est équivalente à la fonction inverse en 0 et qu'elle tend vers l'infini en $+\infty$. Tracer l'allure de sa courbe.

SEMAINE 14

Programme. Rappels sur les intégrales à paramètres. Espaces préhilbertiens réels et complexes : produit scalaire, inégalités de CAUCHY – SCHWARZ, de MINKOWSKI, indentités du parallélogramme et de polarisation, orthogonalité, bases orthonormales, théorème de RIESZ en dimension finie, orthogonal d'une partie, projection orthogonale, distance à un un sous-espace fermé, procégé d'orthonormalisation de GRAM – SCHMIDT. Prélude aux séries de FOURIER...

Exercice 1. Produit scalaire sur les matrices.
On définit $(A, B) = Tr({}^tAB)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.
1. Prouver que cela définit bien un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Prouver que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux dans cet espace.
4. Prouver que l'on a pour toute matrice A l'inégalité $Tr(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{Tr({}^tAA}$, et étudier le cas d'égalité.

Exercice 2. Stricte et uniforme convexité d'un espace préhilbertien.
1. Prouver que la boule unité d'un espace préhilbertien est strictement convexe, *i.e.* vérifie $\|tx + (1-t)y\| < 1$ dès que $x \neq y$. Existe-il des normes non strictement convexes ?
2. Prouver que la boule unité d'un espace préhilbertien est uniformément convexe, *i.e.* vérifie $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall\|x-y\| > \varepsilon, \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta$. Existe-il des nombres non uniformément convexes mais strictement convexes ?

Exercice 3. Orthogonal de l'ensemble des polynômes.
On considère l'application $(f, g) = \int_a^b fg$ définie sur $C([a, b])$. Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire. Trouver l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. Masse de Dirac... fonction ou non ?
1. On considère la forme linéaire $f \mapsto f(0)$ sur $C([0, 1])$. Prouver que celle forme linéaire ne s'écrit pas sous la forme $(g, \cdot) = f \mapsto \int_0^1 fg$ avc g continue.
2. Lorsque l'on se restreint à $\mathbb{R}[X]$, est-ce vrai ?
3. Lorsque l'on se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique Q tel que $P \mapsto P(0)$ s'écrit sous la forme $(Q, \cdot)$: $P \mapsto \int_0^1 PQ$, et qu'il est de degré n.

Exercice 5. Déterminant de Gram.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On définit la matrice de GRAM du système par $G((x_i)_i) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j}$.
1. Prouver que cette matrice est inversible si, et seulement si, la famille $(x_i)_i$ est liée.
2. Prouver que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base d'un sous-espace F, alors $d(x, F)^2 = \frac{|G(x_1,\ldots,x_n,x)|}{|G(x_1,\ldots,x_n)|}$.
3. Calculer $\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$. Comment faire le calcul directement, sans le résultat sur le déterminant de GRAM ?

Exercice 6. Projection sur un convexe fermé dans un Hilbert.
Soient E un espace de HILBERT réel, *i.e.* un espace préhilbertien complet, un convexe fermé C de E et un élément x de E.
1. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de C telle que $\|x - x_n\| \to d(x, C)$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est de CAUCHY.
3. En déduire qu'il existe un x_C de C tel que $d(x, C) = \|x - x_C\|$.

SEMAINE 15

Programme. Séries de FOURIER : étude quadratique, coefficients de FOURIER, théorèmes de DIRICHLET et de convergence normale ; réductions des matrices et endomorphismes : éléments propres, polynôme caractéristique, diagonalisabilité.

Exercice 1. Comportement asymptotique des coefficients de Fourier.
1. Prouver que les coefficients de FOURIER d'une fonction continue tendent vers 0.
2. Pour f continue par morceaux, prouver que $\sum \frac{c_n(f)}{n}$ converge.
3. Montrer que si f est de classe C^p, alors ses coefficients de FOURIER sont des $o(n^{-p})$.
4. Réciproquement, si f a des coefficients de FOURIER qui sont des $o(n^{-(p+2)})$, prouver que f est de classe C^p.

Exercice 2. Développement en série de Fourier.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$.
1.a. Développer f en série de FOURIER.
b. Étudier la convergence de la série de Fourier.
2.a. Calculer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

2.b. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 3. Développement en série de Fourier.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi]$.
1. Développer f en série de FOURIER en justifiant la convergence.
2. En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

3. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 4. Inégalité de Wirtinger.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une 2π-périodique de classe C^1 et d'intégrale nulle. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

et préciser les cas d'égalités.

Exercice 5. Théorème de convergence de Féjer et théorème de Weiersrass.
On introduit les noyaux de DIRICHLET $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ et de FéJER $K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k$.
1.a. Prouver que $D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} t\right) t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $D_n(2k\pi) = 2n+1$.
b. Prouver que $K_n(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2} t\right) t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2$ et $K_n(2k\pi) = n+1$.
2.a. Montrer que K_n est un noyau régulier : il est positif, de norme intégrale 1, et converge uniformément sur tout $[-\pi, \pi] \backslash] - \delta, \delta[$.
b. Prouver que $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)$ converge uniformément vers f, avec $S_k(f) = \sum_{j=-k}^{k} c_j(f) e^{ijt}$ et f continue.
3.a. Prouver le théorème de WEIERSTRASS trigonométrique.
b. En déduire le théorème de WEIERSTRASS.

Exercice 6. Un cas particulier du lemme de Schur.
Montrer que u stabilise toute droite si, et seulement si, c'est une homothétie.

Exercice 7. Amorce des récurrences sur la dimension.

Prouver que tout $\mathbb{R}$-endomorphisme admet une droite stable ou un plan stable en dimension finie non nulle.

Exercice 8. Calculs de vecteurs et de valeurs propres.
Calculer les valeurs, vecteurs et sous-espaces propres des endomorphismes suivants : dérivation de fonctions, différentiation de deux termes consécutifs de suites, primitivation nulle en 0, moyennage de deux termes consécutifs de suites.

SEMAINE 16

Programme. Réduction : algèbre linéaire générale, diagonalisation, triangulation, CAYLEY – HAMILTON, ...

Exercice 1. Réduction de matrices
Réduire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Disques de Gershgorin
Prouver que pour toute matrice complexe A, on a

$$Sp(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_{ii}, \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)$$

En déduire qu'une matrice à diagonale dominante, *i.e.* vérifiant $|a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pour tout i, est inversible.

Exercice 3. Commutant dans un espace cyclique.
Si $(x_0, ux_0, u^2x_0, \ldots, u^{n-1}x_0)$ est une famille libre, trouver les endomorphismes commutant avec u.

Exercice 4. Base des récurrences sur la dimension.
Montrer qu'un endomorphisme admet toujours une droite stable ou un plan stable.

Exercice 5. Lemme de Schur.
Montrer que les endomorphismes admettant tout vecteur comme vecteur propre sont les homothéties.

Exercice 6. Recherche d'éléments propres d'un endomorphisme.
Rechercher les éléments propres des endomorphismes suivants :
⋆ La primitivation s'annulant en 0 d'une fonction continue : $f \mapsto \int_0^{\cdot} f$;
⋆ La différenciation de deux termes consécutifs d'une suite *bornée* : $u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_n$;

Exercice 7. Groupe d'involutions.
Montrer qu'un sous-groupe de GL_n composé d'involutions est commutatif, et en montrer que le groupe est diagonalisable dans une même base. En déduire qu'un tel groupe est de cardinal au plus 2^n, puis que GL_n et GL_m ne peuvent être isomorphes si $n \neq m$.

Exercice 8. Diagonalisabilité de puissances
Montrer que si A^p est diagonalisable pour un certain p, il en va de même pour A si A est inversible. Que dire si cette dernière hypothèse n'est pas vérifiée ?

Exercice 9. Diagonalisabilité de f^2.
Pour f linéaire sur un $\mathbb{C}$-ev, prouver que f est diagonalisable si, et seulement si, f^2 est diagonalisable et $Ker(f) = Ker(f^2)$. Que dire dans le cas réel ?

Exercice 10. Diagonalisation et trigonalisation simultanées.
Prouver qu'une famille d'endomorphismes diagonalisables commutative est simultanément diagonalisable.
Prouver qu'une famille de $\mathbb{C}$-endomorphismes commutant entre eux sont simultanément triangulables.

Exercice 11. Décomposition de Dunford.
Prouver que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel s'écrit sous la forme $d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent, les deux commutant.

Exercice 12. Étude du commutant.
Calculer la dimension du commutant d'une matrice diagonalisable.

SEMAINE 16

Programme. Réduction : algèbre linéaire générale, diagonalisation, triangulation, CAYLEY – HAMILTON, ...

Exercice 1. Réduction de matrices
Réduire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Disques de Gershgorin
Prouver que pour toute matrice complexe A, on a

$$Sp(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_{ii}, \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)$$

En déduire qu'une matrice à diagonale dominante, *i.e.* vérifiant $|a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pour tout i, est inversible.

Exercice 3. Commutant dans un espace cyclique.
Si $(x_0, ux_0, u^2x_0, \dots, u^{n-1}x_0)$ est une famille libre, trouver les endomorphismes commutant avec u.

Exercice 4. Base des récurrences sur la dimension.
Montrer qu'un endomorphisme admet toujours une droite stable ou un plan stable.

Exercice 5. Lemme de Schur.
Montrer que les endomorphismes admettant tout vecteur comme vecteur propre sont les homothéties.

Exercice 6. Recherche d'éléments propres d'un endomorphisme.
Rechercher les éléments propres des endomorphismes suivants :
⋆ La primitivation s'annulant en o d'une fonction continue : $f \mapsto \int_0^{\cdot} f$;
⋆ La différenciation de deux termes consécutifs d'une suite *bornée* : $u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_n$;

Exercice 7. Groupe d'involutions.
Montrer qu'un sous-groupe de GL_n composé d'involutions est commutatif, et en montrer que le groupe est diagonalisable dans une même base. En déduire qu'un tel groupe est de cardinal au plus 2^n, puis que GL_n et GL_m ne peuvent être isomorphes si $n \neq m$.

Exercice 8. Diagonalisabilité de puissances
Montrer que si A^p est diagonalisable pour un certain p, il en va de même pour A si A est inversible. Que dire si cette dernière hypothèse n'est pas vérifiée ?

Exercice 9. Diagonalisabilité de f^2.
Pour f linéaire sur un $\mathbb{C}$-ev, prouver que f est diagonalisable si, et seulement si, f^2 est diagonalisable et $Ker(f) = Ker(f^2)$. Que dire dans le cas réel ?

Exercice 10. Diagonalisation et trigonalisation simultanées.
Prouver qu'une famille d'endomorphismes diagonalisables commutative est simultanément diagonalisable.
Prouver qu'une famille de $\mathbb{C}$-endomorphismes commutant entre eux sont simultanément triangulables.

Exercice 11. Décomposition de Dunford.
Prouver que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel s'écrit sous la forme $d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent, les deux commutant.

Exercice 12. Étude du commutant.
Calculer la dimension du commutant d'une matrice diagonalisable.

SEMAINE 18

Programme. Espaces euclidiens, endomorphismes orthogonaux, adjoint, théorème spectral.

Exercice 1. Compacité des groupes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes compacts de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice 2. Topologie & matrices.
1.a. Montrer que S_n est fermé dans M_n.
b. Montrer que S_n^+ est fermé dans S_n.
2.a. Montrer que GL_n est ouvert et dense dans M_n.
b. Montrer que S_n^{++} est ouvert et dense dans S_n^+.

Exercice 3. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
1. Prouver qu'un projecteur p est orthogonal si, et seulement si, $\|p\| \leqslant 1$.
2. Prouver que si la composée de deux projecteurs orthogonaux est un projecteurs, alors ils commutent.

Exercice 4. Diagonalisation simultanée en base orthonormale.
Montrer que deux endomorphismes autoadjoints qui commutent sont simultanément diagonalisables en base orthonormale.

Exercice 5. Racines carrées de matrices.
Montrer que tout matrice A symétrique positive admet une et une seule racine carrée symétrique positive, et qu'il s'agit d'un polynôme en A.

Exercice 6. Réduction des matrices antisymétriques.
1. Montrer qu'un endomorphisme admet toujours une droite stable ou un plan stable.
2. Montrer que toute matrice antisymétrique se réduit en base orthonormée avec un bloc diagonal nul et des blocs

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Traces et matrices symétriques.
Montrer que la somme des carrés des coefficients d'une matrice symétrique réelle est égale à la somme de carrés de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

Exercice 8. Nilpotence et symétrie.
Si A est une matrice nilpotente et normale, *i.e.* telle que ${}^tAA = A^tA$, montrer que A est nulle.

SEMAINE 19

Programme. Équations différentielles linéaires.

Exercice 1. Souvenirs — Équations différentielles linéaires d'ordre 1

⋆ $y + 2xy = 2xe^{-x^2}$

⋆ $y' - (x+1)(y+1) = 0 \quad y(0) = 1$

Exercice 2. Intervention d'une équation différentielle

Soit f continue et nulle de limite nulle en $+\infty$.

1. Montrer que les solutions de $y' + y = f$ convergent vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer qu'une fonction g de classe C^1 et telle que $g + g' \to l$ tend vers l.

Exercice 3. Matrices antisymétriques et système linéaire

Prouver que A est antisymétrique si, et seulement si, les solutions de $X' = AX$ sont de normale constante.

Exercice 4. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

⋆ $y' + y = \tan x$

⋆ $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$

Exercice 5. Expression du wronskien

1. Prouver que pour tout $u \in L(E)$, $\sum_{i=1}^{n} \det(x_1, \ldots, ux_i, \ldots, x_n) = Tr(u)\det(x_1, \ldots, x_n)$.
2. En déduire que pour tout t_0, il existe X tel que $\forall t \in I, w(X_1, \ldots, X_n) = C \exp \int_{t_0}^{t} Tr(A)$.

Exercice 6. Équation différentielle périodique

On considère l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$ où les coefficients sont continus et *T-périodiques*.

1. Prouver qu'une solution y est périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une unique solution périodique.

Exercice 7. Lemme de Gronwall & Unicité des solutions

1. Soient u et v continues sur $[a,b]$. On suppose $u, v \geqslant 0$ et $K \geqslant 0$. Prouver

$$\left(\forall t \in [a,b], u(t) \leqslant K + \int_a^t uv\right) \Longrightarrow \left(\forall t \in [a,b], u(t) \leq Ke^{\int_a^t v}\right)$$

2. Soient Y et Z deux solutions de $Y' = AY + B$ avec $Yt_0 = Zt_0 = Y_0$. Prouver que $Y = Z$.

Exercice 8. Le théorème de Cauchy – Lipschitz : existence

1. Exprimer $Y' = A(t)Y + B(t)$ sous forme intégrale.
2. Prouver par récurrence que $\|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| \leqslant l(\alpha\|Y_0\| + \beta)\frac{\alpha^n(t-t_0)^n}{n!}$.
3. Conclure à la convergence de la série $\sum(Y_{n+1} - Y_n)$ et à l'existence d'une solution.

Exercice 9. Utilisation de la méthode par approximations successives

On suppose que $X' = AX$ avec A à coefficients tous positifs, $X(0) \in \mathbb{R}_+^n$. Prouver que pour tout t, $X(t) \geqslant_n 0$.

Exercice 10. Double calcul d'intégrale double

En considérant $\iint_{[0,1]^2} x^y dxdy$, calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 11. L'intégrale de Gauss

Calculer l'intégrale de GAUSS $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ après en avoir justifié l'existence. On pourra regarder l'intégrale double $\iint_{[0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.

Exercice 12. Convolution et intégrabilité

Montrer que si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et que l'on a $\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.

SEMAINE 20

Programme. Intégrales doubles sur un produit d'intervalles, théorème de Fubini, coordonnées polaires. Étude affine des courbes paramétrées, étude locale, équations polaires. Fonctions de plusieurs variables, différentiabilité, classe C^1.

Exercice 1. Double calcul d'intégrale double
En considérant $\iint_{]0,1]^2} x^y dxdy$, calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 2. L'intégrale de Gauss
Calculer l'intégrale de GAUSS $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ après en avoir justifié l'existence. On pourra regarder l'intégrale double $\iint_{[0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.

Exercice 3. Convolution et intégrabilité
Montrer que si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et que l'on a $\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exercice 4. Dérivation d'intégrales ? paramètres.
Pour α, β et f de classe C^1, prouver la dérivabilité et donner la dérivée de

$$F : x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$$

Exercice 5. Différentielles des fonctions classiques.
Prouver la différentiabilité et donner la différentielle de
⋆ f linéaire ou affine continue
⋆ ϕ application bilinéaire continue
⋆ $\|\cdot\|^a$ pour $a > 1$ et en 0
⋆ la fonction cube d'une algèbre normée

Exercice 6. Différentielle de la norme.
1. Prouver qu'une norme $\|\cdot\|$ n'est jamais différentiable en 0.
2. Donner la différentielle de $\|\cdot\|^2$.
3. Donner la différentielle de $\sqrt{f}$ pour f différentiable et strictement positive.
4. En déduire la différentielle de $\|\cdot\|$ hors de 0.

Exercice 7. Différentielle du déterminant.
Prouver la différentiabilité et donner la différentielle de det sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Différentielle de l'inversion.
Prouver la différentiabilité et donner la différentielle de $A \mapsto A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9. Fonctions ? croissance rapide.
Si f est de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ et telle que $\frac{f(x)}{\|x\|}$ tend vers l'infini en l'infini, prouver que le gradient est surjectif.

Exercice 10. Un peu de convexité...
On se place sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction numérique y est convexe si elle vérifie la propriété usuelle $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
1. Prouver que f est convexe si, et seulement si, elle est convexe suivant toute direction, *i.e.* si $t \mapsto f(a+tu)$ est convexe pour tous a et u.
2. Montrer que f C^1 est convexe si, et seulement si, $f(b) \geqslant f(a) + \langle \nabla f_a | b-a \rangle$.
3. Que dire des points critiques de f ?

Exercice 11. Des courbes paramétrées dans tous leurs états !
1. Longueurs. Rappeler la définition de la longueur, les formules dans le cas paramétré, graphe et polaire. Tracé, longueur et développée de l'astroïde $a(\cos/\sin)^3$.
2. Abscisse curviligne. Rappeler la définition, les formules de Frénet. Courbure. Points d'inflexion. Tracé de $x(t) = t^2 + \frac{2}{t}$, $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$.
3. Tangentes et allures des courbes au voisinage de singularités, dans les cas cartésien et polaire. Tracé de $r(\theta) = \cos\frac{3\theta}{2}$.

SEMAINE 22

Programme. Fonctions de plusieurs variables ; Courbes & Surfaces ; Équations différentielles linéaires ; Équations différentielles autonomes.

Calcul différentiel. Exercice 1. Souvenirs — Équations différentielles linéaires d'ordre 1
⋆ $y + 2xy = 2xe^{-x^2}$
⋆ $y' - (x+1)(y+1) = 0 \quad y(0) = 1$

Exercice 2. Intervention d'une équation différentielle
Soit f continue et nulle de limite nulle en $+\infty$.
1. Montrer que les solutions de $y' + y = f$ convergent vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer qu'une fonction g de classe C^1 et telle que $g + g' \to l$ tend vers l.

Exercice 3. Matrices antisymétriques et système linéaire
Prouver que A est antisymétrique si, et seulement si, les solutions de $X' = AX$ sont de normale constante.

Exercice 4. Équations différentielles linéaires d'ordre 2
⋆ $y' + y = \tan x$
⋆ $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$

Exercice 5. Expression du wronskien
1. Prouver que pour tout $u \in L(E)$, $\sum_{i=1}^{n} \det\,(x_1, \dots, ux_i, \dots, x_n) = Tr(u) \det\,(x_1, \dots, x_n)$.
2. En déduire que pour tout t_0, il existe X tel que $\forall t \in I, w(X_1, \dots, X_n) = C \exp \int_{t_0}^{t} Tr(A)$.

Exercice 6. Équation différentielle périodique
On considère l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$ où les coefficients sont continus et T-*périodiques*.
1. Prouver qu'une solution y est périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une unique solution périodique.

Exercice 7. Lemme de Gronwall & Unicité des solutions
1. Soient u et v continues sur $[a,b]$. On suppose $u, v \geqslant 0$ et $K \geqslant 0$. Prouver

$$\left(\forall t \in [a,b], u(t) \leqslant K + \int_a^t uv\right) \Longrightarrow \left(\forall t \in [a,b], u(t) \leq Ke^{\int_a^t v}\right)$$

2. Soient Y et Z deux solutions de $Y' = AY + B$ avec $Yt_0 = Zt_0 = Y_0$. Prouver que $Y = Z$.

Exercice 8. Le théorème de Cauchy – Lipschitz : existence
1. Exprimer $Y' = A(t)Y + B(t)$ sous forme intégrale.
2. Prouver par récurrence que $\|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| \leqslant l(\alpha\|Y_0\| + \beta)\frac{\alpha^n (t-t_0)^n}{n!}$.
3. Conclure à la convergence de la série $\sum(Y_{n+1} - Y_n)$ et à l'existence d'une solution.

Exercice 9. Utilisation de la méthode par approximations successives
On suppose que $X' = AX$ avec A à coefficients tous positifs, $X(0) \in \mathbb{R}_+^n$. Prouver que pour tout t, $X(t) \geqslant_n 0$.

Équations différentielles linéaires. Exercice 10. Dérivation d'intégrales à paramètres.
Pour α, β et f de classe C^1, prouver la dérivabilité et donner la dérivée de

$$F : x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$$

Exercice 11. Différentielles des fonctions classiques.
Prouver la différentiabilité et donner la différentielle de
⋆ f linéaire ou affine continue
⋆ ϕ application bilinéaire continue
⋆ $\|\cdot\|^a$ pour $a > 1$ et en 0
⋆ la fonction cube d'une algèbre normée

Exercice 12. Différentielle de la norme.
1. Prouver qu'une norme $\|\cdot\|$ n'est jamais différentiable en 0.
2. Donner la différentielle de $\|\cdot\|^2$.
3. Donner la différentielle de $\sqrt{f}$ pour f différentiable et strictement positive.
4. En déduire la différentielle de $\|\cdot\|$ hors de 0.

Exercice 13. Différentielle du déterminant.
Prouver la différentiabilité et donner la différentielle de det sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14. Différentielle de l'inversion.
Prouver la différentiabilité et donner la différentielle de $A \mapsto A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 15. Fonctions à croissance rapide.
Si f est de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ et telle que $\frac{f(x)}{\|x\|}$ tend vers l'infini en l'infini, prouver que le gradient est surjectif.

Exercice 16. Un peu de convexité...
On se place sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction numérique y est convexe si elle vérifie la propriété usuelle $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.
1. Prouver que f est convexe si, et seulement si, elle est convexe suivant toute direction, *i.e.* si $t \mapsto f(a+tu)$ est convexe pour tous a et u.
2. Montrer que f C^1 est convexe si, et seulement si, $f(b) \geqslant f(a) + \langle \nabla f_a | b-a \rangle$.
3. Que dire des points critiques de f ?

Équations différentielles autonomes. Exercice 17. Quelques résolutions d'EDO.
Résoudre les équations différentielles autonomes suivantes :
$\star$ $y' = 1+y^2$
$\star$ $y^{+}e^{y} = 0$
$\star$ $y' = \sin y$

Exercice 18. Une EDO d'ordre 2.
Déterminer les fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient $y'' = \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Exercice 19. Prolongement de domaine.
Si y est une solution maximale bornée de $y' = f(x,y)$, montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Preuve du théorème de Cauchy – Lipschitz
On suppose que f est localement lipschitzienne, et on considère le problème de CAUCHY $y' = f(x,y)$, $y_0 = y(x_0)$. On suppose que f est k-lipschitzienne sur un voisinage $[x_0 \pm a] \times \overline{B}(y_0,r)$ de (x_0,y_0).
1. Mettre l'équation sous forme intégrale. Déduire qu'une solution du problème est un point fixe pour une certaine fonctionnelle.
2. On se place sur $E_a = C([x_0 \pm a] \times \overline{B}(y_0,r))$. Trouver une condition sur a pour que E_a soit stable par la fonctionnelle intégrale.
3. Trouver une condition sur a pour que la fonctionnelle soit strictement contractante.
4. Conclure à l'aide du théorème de point fixe de PICARD.
5. Prouver le théorème de PICARD pour justifier son utilisation !

******

Première partie 1. Élements de correction

Exercice 1. Il est important de bien maîtriser les critères élémentaires permettant de déterminer la nature d'une série, et une réflexion préliminaire sur le terme général doit permettre d'aiguiller vers le bon critère à appliquer. Une divergence grossière doit être repérée au premier coup d'oeil. La comparaison aux séries usuelles (géométriques, séries entières, exemples de RIEMANN et de BERTRAND doivent être alors une question systématique, notamment par la règle $n^a u_n$. Si cela ne fonctionne pas, et dès que le terme général fait intervenir des combinaisons de fonctions usuelles de n, on peut chercher à faire un développement limité. Les règles de D'ALEMBERT et de CAUCHY sont d'un usage puissant et facile, il faut donc repérer les cas où elles s'appliquent généralement : présence de puissances, de factorielles et de produits. Dans des situations très particulières (permutations, termes généraux aisément calculables ou majorables en des entiers de la forme p^n), on peut chercher à se servir du critère de CAUCHY pour les séries, ou à utiliser des sommations par paquets. Pour finir, lorsque la fonction intervenant dans le terme général a une intégrale aisément évaluable, penser à une comparaison série-intégrale.

1. La divergence est grossière, mais encore faut-il le justifier ! Si $\sin(n)$ converge, il en va de même de $\cos(n)$ par les formules trigonométriques usuelles. Cela implique que e^{in} converge, or cette suite n'est pas de CAUCHY car $|e^{i(n+1)} - e^{in}| = |1 - e^i|$ ne converge pas vers 0.
2. Comme toujours avec des différences de racines carrées, il faut penser à la quantité conjuguée : celle-ci permet d'obtenir une minoration par $\frac{1}{n}$, prouvant la divergence, comme la série harmonique.
3. Un développement limité, une fois les termes regroupés dans un seul logarithme, permet de préciser le comportement et de conclure à la divergence de la série.
4. Naturellement, un terme général faisant intervenir des coefficients binomiaux, donc des factorielles, se traite bien par le critère de D'ALEMBERT, qui permet de conclure à la convergence après simplifications.
5. Les séries de BERTRAND se traitent par une comparaison série-intégrales.

Exercice 2. Minorons une tranche de CAUCHY :

$$\sum_{n+1}^{3n} \frac{\sigma(k))}{k^2} \geq n \frac{n)}{(3n)^2} = \frac{1}{9}$$

Exercice 3. La convergence de la série implique que u_n tend vers 0. À partir d'un certain rang, la suite u_n est strcitement inférieure à 1, donc $u_n^2 \leq u_n$, et donc la série de terme général u_n^2 converge.

Exercice 4. 1. $\sum u_n$ converge, alors il en va de même pour $\sum v_n$ car $v_n \leq u_n$.
2. Avec $u_n = n^2$, $\sum u_n$ diverge grossièrement mais $\sum v_n$ converge par équivalence du terme général avec $\frac{1}{n^2}$. Cependant, si u_n est bornée, alors on peut minorer v_n par $\frac{u_n}{1+M^2}$, qui est le terme général d'une série divergente.

Exercice 5. à rédiger...

Exercice 6. 1. La preuve de la règle de D'ALEMBERT est basée sur une idée puissante et fondamentale : la comparaison du terme général avec les séries géométriques. La règle de CAUCHY se prouve exactement de la même manière : $\sqrt[n]{a_n}$ est strictement inférieur à $l < 1$ s'il y a convergence vers $l' < 1$, et strictement supérieur à $l > 1$ s'il y a convergence vers $l' > 1$. On conclut alors par comparaison de termes généraux.
2. La convergence du quotient vers l s'écrit, pour ε assez petit,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow 0 < l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon)$$

On constate immédiatement que le produit $\prod \frac{u_{k+1}}{u_k}$ se télescope et vaut $\frac{u_n}{u_N}$, donc en faisant le produit des inégalités précédentes :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow 0 < (l - \varepsilon)^{n-N} \leq \frac{u_n}{u_N} \leq (l + \varepsilon)^{n-N})$$

Le passage à la limite « à ε près »sur les termes encadrant donne alors

$$l - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + 2\varepsilon$$

Le raisonnement vaut pour $l > 0$. Si l est nul, on peut se contenter de travailler avec le membre de droite et de minorer par 0.
3. Considerez la suite $u_n = 2 + (-1)^n$.

Exercice 7. (à rédiger)

Exercice 8. 1. La décroissance de u_n fait penser à la méthode classique de l'étude des tranches de CAUCHY :

$$nu_{2n} \leq \sum_{n+1}^{2n} u_k \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad nu_{2n+1} \leq \sum_{n+1}^{2n} u_k \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence recherchée.
2. Puisqu'à partir d'un certain rang $nu_n \leq 1$, on a $nu_n^2 \leq u_n$ et est donc le terme général d'une série convergente.
3. Regarder $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, qui est le terme général d'une série convergence mais $\sum nu_n^2$ diverge et nu_n ne converge pas vers 0.

Exercice 9. On étudie les entiers naturels ne comprenant pas de 9 dans leur développement décimal, naturellement en fonction de nombre de décimales. Pour des nombres inférieurs à 10^n, il y a 9^n possibilités, donc $k_{9^n} = 10^n$. La suite k_n est croissante et permet d'écrire

$$\sum_{9^n}^{9^{n+1}-1} \frac{1}{k_n} \leq \sum_{9^n}^{9^{n+1}-1} \frac{1}{10^n} = 9\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

ce qui prouve la convergence de la suite par sommation par paquets.

Exercice 10. Les « fausses séries alternées »doivent être traitées avec des développements limités avant de conclure !

Exercice 11. Bien évidemment, le résultat est optimal dans le sens où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ne peut convenir, car $(-1)^n i$ est le terme général d'une série divergente. (à rédiger)

Exercice 12. On peut appliquer le critère spécial aux séries alternées : encore faut-il étudier consciencieusement la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ de manière à prouver sa décroissance à partir d'un certain rang.

Exercice 13. Voici un exercice important et une méthode puissante, permettant de conclure dans beaucoup de cas dans lesquels les méthodes usuelles ne donnent aucun résultat.

1. Cette question repose simplement sur la remarque $u_n = U_n - U_{n-1}$ et un changement d'indice dans les sommations.
2. La décroissance permet de fixer le signe de $u_k - u_{k+1}$, et on peut alors majorer les tranches de CAUCHY efficacement, les deux termes périphériques convergeant vers 0 par convergence vers 0 de u_n.
3. Notons que les $e^{in\theta}$ sont presque toujours bornées.

Exercice 14. L'exercice est technique mais non difficile une fois que l'idée est comprise, et c'est la première question qui doit donner la clé de la preuve du théorème. Si l'une des deux série est une somme finie, alors la série est essentiellement une série à termes positifs ou négatifs, et il ne peut y avoir semi-convergence sans qu'il y ait convergence absolue, contrairement à l'hypothèse. Si l'une converge, alors l'autre converge également, sinon il y aurait convergence absolue. La preuve du théorème repose sur ce fait : part de 0, et on ajoute les premiers termes de la série positive si la valeur recherchée est positive. Dès qu'on la dépasse, on ajoute les premiers termes négatifs, jusqu'à la dépasser à nouveau, et ainsi de suite. Le résultat provient de deux faits : il est toujours possible de faire ainsi par divergence des deux séries, puis il y aura en effet convergence vers la valeur car la série est semi-convergente, ce qui fait que l'on va osciller autour de l de manière de plus en plus proche, l'approchant de plus en plus près.

Exercice 15. Les calculs de sommes sont rares avec des outils élémentaires, beaucoup font appel à la théorie de l'intégration ou des séries de FOURIER. Ici, les calculs sont essentiellement basés sur des télescopages ou le développement limité des nombres harmoniques, obtenu aisément par comparaison aux intégrales. La première somme se calcule en reconnaissant la formule de différence de deux arctangentes. La seconde est un simple télescopage. La troisième repose sur une décomposition en éléments simples et l'utilisation du développement limité des nombres harmoniques. La dernière repose sur une décomposition en éléments simples et la reconnaissance d'une identité remarquable au dénominateur.

Exercice 16. La somme converge bien après avoir tout ramené au même dénominateur et montré l'équivalence avec un terme proportionnel à $\frac{1}{n^2}$. Pour le calcul, on utilise le développement asymptotique des nombres harmoniques, en complétant avec les bons termes pour se ramener à des sommes et des différences de nombres harmoniques. La somme de la série est nulle.

Exercice 17. Les équivalents s'obtiennent par des comparaisons séries-intégrales.

Exercice 18. Idem...

Exercice 19. Prouver que les suites sont adjacentes ne présente aucune difficulté, si ce n'est l'utilisation de l'inégalité de concavité de ln : $\ln(1+x) \leq x$. Cela donne les deux premiers termes, en introduisant la constante d'EULER γ. L'équivalent de $t_{n+1} - t_n$ s'obtient par un développement limité immédiat. On cherche alors à sommer cet équivalent, ce qui est possible par théorème, et l'équivalent de la somme s'évalue par une comparaison série-intégrale. On obtient finalement

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 20. Voici un exemple de suite qui s'étudie à travers d'une série, de manière relativement naturelle compte tenu de l'expression apparente de $u_{n+1} - u_n$. La suite croît, donc si la limite existe elle est strictement positive. On aurait alors $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{ln^a}$. La série ayant ce terme général converge donc, autrement dit $a > 1$ par le théorème sur la convergence des séries de RIEMANN. Réciproquement, si $a > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ également, ce qui signifie que la suite u_n converge.

SEMAINE 3

Programme.

Exercice 1. Pour prouver la liberté d'une famille, on suppose que cette famille vérifie une relation liénaire et on prouve que nécessairement ses coefficients sont nuls.

1. En isolant l'un des termes, on obtient $\alpha_k|x-a_k| = \sum \alpha_i|x-a_i|$, le membre de gauche n'étant oas dérivable en a_k, alors que le terme de droite si.

2. En évaluant une combinaison linéaire $\sum \alpha_k \chi_{[a_k,+\infty[}$ en le plus petit des a_k, on obtient la nullité du α_k correspondant, et par suite la nullité de chacun des α_k.

3. Un α_k non nul impliquerait $\sum \alpha_k e^{a_k x}$ équivalent à un $\alpha_k e^{a_k x}$ en $-\infty$ ou $+\infty$, qui divergerait alors.

4. En dérivant et en prenant un équivalent en l'infini, on obtient la nullité des coefficients.

5. On sépare termes positifs et négatifs : $\sum_{\alpha_k>0} \ln(p_k) = \sum_{\alpha_k\leq 0} \ln(p_k)$, on réduit à un même dénominateur pour obtenir une relation à coefficients entiers, on considère l'expoentielle de cette relation, et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers donne la nullité des α_k.

Exercice 2. 1. Si F et G sont deux sous-espaces non inclus l'un dans l'autre distincts, alors il existe $f \in F\backslash G$ et $g \in G\backslash F$. Alors, $f+g$ n'est ni dans F ni dans G. En effet, si $f+g \in F$, $(f+g)-f = g \in F$, ce qui n'est pas. De même pour G. Ainsi, la réunion non triviale de deux espaces vectoriels n'est jamais un espace vectoriel.

2. Dans ce cas, une combinaison linéaire est toujours dans un F_k car deux éléments des F_i sont toujours dans un même F_k qui est un sous-espace vectoriel. La réunion des F_i est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. 1. Un polynôme s'annulant en $n+1$ points est nul, ce qui donne l'intersection nulle de F et G. Une fonction s'écrit toujours $f = (f-L)+L$ où L est le polynôme de Lagrange interpolant les $f(a_i)$.

2. Une fonction paire et impaire est nulle. Toute fonction s'écrit comme somme de sa partie paire et de sa partie impaire.

Exercice 4.

Exercice 5. 1. Il faut prouver que le coefficient de colinéarité est toujours le même. Si $ux = \lambda x$ et $uy = \mu y$, alors $u(x+y) = \theta(x+y)$ par hypothèse, mais si x et y sont indépendant, cela mène à $\theta(x+y) = \lambda x + \mu y$, soit $\theta = \mu = \lambda$, ce qui clos la preuve.

2. On en déduit, en écrivant la commutativité avec les projecteurs suivant les droites, que le centre de $L(E)$ est formé des homothéties.

Exercice 6. 1. En composant une relation liénaire par f^{p-1}, on obtient la nullité du premier coefficient, et par suite de tous.

2. Il suffit de se limiter à un nombre fini de directions pour conclure, en prenant le maximum des indices de nilpotence locale.

Exercice 7.

Exercice 8. Notons u_i et v_i des bases de D_i et Δ_i, et posons $f(u_1) = \alpha_1 v_1$ et $f(u_2) = \alpha_2 v_2$. Il reste à choisir les constantes de manière à obtenir $f(D_3) = \Delta_3$. Puisque u_3 est combinaison linéaire de u_1 et u_2, et traduire la condition $f(u_3) = \lambda v_3$ permet de trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur α_i et λ.

Exercice 9. Il est classique et important de repérer dans la première matrice celle d'un projecteur additionnée à une matrice scalaire, qui se diagonalise aisément et dont les puissances sont connues. Les puissances de la seconde se calculent à l'aide de la formule du binôme, la matrice étant unipotente.

Exercice 10. Si f convient, avec les matrices élémentaires il vient $f(E_{ij}E_{kl}) = f(E_{kl}E_{ij}$, soit $\delta_{jk}f(E_{il}) = \delta_{li}f(E_{kj})$. On obtient notamment, pour $j = k = 1$, $f(E_{il}) = \delta_{il}f(E_{11}$. On trouve alors, pour tout A, $f(A) = tr(A)f(E_{11}$. Réciproquement, les traces conviennent par propriété.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. 1. Il faut prouver que le coefficient de colinéarité est toujours le même. Si $ux = \lambda x$ et $uy = \mu y$, alors $u(x+y) = \theta(x+y)$ par hypothèse, mais si x et y sont indépendant, cela mène à $\theta(x+y) = \lambda x + \mu y$, soit $\theta = \mu = \lambda$, ce qui clos la preuve.

2. On en déduit, en écrivant la commutativité avec les projecteurs suivant les droites, que le centre de $L(E)$ est formé des homothéties.

Exercice 2. 1. Si F et G sont deux sous-espaces non inclus l'un dans l'autre distincts, alors il existe $f \in F \backslash G$ et $g \in G \backslash F$. Alors, $f + g$ n'est ni dans F ni dans G. En effet, si $f + g \in F$, $(f+g) - f = g \in F$, ce qui n'est pas. De même pour G. Ainsi, la réunion non triviale de deux espaces vectoriels n'est jamais un espace vectoriel.

2. Dans ce cas, une combinaison linéaire est toujours dans un F_k car deux éléments des F_i sont toujours dans un même F_k qui est un sous-espace vectoriel. La réunion des F_i est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Il est classique et important de repérer dans la première matrice celle d'un projecteur additionnée à une matrice scalaire, qui se diagonalise aisément et dont les puissances sont connues. Les puissances de la seconde se calculent à l'aide de la formule du binôme, la matrice étant unipotente.

Exercice 4. On écrit $PA = BP$ puis $P = R + iQ$. Le polynôme $det(R + tQ)$ est non nul sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{R}$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $R + tQ$ est inversible, et cette matrice convient.

Exercice 5. La structure de groupe vient dez la multiplicativité du déterminant. L'exercice est très simple : le déterminant est non nul donc on peut le normaliser. La multilinéarité du déterminant permet alors de le faire correctement.

Pour les matrices à coefficients entiers, se servir de la formule de la comatrice et du fait que le déterminant est 11.

Exercice 6. La multiplicativité du déterminant et la structure de groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ donnent le résultat.

Exercice 7. Si la matrice n'est pas inversible, il existe une relation linéaire entre ses colonnes, donc en isolant le coefficient de plus grande valeur absolue et en appliquant l'inégalité triangulaire on obtient que la diagonale n'est pas dominante.

Exercice 8. 1. Si f convient, avec les matrices élémentaires il vient $f(E_{ij}E_{kl}) = f(E_{kl}E_{ij})$, soit $\delta_{jk}f(E_{il}) = \delta_{li}f(E_{kj})$. On obtient notamment, pour $j = k = 1$, $f(E_{il}) = \delta_{il}f(E_{11}$. On trouve alors, pour tout A, $f(A) = tr(A)f(E_{11}$. Réciproquement, les traces conviennent par propriété.

2. Par ce qui précède $f(A) = Tr(A)F$. Donc $Tr(ABC)F = Tr(BAC)F$. Si F est non nulle, on en déduit

$$1 = Tr(E_{11}E_{12}E_{21}) = Tr(E_{12}E_{11}E_{21}) = 0$$

Donc il n'y a que l'application nulle, sauf si $n = 1$ auquel cas toutes conviennent.

SEMAINE 4

Programme. *Limites et comparaison de fonctions réelles d'une variable réelle : équivalents, infiniments petits et infiniments grands, croissances comparées, fonctions monotones.*

Exercice 1. Suites intermédiaires.
Soient u et v deux suites positives. Prouver que si $u_n = o(v_n)$, alors il existe une suite w_n telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$. Autrement dit, il n'y a pas de bon ordre pour la domination de fonctions en un point : entre deux fonctions dont l'une domine l'autre, on peut toujours intercaler une fonction dominant l'une et dominée par l'autre.

Exercice 2. Comparaison de formes exponentielles
Comparer les fonctions $(\ln \ln x)^{x^{\ln x}}$ et $(\ln x)^{x^{\ln \ln x}}$.

Exercice 3. Équivalent de Arccos
Donner un équivalent de Arccos en 0.

Exercice 4. Calcul de limites
Calculer les limites suivantes :

$$\frac{\ln(\cos 3x))}{\sin^2 2x} \quad ; \quad \frac{\log_x a - \log_a x}{shx - sha} \quad ; \quad \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x \quad ; \quad \frac{\sin^{shx} x - 1}{sh^{\sin x} - 1} \quad ; \quad e^{-x}(sh\sqrt{x^2+x} - sh\sqrt{x^2-x})$$

Exercice 5. Équivalent d'une intégrale
Donner un équivalent de $I_n = \int_0^1 \ln^n(1+x)dx$.

Exercice 6. Équivalent d'une somme
Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n E(kx)$.

Exercice 7. Équivalence et monotonie
Trouver deux suites équivalentes, l'une décroissante et l'autre jamais monotone.

Exercice 8. Images d'équivalents
Si f et g sont deux fonctions tendant vers 0 et équivalentes à ϕ et ψ respectivement, prouver $e^{f^2}+e^{g^2}-2 \sim e^{\phi^2}+e^{\psi^2}-2$.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Une suite intermédiaire pour un critère géométrique est naturellement donnée par $w_n = \sqrt{u_n v_n}$, et l'on vérifie qu'elle convient effectivement.

Exercice 2. On applique deux fois le logarithme pour se débarasser de la présence de puissances, méthode classique lors de la recherche d'équivalents. Puis on conclut en faisant attention à la manière dont on se débarasse des logarithmes !

Exercice 3. Puisque Arccos(0) = 0, on a Arccos $\sim \sin(\text{Arccos})$, et on conclut avec $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$.

Exercice 4. Dans l'objectif de se servir des résultats connus sur les équivalents lorsque cela ne s'avère pas directement possible, on travaille les expressions par les méthodes habituelles :

1. $\ln(\cos(3x)) \sim \cos(3x)$ puis $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ et $\sin x \sim x$.
2. Il faut réécrire les logarithmes en termes de $\ln$, puis on obtient que le numérateur est équivalent à $-2\frac{x-a}{a\ln a}$. Le dénominateur de traite avec les formules trigonométriques usuelles, et il est équivalent à $(x-a)cha$.
3. On écrit l'expression sous forme exponentielle, puis la fraction rationnelle tend vers 1 donc son logarithme est équivalent à la fraction moins un. On obtient alors aisément une limite e^3.
4. Sous forme exponentielle, on retrouve des expressions de la forme $e^x - 1$ en 0. On obtient finalement un équivalent à $x \ln x$.
5. On se rappelle que $shx \sim e^x$ en $+\infty$, et on peut sommer les équivalents obtenus dans ce cas, ce qui aboutit à $\sim sh\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5. Comme souvent lors de l'étude de suites d'intégrales, on recherche une relation de récurrence par intégration par parties. Ici, on obtient $I_n = 2\ln^n 2 - nI_{n-1}$. On a de plus

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{2}{1+x}\ln^n(1+x) = 2\frac{\ln^{n+1} 2}{n+1}$$

ce qui permet d'écrire $nI_{n-1} = 2\ln^n 2 - I_n \sim 2\ln^n 2$, ce qui mène au résultat en divisant par n et en décalant les indices.

Exercice 6. Comme toujours lors du travail avec des parties entières, on travaille avec les ingéalités définissant la partie entière. Cela permet d'encadrer la somme par deux termes équivalents, donc la somme lui est également équivalente par la théorème des trois fonctions.

Exercice 7. Les suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n+(-1)^2}$ conviennent.

Exercice 8. On se sert de $e^x - 1 \sim x$ et de la transitivité de l'équivalence.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il s'agit de vérifier que le produit scalaire fourni en est bien un, ce qui relève de la simple vérification de routine, à condition de bien connaître les définitions. La première majoration s'obtient alors en majorant brutalement $|f|$ par $\|f\|_\infty$, et la seconde s'obtient par l'inégalité de CAUCHY – SCHWARZ.

Exercice 2. L'exercice est difficile mais est très représentatif de toutes les preuves de complétude d'espaces fonctionnels.

1. La norme est bien définie, et on vérifie aisément que c'est une norme.

2. Par hypothèse $\|u^p - u^q\|_\infty \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang (apcr), donc $\forall n, \|u_n^p - u_n^q\|_\infty \leq \varepsilon$, et donc $(u_n^p)_p$ est de CAUCHY pour tout n, et converge donc vers un élément u_n.

3. Puisque $\|u^p - u^q\|_\infty \leq \varepsilon$ apcr, on a $\|u^q\|_\infty \leq \|u_p\|_\infty + \varepsilon$ et donc $(q\infty)$ $\|u\|_\infty \leq \|u_p\|_\infty + \varepsilon$: la limite u est bien bornée.

4. On a $\|u^p - u^q\|_\infty \leq \varepsilon$ apcr, donc $\forall n,\ |u_n^p - u_n^q| \leq \varepsilon$ apcr, donc $\forall n,\ |u_n^p - u_n| \leq \varepsilon$ apcr, ce qui signifie bien que $\|u^p - u\|_\infty \leq \varepsilon$ apcr : c'est la définition de la convergence dans l^∞.

5. La base canonique $(\delta_{i,n})_i$ est libre dans l^∞.

Exercice 3. On ramène tout à la boule unité en considérant les éléments normés. Pour les boules fermées, $\frac{x}{N_1(x)}$ dans la boule unité pour N_1, donc pour N_2 (soit $N_1 \leq N_2$), et réciproquement, donc on a l'égalité des deux normes pour tous les éléments non nuls, donc l'égalité des deux normes. Pour les boules ouvertes, on voit que le raisonnement ne tient plus car nous avions à faire à des éléments de norme 1. Qu'à cela ne tienne : on considère $\frac{x}{N_1(x)+\varepsilon}$ pour obtenir $N_2 \leq N_1 + \varepsilon$ et conclure en faisant tendre ε vers 0. De même en échangeant les deux normes.

Exercice 4. Ce sont des vérifications de routine pour vérifier que ce sont des normes. Les a_i doivent être tous positifs (regarder avec les vecteurs de la base canonique), les éléments x_i doivent être en nombre supérieurs strictement au degré du polynôme auquel on se limite (ce sont donc des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$), les a_n doivent être strictement positifs et la norme N_a est dominée par N_∞ mais ne lui est pas équivalente :

Exercice 5. Tout est fondé sur la première inégalité, qui est une conséquence de la concavité du logarithme : $\ln a + \ln b \leq \ln(ta + (1-t)b)$. On applique alors l'inégalité à tous les $\frac{x_i}{\|x\|_p}$ et $\frac{y_j}{\|y\|_q}$, puis on somme pour obtenir l'inégalité de HOLDER. L'inégalité de MINKOWSKI découle d'une petite astuce d'écriture : $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$, puis on applique l'ingéalité précédemment établie. Cela prouve que les $\|\cdot\|_p$ sont des normes, la seule propriété difficile à obtenir étant celle qui vient d'être prouvée : l'inégalité triangulaire. Pour la convergence des normes, on écrit simplement

$$\|x\|_\infty^p \leq \|x\|_p^p \leq n\|x\|_\infty^p$$

et on conclut en considérant la racine p-ième et en passant à la limite.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il suffit d' ?crire que la premi ?re fonction envoie une combinaison lin ?aire au dessus de la combinaison lin ?aire des images, puis d'appliquer la seconde qui est croissante, et utiliser la m ?me propri ?t ?.

Exercice 2. Il faut faire attention au fait que l'on n'a pas forc ?ment d ?rivabilit ?. Mais dans tous les cas on a $f(x) \geq f(a) + (x-a)\tau_{b,a}$ pour $x \leq a$ ou $x \geq b$ car les pentes sont croissantes. Donc en l'infini, si $\tau_{a,b}$ n'est pas nul, on obtient une limite infinie. N ?cessairement, f est born ?e si, et seulement si, elle est constante.

Exercice 3. On se sert de la croissance des cord ?es tir ?es de $x_0 \in]a, b[$:

$$\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

et le th ?or ?me des trois fonctions permet de conclure.

Exercice 4. Si a est minimum local de f, alors pour $b > c > a$ et c suffisamment proche de a, on a par croissance des cordes $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq 0$
et on raisonne de m ?me pour $c < a$ en faisant attention aux signes !

Exercice 5. Pour $a, b \in I$, pon introduit $A = \{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$. L'hypoth ?se donne la stabilit ? de A par moyenne arithm ?tique de deux ?l ?ments. Per r ?currence, A contient donc les $\lambda/2^n$ pour $\lambda \in A$, donc nottament les $k/2^n$ pour k entier. On approche donc un λ par $E(\lambda 2^n)/2^n$ et on passe ? la limite pour obtenir que λ est ?galement dans A.

Exercice 6. 1. On choisit a et b dans I, et on veut prouver que λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est atteint, autrement dit que l'on peut trouver un x tel que $f'(x) = \lambda$. Le th ?or ?me des accroissements finis affirme que cela est vrai s'il y a une pente de λ. On s'int ?resse alors des pentes, notamment de celles issues de $(a, f(a))$ et de $(b, f(b)$:

$$\phi : t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \qquad \psi : t \longmapsto \frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$

On prolonge ces deux applications en a et b respectivement, par $f'(a)$ et $f'(b)$. On obtient ainsi deux applications continues sur $[a, b]$, leurs images sont donc deux segments. Puisqu'ils contiennent tous les deux $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, la r ?union des deux intervalles est un segment, qui contient au moins $[f'(a), f'(b)]$, donc qui contient λ : l'un des deux contient donc λ, et on conclut par la formule des accroissements finis.
2. La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ convient.

Exercice 7. $\sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$ holderienne donc uniform ?ment continue. En effet, en consid ?rant les carr ?s il vient $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$, donc si $|x-y| \leq \varepsilon^2$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$. Elle n'est pas lipschitzienne au voisinage de z ?ro car sa d ?riv ?e diverge vers l'infini ; elle est lipschitzienne d ?s que l'on retire un tel voisinage.

Observons que ln n'est pas uniform ?ment continue. Si tel ?tait le cas, on aurait $|\ln x - \ln y| \leq \varepsilon$ d ?s que $|x-y| \leq \delta$. Alors avec $y = x + \delta$, on aurait $\ln\left(\frac{x+\delta}{x}\right)$ inf ?rieur ? ε, alors que cette quantit ? diverge vers l'infini en 0. Elle n'est a fortiori pas lipschitzienne, mais elle l'est d ?s que l'on retire un voisinage de z ?ro.

$x \ln x$ est prolongeable par continuit ? en 0. On obtient donc une fonction continue sur un segment, donc uniform ?ment continue par le th ?or ?me de Heine.

Exercice 8. La fonction $x \mapsto f(x) + tg(x)$ est continue sur un segment donc admet une borne sup ?rieure qu'elle atteint, disons en x_t. On a alors $\phi(t) - \phi(t') = f(x_t) + tg(x_t) - f(x_{t'}) - t'g(x_{t'})$. Puisque $f(x_{t'}) + tg(x_{t'}) \leq f(x_{t'}) + t'g(x_{t'})$ par d ?finition, il vient $\phi(t) - \phi(t') \leq (t-t')g(x_t) \leq \|g\|_\infty (t-t')$. On obtient ainsi la lipschitzianit ?.

Exercice 9. La fonction est uniform ?ment continue, donc si deux ?l ?ments sont proches d'au plus δ, alors leurs images sont proches d'au plus ε. L'hypoth ?se de convergence donne $f(n\delta)$ convergeant vers 0. Vient alors l'id ?e de d ?couper la droite r ?elle en segments $[n\delta, (n+1)\delta]$: pour n suffisamment grand, les $f(n\delta)$ sont inf ?rieurs ? ε. Les x suffisamment grands sont proches de ces $n\delta$ de moins de δ, donc les $f(x)$ sont proches de certains $f(n\delta)$ de moins de ε, et ceux-ci sont proches de 0 ? moins de ε. Cela prouve le r ?sultat : les $f(x)$ sont proches de 0 ? moins de 2ε pour x suffisamment grand, ce qui traduit bien la convergence vers 0.

On obtient un contre exemple avec $f(x) = n$ si $x = \pi^n$ et 0 sinon. La fonction le converge pas vers 0 puisqu'elle diverge suivant la suite π^n qui tend vers l'infini, mais elle tend vers 0 suivant les suites arithm ?tiques, une seule valeur des $k\pi^n$ pouvant ?tre non nulle : si $k\pi^n = k'\pi^{n'}$, alors $\pi^{n-n'}$ serait rationnel, ce qui n'est pas puisque π est transcendant.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Les normes sont toutes équivalentes puisque $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Il suffit donc de prouver le résultat pour une « bonne » norme : si le résultat est vrai pour une norme N', alors on sait qu'il existe a et b tels que $aN' \leq N \leq bN'$, et alors $aN(AB) \leq N'(AB) \leq \lambda N'(A)N'(B) \leq b^2\lambda N(A)N(B)$. La norme N_∞ vérifie aisément la propriété avec $\lambda = n$.

Exercice 2. 1. Un polynôme de degré au plus d s'annulant en $d+1$ points distincts en nul.
2. Les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}_d[X]$ car c'est un espace de dimension finie. Il suffit alors de dire que la convergence simple correspondant à la convergence au sens de N, que la convergence uniforme sur un segment correspond à la norme sup sur ce segment, et que la convergence des coefficients correspond à la convergence pour la norme somme des valeurs absolues des coefficients.

Exercice 3. Il existe x non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

Exercice 4. 1. Les normes sont 1 et 2, ce que l'on obtient avec la suite constante 1 et la suite alternée $(-1)^n$.
2. La norme vaut 2, ce que l'on obtient avec la fonction constante 1.

Exercice 5. 1. C'est évident puisque les applications linéaires continues sont celles qui sont bornées sur la boule unité.
2. La norme sup sur un la boule unité rend la dérivation continue, avec une norme 1. La norme $\sum |P^{(k)}(0)|$ envoie les X^n sur n, alors qu'ils sont sur la sphère pour l'autre norme.

Exercice 6. L'application $\|f(x) - x\|$ admet un minimum par compacité et continuité. Celui-ci est est forcément nul, sinon l'image de cet élément donne une valeur strictement inférieure. L'unicité provient de l'inégalité.

Exercice 7. C'est un fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue) et un borné (inclus dans la sphère unité) en dimension finie.

Exercice 8. Soit $(u_p)_p$ une suite de X. Si $\{p|u_p = x_n\}$ pour un certain n, on peut extraire une sous-suite constante, de même pour la limite. Supposons désormais que les $\{p|u_p = x_n\}$ et $\{p|u_p = l\}$ soient finis. Puisque $\{p|u_p = x_0\}$ est fini, à partir d'un certain rang p_0, les termes u_p n'atteignent plus x_0. Puisque $\{p|u_p = x_1\}$ est fini, à partir d'un certain rang $p_1 > p_0$, les termes u_p d'atteignent plus x_1, etc. En itérant ce procédé d'extractions successives, on obtient une extraction p_k telle que $u_p \notin \{x_0, , \ldots, x_k\}$ pour $p > p_k$. Puis u_{p_k} converge évidemment vers l : c'est une sous-suite d'une suite convergente.

Exercice 9. Si f n'est pas uniformément continue sur le compact x, cela signifie qu'il existe ε tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe x_n et x'_n distants de moins de $\frac{1}{n}$ mais tels que $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ soient distant d'au moins ε. Puis X est compact, on peut extraire successivement et obtenir une sous-suite de (x_n, x'_n) convergente, que l'on notera également (x_n) et (x'_n). Puisque les termes des deux suites se rapprochent, les deux suites convergent vers la même limite : $\|x - x'\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x'_n\| + \|x'_n - x'\|$. Puisque f est continue, $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ convergent vers $f(x) = f(x')$, ce qui est absurde compte tenu de l'hypothèse !

Exercice 10. Chaque C_n est fermé comme réunion de segments, donc C est fermé par intersection. Il est borné par construction. Il est inclus dans les C_n, donc pour tout $r > 0$, un intervalle de longueur r ne peut être inclus dans C car il n'est pas inclus dans C_n pour n tel que $r > 3^{-n}$.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il y a convergence simple vers 0, ce que l'on obtient en cherchant un équivalent pour $x \neq 0$. Si $n^3x^4 \leq 1$, on minore le dénominateur par 1 et on majore. Sinon, on minore le dénominateur par n^3x^4 et on majore, ce qui donne la convergence uniforme en assemblant les deux cas.

Il y a convergence simple vers une fonction discontinue, la convergence ne peut donc pas être uniforme.

On dérive, on trouve un maximum en $-2/n$ et une valeur associée divergente : il n'y a pas convergence uniforme, on constate graphiquement un péhnomène de bosse glissante.

Exercice 2. 1. Pour toute application ϕ, $|f_n(\phi(x)) - f(\phi(x))| \leq \|f_n - f\|_\infty$, donc la convergence uniforme est conservée par composition à droite. Le phénomène est moins stable par composition à gauche : si ϕ est uniformément continue, alors puisque $\|f_n - f\|_\infty$ est arbitrairement petit, $\|\phi \circ f_n - \phi \circ f\|_\infty$ également arbitrairement petit par définition de l'uniforme continuité. Mais ce n'est plus le cas avec des applications seulement continues, qui peuvent faire « exploser » les variations !

2. Si les deux applications sont bornées, alors les f_n et les g_n sont uniformément bornées à partir d'un certain rang, et on peut écrire $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq \|f_n\|_\infty\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\|f_n - f\|_\infty$ qui converge bien uniformément vers 0. Par contre ce n'est pas nécessairement le cas si f n'est pas bornée !

Exercice 3. Il s'agit d'une simple approximation de f par les f_n : pour un n, $f_n(x)$ et $f_n(y)$ sont uniformément proches pour x et y proches et f_n et f sont uniformément proches :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\|$$

le terme central étant majoré par uniforme continuité de f_n et les deux autres par convergence uniforme. Attention à l'uniformité : il faut un majorant indépendant indépendant de x et de y, il faut donc exploiter l'uniformité de la convergence et de la continuité des f_n.

Exercice 4. 1. Un polynôme de degré au plus d s'annulant en $d+1$ points distincts en nul.

2. Les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}_d[X]$ car c'est un espace de dimension finie. Il suffit alors de dire que la convergence simple correspondant à la convergence au sens de N, que la convergence uniforme sur un segment correspond à la norme sup sur ce segment, et que la convergence des coefficients correspond à la convergence pour la norme somme des valeurs absolues des coefficients.

Exercice 5. L'uniforme continuité permet de se ramener à la convergence simple en un nombre fini de points, en choisissant une subdivision $(x_i)_i$ de pas suffisamment petit. Puis, il suffit de dire que la convergence simple en un nombre fini de points équivaut à la convergence uniforme en écrivant

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(a) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f_n(x)\|$$

le terme central étant majoré par $\|f_n - f\|_\infty$ qui converge vers 0, et les deux autres étant majorés par continuité uniforme de f et de f_n. Notons qu'il faut bien que cette majoration soit indépendant de x et de a, sinon on ne peut passer à la borne supérieure dans le membre de gauche !

Exercice 6. Il suffit d'écrire $|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$, le premier terme tendant vers 0 par uniforme convergence, et le second par continuité de f en x.

Exercice 7. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, on peut donc prendre la borne supérieure des normes des composantes sans changer les notions de continuité et de convergence. Chaque composante converge alors uniformément, donc chaque composante de la limite est continue, donc f est continue.

Exercice 8. Divergence en 0, convergence simple ailleurs par équivalence à n^{-3}. On exclut désormais 0. Les f_n sont bornées et ont un supremum qui vaut $\frac{1}{n}$: il n'y a donc pas convergence normale, mais convergence normale sur tout compact n'incluant pas 0, et même sur les $[a, +\infty[$. Puisqu'il n'y a pas convergence normale, il faut étudier la convergence uniforme en étudiant le reste. En minorant par la tranche entre $n+1$ et $2n$, on minore par $(2 + 8n^2x^2)^{-1}$ qui ne converge par uniformément vers 0 car est constant en $\frac{1}{n}$. Comme pour la convergence normale, il n'y a convergence uniforme qu'hors d'un voisinage de 0.

Un développement limité à l'ordre 1 donne la somme d'un terme général d'une série alternée convergente et d'un reste convergeant absolument, la série converge donc. Il n'y a convergence absolue qu'en 0, autrement le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$. Il n'y a en particulier pas convergence normale hors de $\{0\}$. Par contre la convergence uniforme s'étudie efficacement pour les séries alternées, puisque nous connaissons une majoration du reste par son premier terme. L'étude des variations de f_n montre un maximum valant $\frac{1}{n}$, il y a donc convergence uniforme vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9. La série converge normalement car ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\sum 4^{-n}$ converge. Elle converge donc uniformément, et puisque les fonctions sont toutes continues la somme est continue. Pour la non dérivabilité, fixons $n \geq 0$, $\varepsilon = \pm 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, et examinons le taux d'accroissement des ϕ_p en x_0 :

$$\frac{\phi_p(x_0 + 4^{-n}\varepsilon) - \phi_p(x_0)}{4^{-n}\varepsilon} = \frac{\phi_0(x_0 + 4^{p-n}\varepsilon) - \phi_0(4^p x_0)}{4^{p-n}\varepsilon}$$

Cette quantité est nulle pour $p \geq n$ car alors $4^{p-n}\varepsilon$ est entier, et ϕ_0 est 1-périodique. Pour $p \leq n-1$, considérons un ε tel que $\left]4^{n-1}x_0 + \frac{\varepsilon}{4}, 4^{n-1}x_0\right[$ ne contienne pas de demi-entier, ce qui est possible car s'il en contient, avec l'autre segment ($\varepsilon \leftarrow -\varepsilon$) n'en contient pas, les intervalles étant de longueur $\frac{1}{4}$. Alors $]4^p x_0 + 4^{p-n}\varepsilon, 4^p x_0[$ ne peut contenir de demi-entier r, sinon $\left]4^{n-1}x_0 + \frac{\varepsilon}{4}, 4^{n-1}x_0\right[$ contiendrait $4^{n-1-p}r$ qui serait entier. Ainsi,

$$\left|\frac{\phi_0(4^p x_0 + 4^{p-n}\varepsilon) - \phi_0(4^p x_0)}{4^{p-n}\varepsilon}\right| = 1$$

Le taux d'accroissement de la somme étant la somme des n premiers taux d'accroissements, les autres étant nuls, c'est un entier relatif non nul de même parité que n qui diverge donc.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il s'agit de primitives immédiates : on reconnaît deux fois $\frac{u'}{u}$, puis un changement de variable t^2 fait apparaître du $\frac{1}{1+t^2}$, puis on écrit $\cos^2 = 1 - \sin^2$ (mais de manière générale, linéariser est une méthode infaillible bien que peu efficace), puis on voit $\cos(t)$ comme $Re(e^{it})$, et enfin deux intégrations par parties résolvent le calcul.

Exercice 2. On songe au changement de variable $u = \tan(t/2)$, et ce de manière générale dès lors que les règles de BIOCHE ne s'appliquent pas. Pour la seconde, on est en présence d'une fraction rationelle en e^x, donc pose donc $u = e^x$. Calculs laissés à la joie de l'élève...

Exercice 3. Par linéarité de l'intégration l'hypothèse se traduit par $\int_0^1 f(f-1) = 0$. Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue et positive qui est nulle, d'où $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 4. Si f n'a pas de point fixe, par continuité on a $f(x) < x$ ou $f(x) > x$ sur $[0,1]$, or cela implique que l'intégrale de f est inférieure ou supérieure strictement à $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$.

Exercice 5. S'il existe un point x_0 dans un intervalle de continuité de f tel que $f(x_0) \neq 0$, par exemple $f(x_0) > 0$, alors $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ sur un voisinage de x_0, soit $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Il vient alors que $\int_I f \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f \geq \alpha f(x_0) > 0$, ce qui fait que l'intégrale de f n'est pas nulle.

Exercice 6. Le polynôme $(X-\alpha)(\beta-X)+1$ convient. L'hypothèse donne la nullité de l'intégrale contre tout monôme, donc par linéarité contre tout polynôme. Par l'absurde on suppose que f n'est pas nulle, il existe donc c tel que $f(c) \neq 0$, par exemple $f(c) > 0$. La continuité de f prouve que $f > \frac{1}{2}f(c)$ sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenant c. Puisque f est continue sur un segment elle est bornée, disons par M, et puisque P' ne s'annule que strictement entre les racines de P et est continue, $P' \geq \lambda > 0$ sur $[0, \alpha]$, donc

$$\left|\int_0^\alpha P^n f\right| \leq M \int_0^\alpha P^n \leq \frac{M}{\lambda}\int_0^\alpha P^n P' = \frac{M}{\lambda}\left[\frac{P^{n+1}}{n+1}\right]_0^\alpha \leq \frac{M}{\lambda(n+1)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

De même, l'intégrale entre β et 1 tend vers 0. Or $\int_\alpha^\beta P^n f \geq \int_\alpha^\beta f \geq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)f(c)$ ne tend pas vers 0, donc l'intégrale sur $[0,1]$ non plus, et c'est absurde puisque les $\int P^n f$ sont toutes nulles !

Exercice 7. On raisonne par l'absurde et on suppose que f a moins de n zéros. En multipliant f par le polynôme $P = \prod(X - a_i)$ où les a_i sont les zéros de f, on arrive à une fonction de signe constant et d'intégrale nulle, ce qui n'est pas.

Exercice 8. Pour une fonction continûment dérivable, il suffit d'intégrer par parties et de constater que la dérivée est bornée. Dans le cas d'une fonction en escalier, c'est un simple calcul d'intégrale qui donne le résultat, puisqu'alors $\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = \int_\alpha^\beta \sin(nt)dt$. Pour une fonction continue, on approche uniformément par des fonctions en escalier : il existe e en escalier telle que $\sup|f-e| \leq \varepsilon$, donc les intégrales sont proches à $(b-a)\varepsilon$ près par inégalité de la moyenne, or celle de la fonction en escalier contre $\sin(n\cdot)$ est constamment nulle.

Exercice 9. On s'intéresse naturellement à $\int_0^x fg = \phi(x)$. L'hypothèse se réécrit en $\frac{fg}{C+\phi} = \frac{\phi'}{C+\phi} \leq g$, donc en intégrant on obtient $\int_0^x g \geq \ln(C+\phi(x)) - \ln C$, donc en prenant l'exponentielle $f(x) \leq C + \phi(x) \leq \exp\left(\int_0^x g\right)$. Dans le cas où C est nulle, on a l'inégalité pour $C + \varepsilon$, puis on passe à la limite, le critère étant continu.

Exercice 10. On découvrira en seconde année que la convergence est en fait « uniforme », ce qui est beaucoup plus fort, c'est la convergence vraiment intéressante dans les espaces de fonctions. Pour n suffisamment grand, l'uniforme continuité de f – théorème de HEINE – donne $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour $x, y \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, d'où

$$|f \star \rho_n(x) - f(x)| \leq \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f(y) - f(x))g(x-y)\right| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x) - f(y)|g(x-y)dy \leq \varepsilon \int g = \varepsilon$$

Exercice 11. Dans le cas lipschitzien, de brutales majorations suffisent :

$$\left|\int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(x_i)\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}}(f(x)-f(x_i)\right)dx\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(x)-f(x_i)|\,dx$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} k\,|x-x_i|\,dx \leq k(b-a)\sigma \longrightarrow 0$$

Dans le cas continue, le théorème de HEINE affirme que f est uniformément continue. Pour une subdivision de pas suffisamment petit, on aura donc $|f(x)-f(a_i)| \leq \varepsilon$ pour tout i, et on reprend les mêmes majorations en utilisant cette majoration au lieu de la lipschitzianité de f.

Exercice 12. En prenant le logarithme, on reconnaît une somme de RIEMANN convergeant vers $2\ln 2 - 1$.

Exercice 13. Les dérivées successives sont presque toujours nulles, les seuls cas où il reste des termes non nuls sont les $n \leq k \leq 2n$, et la formule de LEIBNIZ donne alors l'explicitations des valeurs, que l'on constate être entières. Des majorations larges donnent la convergence des I_n vers 0, la présence du $n!$ dominant tous les autres termes qui sont au plus géométriques. Or, en intégrant par parties suffisamment de fois jusqu'à « bannir » le polynôme de l'intégrale, on trouve que les I_n sont entières comme combinaisons linéaires des dérivées successives en 0 et en π. La suite stationne donc à 0, alors que la fonction $P_n \sin$ est continue, positive et non nulle sur $[0,\pi]$!

Exercice 14. Une intégration par parties donne $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, ce qui permet d'obtenir la valeur explicite des I_n en fonction de n, en distinguant deux cas selon la parité de n. La fonction $n \mapsto \sin^n$ est décroissante puisque sin est inférieur à 1, donc il en va de même de I_n. Puisque $\sin^n$ est positive, continue et non nulle, I_n est strictement positive. On peut alors diviser $I_n \leq I_{n+1} \leq I_{n+2}$ et obtenir à l'aide de la relation de récurrence précédent $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{n+2}{n+1}$ ce qui donne $I_n \sim I_{n+1}$ par le théorème des trois fonctions. La relation de récurrence donne $(n+1)I_nI_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2}$, la suite est donc constante et vaut $I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$. Ce qui précède donne donc $\frac{\pi}{2} = (n+1)I_nI_{n+1} \sim nI_n^2$, soit $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puisque I_n est positif.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. On recherche systématiquement des équivalents ou à appliquer les règles $x^\alpha f(x)$ dans un premier temps pour étudier l'intégrabilité d'une fonction *positive*. La première est équivalent en 1 à $(1-t)^{-1}$ qui n'est pas intégrale ; les deux suivantes sont intégrables grâce à la comparaison aux x^α.

Exercice 2. Deux intégrations par parties résolvent le problème, en écrivant pour la seconde $\cos(t^2) = \frac{2t}{2t}\cos(t^2)$ pour reconnaître la sérivée de $\sin(t^2)$.

Exercice 3. L'idée est importante : la convergence d'une intégrale d'une fonction continue est la convergence de sa dérivée. Ceci permet de faire une intégration par partie (sur un segment dans un premier temps, et en passant à la limite – qui existe du coup – par la suite), et on conclut.

Exercice 4. Si $a > 1$, il y a intégrabilité par la règle $x^\alpha f(x)$. Pout $a = 1$, il y a convergence si, et seulement si, $b > 1$, ce qui s'obtient par un changement de variable $u = \ln t$. Si $a < 1$, on conclut avec la règle $xf(x)$ à la divergence de l'intégrale.

Exercice 5. 1. La relation de CHASLES permet d'écrire $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$ qui tend vers 0 puisque les deux tendent vers la même limite : l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il s'agit d'utiliser la convergence vers 0 de « tranches » d'intégrales : $\int_x^{x+1} f \leq f(x) \leq \int_{x-1}^x$ et les deux encadrants tendent vers 0 ; puis la fonction f est positive car décroissante et convergeant vers 0 donc on a $0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f$ qui tend vers 0.

Exercice 6. L'intégrabilité de f' permet d'écrire $f(x) = f(0) + \int_0^x f'$ qui admet une limite en l'infini. Puisque f est intégrable, cette limite ne peut être que nulle (faire un dessin et l'écrire proprement !).

Exercice 7. 1. Dans le cas d'un intervalle borné ; une fonction constante non nulle n'est jamais intégrable sur un non borné.

2. Dans le cas contraire, on serait régulmièrement plus grand qu'un $a > 0$. Or, l'uniforme continuité affirme que la fonction varie uniformément lentement : elle reste plus grand que $\frac{a}{2}$ sur des voisinages de ces points de taille 2δ, l'intégrale de la fonction est donc minorée (on considère une fonction positive quand on traite d'intégrabilité !) par la somme des intégrales sur les voisinages de ces points, qui sont toutes minorées par la constante δa, terme générale d'une série divergente.

3. Une fonction de type « tente » fait l'affaire.

Exercice 8. La fonction est bien définie par équivalent et règle $x^\alpha f(x)$. La formule s'obtient par intégration par parties, et on prouve grâce à elle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout n.

Exercice 9. 1. Un changement de variable $u = t^2$ permet d'intégrer en $Arctan$.

2. Tout est bien intégrable, on peut faire le changement de variable $u = 1/x$ qui convient.

3. On factorise $1 + t^4 = (1+t^2)^2 - 2t^2 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$, on calcule donc naturellement $I - \sqrt{2}J + I$ en mettant le dénominateur sous forme canonique et en faisant un changement de variable par translation, on obtient $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, et on en déduit la valeur de I (même valeur).

Exercice 10. Avec un changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient $\tan \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc l'intégrale existe. Puis on effectue le changement de variable $u = \tan t$ et on calcule, on obtient $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 11. On vérifie que tout est bien intégrable. Une intégration par parties donne $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$ et donc $I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$, et donc...

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. On recherche systématiquement des équivalents ou à appliquer les règles $x^\alpha f(x)$ dans un premier temps pour étudier l'intégrabilité d'une fonction *positive*. La première est équivalent en 1 à $(1-t)^{-1}$ qui n'est pas intégrale ; les deux suivantes sont intégrables grâce à la comparaison aux x^α.

Exercice 2. Deux intégrations par parties résolvent le problème, en écrivant pour la seconde $\cos(t^2) = \frac{2t}{2t}\cos(t^2)$ pour reconnaître la sérivée de $\sin(t^2)$.

Exercice 3. L'idée est importante : la convergence d'une intégrale d'une fonction continue est la convergence de sa dérivée. Ceci permet de faire une intégration par partie (sur un segment dans un premier temps, et en passant à la limite – qui existe du coup – par la suite), et on conclut.

Exercice 4. Si $a > 1$, il y a intégrabilité par la règle $x^\alpha f(x)$. Pout $a = 1$, il y a convergence si, et seulement si, $b > 1$, ce qui s'obtient par un changement de variable $u = \ln t$. Si $a < 1$, on conclut avec la règle $xf(x)$ à la divergence de l'intégrale.

Exercice 5. 1. La relation de CHASLES permet d'écrire $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$ qui tend vers 0 puisque les deux tendent vers la même limite : l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il s'agit d'utiliser la convergence vers 0 de « tranches » d'intégrales : $\int_x^{x+1} f \leq f(x) \leq \int_{x-1}^x$ et les deux encadrants tendent vers 0 ; puis la fonction f est positive car décroissante et convergeant vers 0 donc on a $0 \leq \frac{x}{2}f(x) \leq \int_{x/2}^x f$ qui tend vers 0.

Exercice 6. L'intégrabilité de f' permet d'écrire $f(x) = f(0) + \int_0^x f'$ qui admet une limite en l'infini. Puisque f est intégrable, cette limite ne peut être que nulle (faire un dessin et l'écrire proprement !).

Exercice 7. 1. Dans le cas d'un intervalle borné ; une fonction constante non nulle n'est jamais intégrable sur un non borné.

2. Dans le cas contraire, on serait régulmièrement plus grand qu'un $a > 0$. Or, l'uniforme continuité affirme que la fonction varie uniformément lentement : elle reste plus grand que $\frac{a}{2}$ sur des voisinages de ces points de taille 2δ, l'intégrale de la fonction est donc minorée (on considère une fonction positive quand on traite d'intégrabilité !) par la somme des intégrales sur les voisinages de ces points, qui sont toutes minorées par la constante δa, terme générale d'une série divergente.

3. Une fonction de type « tente » fait l'affaire.

Exercice 8. La fonction est bien définie par équivalent et règle $x^\alpha f(x)$. La formule s'obtient par intégration par parties, et on prouve grâce à elle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout n.

Exercice 9. 1. Un changement de variable $u = t^2$ permet d'intégrer en $Arctan$.

2. Tout est bien intégrable, on peut faire le changement de variable $u = 1/x$ qui convient.

3. On factorise $1+t^4 = (1+t^2)^2 - 2t^2 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$, on calcule donc naturellement $I - \sqrt{2}J + I$ en mettant le dénominateur sous forme canonique et en faisant un changement de variable par translation, on obtient $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, et on en déduit la valeur de I (même valeur).

Exercice 10. Avec un changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient $\tan \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc l'intégrale existe. Puis on effectue le changement de variable $u = \tan t$ et on calcule, on obtient $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 11. On vérifie que tout est bien intégrable. Une intégration par parties donne $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}$ et donc $I_{p,q} = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$, et donc...

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. On applique les méthodes classiques d'obtention des rayons de convergence, qui sont faciles et à maîtriser : règles de D'ALEMBERT, équivalents, etc. On obtient respectivement 3, ∞, $\frac{1}{4}$ et 1.

Exercice 2. De nombreux résultats faciles et utiles existent pour les séries entière, cet exercice en regroupe quelques uns parmi les plus simples, mais qui ne sont pas sans intérêt. En connaissant ces « remarques » du cours, nombre sont les exercices qui deviendront triviaux à vos yeux et vous permettront de gagner du temps, de l'assurance et surtout de la compréhension. Les exercices sur les séries entières regorgent de ces petits résultats théoriques obtenus à bas coût, profitez-en !

1. Le rayon de $\sum a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$ car $z^{2n} = \left(z^2\right)^n$: si $|z| > R$, $a_n \left(z^2\right)^n$ n'est pas bornée par définition du rayon de convergence, donc $R' \leq \sqrt{R}$; et si $|z| < R$, $a_n \left(z^2\right)^n$ est bornée, donc $R' \geq \sqrt{R}$. Le second point s'obtient de la même manière.

2. Le rayon R est supérieur à $|x_0|$ puisque la série converge. Il ne peut être strictement plus grand sinon il y aurait convergence absolue, car on serait à l'intérieur du disque de convergence.

3. Pour z non nul, $\sqrt[n]{|a_n z^n|}$ converge vers $l|z|$. On conclut alors avec laz règle de CAUCHY bien connue pour les séries numériques – et qu'il convient de savoir prouver ! – en faisant attentions aux cas $l = 0$ et $l = \infty$.

4. La suite est bornée et, à moins qu'elle soit nulle, ne converge pas vers 0, donc le rayon vaut 1. En réorganisant les termes, on obtient

$$\sum_{k=0}^{nT-1} = a_n x^k = \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{p=0}^{n-1} a_{pT+k} x^{pT+k} = \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k \frac{1 - x^{nT}}{1 - x^T}$$

et on passe à la limite $n \to \infty$.

Exercice 3. Si elle l'était, alors le développement serait donné par sa série de TAYLOR car la fonction est lisse – *i.e.* de classe C^∞. Or, on prouve que toutes les dérivées successives de cette fonction sont nulles en 0, la série de TAYLOR est donc constamment nulle ! Pour prouver que les dérivées sont nulles en 0, on montre par récurrence, l'idée venant de l'observation des premiers termes, que la dérivée n-ième s'écrit comme $P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}$ où P_n est un polynôme : on conclut alors par croissances comparées.

Exercice 4. On écrit la formule de TAYLOR avec reste intégral – et on la connait ! La série de TAYLOR de f est majorée par f et à termes positifs, donc elle converge, donc son terme général $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ tend vers 0, et cela prouve que le reste tend vers 0 après une simple majoration en remarquant que les dérivées successives sont croissantes, car à dérivées positives. Donc f est somme de sa série de TAYLOR en 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Une intégration par parties donne $I(p,q) = \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1)$, on obtient alors par récurrence $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. La règle de D'ALEMBERT donne alors un rayon de convergence égal à 4. Le critère des séries alternées donne la convergence en -4, puisque $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ donc la suite est décroissante. Pour la convergence en 4, on obtient un équivalent de u_n à l'aide de la formule de STIRLING – d'usage très pratique en théorie des séries entières – qui vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\sqrt{n}}$ et donc $4^n u_n$ diverge en $x = 4$, comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, le domaine de convergence est $[-4, 4[$.

Exercice 6. Réfléchir un peu à l'application des développement en série entière est une bonne chose, mais il ne faut pas s'y accrocher de toutes forces. Une bonne méthode pour trouver des développements en série entière de fonctions dont on connaît les propriétés, comme sh et Arcsin ici, est de passer par une équation différentielle. On constate que la fonction est solution de $(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$ avec $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$. Une analyse donne la relation de récurrence $a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} a_n$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On obtient la forme des coefficients en fonction de n : si n est pair, les coefficients sont nuls – ce qui était prévisible puisque la fonction est impaire – et si $n = 2p+1$, $a_n = \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=1}^{p} ((2i-1)^1 + 1)$. Réciproquement, si y est la fonction définie par $\sum a_n x^n$ avec les coefficients précédemment obtenus, alors le rayon de convergence vaut 1 par la règle de D'ALEMBERT, et les calculs ont montré qu'elle est solution du problème différentiel énoncé au début. Le théorème de CAUCHY – LIPSCHITZ affirme l'unicité d'une telle solution : c'est donc notre fonction !

Exercice 7. On dérive la première et on développe simplement. Idem pour la seconde avec $-1 + \frac{1}{1-xe^{it}} + \frac{1}{1-xe^{-it}}$.

Exercice 8. On note que $xf(x^2) = Arctan(x)$, donc pour $x > 0$ on obtient $f(x) = \frac{Arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Puis $xf(-x^2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = Argth(x)$, donc pour $x < 0$ in vient $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$. Et f vaut 1 en 0. Pour la seconde, le rayon vaut 1 par la r-gle de D'ALEMBERT. La fonction somme est impaire donc on se limite aux $x > 0$. On constate alors que $\sqrt{x}f(x^{3/2}) = \sum x^{3n+2}3n+2$, qui est la primitive de $\sum t^{3n+1}$ qui vaut $\frac{t}{1-t^3}$. Il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples !

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. f est bornée sur un intervalle borné, donc l'hypothèse de domination est toujours vérifiée. C'est une remarque qui est toujours bonne à faire lorsque c'est le cas, on peut alors passer à la limite simple sous l'intégrale sans – beaucoup – plus de justifications. Puisque f est strictement croissante, $0 < f < 1$ sur $]0,1[$ et donc f^n converge simplement vers 0, sauf en 1 où elle vaut constamment 1. Le théorème de convergence dominée donne donc la convergence vers l'intégrale de la fonction nulle sur $[0,1[$ et valant 1 en 1, qui est nulle.

Exercice 2. On justifie que l'on peut dériver par rapport à x l'intégrale, et en dérivant et en changeant de variables on obtient $g'(x) = -2f'(x)f(x) = f^2(x)'$ où $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$. En intégrant, il vient $g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$. Puisque g est de limite nulle — car on peut factoriser par e^{-x^2} multipliée par une intégrale constante — on en déduit que l'intégrale de GAUSS vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3. Puisque f est nulle en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'$ pour tout x, donc en changeant de variables on obtient $f(x) = x\int_0^1 f'(tx)dt$, qui est de classe C^∞ par théorème de dérivation sous le symbole d'intégration.

Exercice 4. Généralement le calcul explicite d'intégrales à paramètres se résoud en dérivant par rapport au paramètre : la première donne la dérivée de Arctan après passage sous forme exponentielle, la seconde une équation différentielle homogène d'ordre 1, après intégration par parties, qui s'intègre aisément, et la dernière une équation différentielle homogène d'ordre 1 après intégration par parties.

Exercice 5. En fait f tend même vers 0 en l'infini. Puisque l'intégrale est convergence, il suffit de montrer que f est uniformément continue. En effet, pour mémoire cela se prouve simplement en écrivant que $\eta\|f(x)\| = \left\|\int_x^{x+\eta} f(x)\right\| \leq \left\|\int_x^{x+\eta}(f(x)-f(t))dt\right\| + \left\|\int_x^{x+\eta} f(t)dt\right\| \leq 2\varepsilon$ pour x suffisamment grand pour que la seconde intégrale soit petite (intégrabilité) et η suffisamment petit pour que la premlière soit petite (uniforme continuité). L'uniforme continuité découle ici simplement de l'inégalité de CAUCHY — SCHWARZ, elle est même 0,5-hölderienne.

Exercice 6. Tout se passe sur $]0,+\infty[$. En dérivant deux fois, on voit que Γ est convexe, et on obtient sa dérivée qui permet de tracer le tableau de variations.Pour l'équivalent on se sert de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et pour la convergence en l'infini on se sert de la croissance et des valeurs en les entiers ($n!$). Pour finir, $\ln\Gamma$ est convexe en observant que sa dérivée seconde est positive et en appliquant l'inégalité de CAUCHY – SCWARZ.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Tout se base sur les propriétés classiques de la trace, notamment $Tr(AB) = Tr(BA)$. Il convient de savoir prouver la supplémentarité de A_n et S_n, ce qui se fait par analyse et synthèse. L'inégalité de CAUCHY – SCHWARZ donne le dernier résultat, avec égalité si, et seulement si, A est une homothétie positive.

Exercice 2. La stricte convexité s'obtient par l'inégalité triangulaire et le cas d'égalité ; l'uniforme convexité s'obtient grâce à l'identité du parallélogramme.

Exercice 3. C'est classiquement un produit scalaire, par linéarité et positivité de l'intégration, et parce qu'une fonction *continue* et positive d'intégrale nulle est nulle. L'orthogonal est plus difficile à trouver sans indications : il s'agit de l'ensemble des fonctions telles que $\int fP = 0$ pour tout polynôme P. Avec le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, on peut trouver P proche de f à ε près, et l'intégrale de fP – qui est nulle – est proche de l'intégrale de f^2 : $\int fP - \int f^2 = \int |f||P - f| \leq (b-a)\|f\|_\infty \varepsilon$.

Exercice 4. 1. Une telle fonction g ne pourrait être continue. En effet, si on considère les fonctions « tente » qui sont affines entre $(0, 2^n)$ et $(2^{-n}, 0)$ et nulles après, elles sont continues, mais le rapport $\frac{\|gf_n\|}{\|f_n\|}$ diverge.

2. Avec $P_n = (1 - X)^n$, on obtient une valeur 1 en 0, pourtant l'intégrale converge vers 0, ce que l'on constate en majorant directement ou par le théorème de convergence dominée.

3. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, le théorème de représentation de RISEZ – immédiat en dimension finie – prouve l'existence et l'unicité d'un tel Q. S'il n'était pas de degré n, alors XQ serait encore dans $\mathbb{R}_n[X]$, et on aurait alors $0 = \int XQ^2$, ce qui impliquerait $Q = 0$.

Exercice 5. 1. Si la famille est liée, une relation entre les vecteurs donne la même relation entre les colonnes. Réciproquement, si la matrice n'est pas inversible, alors il existe une relation non triviale $\sum \lambda_i C_i = 0$ entre les colonnes, et donc le vecteur $\sum \lambda_i x_i$ est orthogonal à tous les x_i, mais est dans l'espace engendré par eux : il est donc nul car orthogonal à lui-même.

2. Il suffit de développer $|G(x_1, \dots, x_n, x)$ en écrivant $x = y + z$ avec $y \in Vect((x_i)_i)$ et z dans son orthogonal. Tous les termes de la dernière colonne s'annulent sauf le terme diagonale, il suffit alors de développer par rapport à la dernière colonne.

3. Il s'agit de calculer une distance à un espace, on reconnaît en effet le produit scalaire $(P, Q) = \int_0^1 PQ$, et on recherche donc (le carré de) la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X] = \{at^2 + bt + c\}$. On applique simplement le résultat précédent en calculant les projections sur les X^i. Sans le résultat de GRAM, il faudrait trouver le projetté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, que l'on écrirait avec des constantes indéterminées $p(X^3) = aX^2 + bX + c$, et on obtient les coefficients avec $(p(X^3), X^i) = (X^3, X^i)$.

Exercice 6. 1. Il s'agit de la définition séquentielle de la borne inférieure définissant la distance à une partie.

2. On écrit l'identité du parallélogramme $\left\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2)$, on exploite la convexité en disant que $\left\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\right\| \geq d(x, C)$, et on exploite la définition de la suite $(x_n)_n$ pour prouver que $\|x_n - x_m\|$ tend vers 0 avec n et m.

3. La complétude donne l'existence d'une limite, qui est dans C qui est fermé par hypothèse.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. 1. Il s'agit du lemme de RIEMANN – LEBESGUE : on le prouve pour des fonctions C^1 par intégration par parties, et on prolonge aux fonctions continues en approchant uniformément par des fonctions en escalier, ou des polynômes.

2. Il s'agit simplement de l'inégalité de CAUCHY – SCHWARZ, donnant un majorant fini grâce à la formule de PARSEVAL.

3. On connaît la formule $c_n(f^{(p)} = (in)^p c_n(f)$ qui permet de conclure grâce à RIEMANN – LEBESGUE.

4. Dans ce cas, la série de FOURIER ainsi que les séries de FOURIER des dérivées jusqu'à l'ordre p convergent uniformément, vers une limite qui est donc de classe C^p. Cette limite est nécessairement f puisque la série converge quadratiquement vers f !

Exercice 2. 1.a. Seuls les coefficients impairs sont non nuls, et valent $2\frac{1+(-1)^{n+1}}{n\pi}$.

b. Il y a convergence simple car la fonction est C^1 par morceaux, mais pas de convergence uniforme car la limite n'est pas continue.

2.a. La somme vaut $\pi/4$ par convergence en $\pi/2$, et la somme des carrés vaut $\pi^2/8$ par PARSEVAL.

b. Il faut rajouter les termes pairs, donc on sait calculer les sommes : on obtient $\pi^2/6$ et $\pi^2/12$.

Exercice 3. Il y a convergence simple par le théorème de DIRICHLET, et elle ne peut être uniforme car la fonction n'est pas continue. Le développement de FOURIER pris en 1 donne la première somme, et la seconde s'obtient par la formule de PARSEVAL.

Exercice 4. On a la relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$, et $c_0(f) = c_0(f') = 0$. PARSEVAL donne alors $\sum |c_n(f)|^2 \leq |c_n(f')|^2$ avec égalité si, et seulement si, seuls les termes correspondant à $n = 1$ sont non nuls. La réciproque est également immédiate.

Exercice 5. 1. Les cas particuliers sont clairs. Le calcul des noyaux de DIRICHLET est le calcul d'une somme de termes d'une suite géométrique. On se ramène au même type de calculs pour le noyau de FéJER en injectant l'expression précédente dans noyaux de DIRICHLET dans la définition.

2. En calculant l'intégrale des noyaux de DIRICHLET et en sommant, on obtient une intégrale 1. C'est la norme intégrale du noyau de FéJER car il est positif par l'expression précédente. Il tend clairement vers 0 uniformément hors de $[-\delta, \delta]$, il suffit de minorer le sinus par $\sin \delta/2$. On coupe alors classiquement l'intégrale venant de $|\sigma_n(f) - f|$ en deux en remarquant que $\sigma_n(f) = f \star K_n(f)$! Autour de 0, l'uniforme continuité – continuité sur un segment – de f permet de conclure ; hors d'un voisinage de 0, la convergence uniforme de K_n permet de conclure.

3. Le théorème périodique est démontré : il suffit de prendre les moyennes partielles de CESARO des sommes de FOURIER. Le théorème de WEIERSTRASS en découle en appliquant le précédent à $f \circ \cos$, ce qui donne le résultat sur $[-1, 1]$. Pour les autres segments il suffit de faire une translation-dilatation.

Exercice 6. On l'écrit, et deux valeurs propres ne peuvent être distinctes, car la moyenne des vecteurs propres...

Exercice 7. Soit on considère une valeur propre complexe et on obtient un système qui donne la stabilité d'un plan ; soit on décompose le polynôme caractéristique, qui admet au moins un facteur irréductible de degré 1 ou 2.

Exercice 8. Ce sont des équations à résoudre !

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Pour la première, reconnaître en $M + (b-a)I$ un quasi-projecteur. La seconde est de rang 2, et les vecteurs propres du noyau sont immédiats (les $e_1 - e_j$ par exemple, il y en a bien $n-2$ en s'arrêtant à $j = n-1$). Les deux autres valeurs propres sont données par $(n-1)x_n = \lambda(\lambda-1)x_n$.

Exercice 2. Si $Ax = \lambda x$, on a $\sum a_{ij}x_j = \lambda x_i$ pour tout i. En particulier, pour le x_i de module maximum, qui est non nul si x est un vecteur propre, on obtient $|\lambda - a_{ii}|x_i \leq \sum |a_{ij}|x_i$, d'où le résultat. On en déduit le résultat sur les matrices à diagonales dominantes, car alors 0 n'appartient à aucun de ces disques.

Exercice 3. Ce sont les polynômes en u. En effet, soit v commutant avec u. On peut écrire $v(x_0) = \sum a_i u^i(x_0)$. Prouvons que $v = \sum a_i u^i$. La commutation prouve que $u^j v(x_0) = v(u^j(x_0))) \sum a_i u^i(u^j x_0)$, donc l'égalité est vraie sur une base, donc sur tout l'espace par linéairité. Réciproquement, tout polynôme en u commute bien évidemment avec u.

Exercice 4. Par le théorème de CAYLEY – HAMILTON, le polynôme caractéristique annule u. Il n'est donc pas inversible, l'un de ses facteurs n'est donc pas inversible. S'il est de degré 1, il existe un vecteur propre. S'il est de degré 2, le plan (x, ux) est stable puisque u^2x est dedans.

Exercice 5. Si $ux = \lambda x$ et $uy = \mu y$, considérons $u\left(\frac{x+y}{2}\right)$. C'est un $\rho\frac{x+y}{2}$ par hypothèse, mais c'est aussi $\frac{\lambda x+\mu y}{2}$ par ce qui précède. Puis les sous-espaces propres sont en somme directe, on a nécessairement $\lambda = \mu = \rho$ (sinon on aurait deux décompositions d'un même vecteur sur (x, y) !). Donc toutes les valeurs propres sont ρ : c'est une homothétie.

Exercice 6. La première est la résolution d'une équation différentielle donnant des solutions exponentielles. Les seules nulles en 0 sont 0. Le spectre est donc vide. Pour la seconde, les vecteurs propres sont des suites géométriques, et elles ne restent bornées que si elles ont des raisons inférieures à 1, ce qui donne un spectre de $[-2, 0]$.

Exercice 7. $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ donne la commutativité, et il est de notoriété publique que cela implique que toutes les matrices sont simultanément diagonalisables (récurrence sur la dimension). Dans une base de diagonalisation, les coefficients diagonaux sont ± 1, il y a donc 2^n possibilités distinctes. En particulier, les automorphismes conservant les involutions, cela donne $n \leq m$ si GL_n s'injecte dans GL_m et égalité par symétrie des rôles de m et n.

Exercice 8. Un polynôme SARS annule A, soit $\prod(X - \lambda_i)$. Alors $\prod(X^p - \lambda_i)$ est aussi SARS dans $\mathbb{C}$ car les λ_i sont non nuls et admettent donc exactement p racines p-ièmes. Si la matrice n'est pas inversible, plus précisément si son noyau est de dimension au moins 2, cela peut ne plus fonctionner : penser à une matrice nilpotente !

Exercice 9. Si f est diagonalisable, elle est diagonale avec k zéros dans une certaine base, et donc il en va de même pour f^2, qui est de fait diagonalisable, de noyau de même dimension, donc égal car on a toujours $Ker(f) \subseteq Ker(f^2)$. Réciproquement, si f^2 est diagonalisable, on écrit $(f^2 - \mu) = (f - \lambda)(f + \lambda)$ pour toute valeur propre μ non nulle de f^2. On conclut avec le lemme des noyau, le cas de $\mu = 0$ étant réglé par $Ker(f) = Ker(f^2)$. Dans le cas réel, pour pouvoir faire cela, il faut des valeurs propres positives pour f^2, ce qui est évidemment nécessaire à f diagonalisable également.

Exercice 10. On raisonne par récurrence sur la dimension. Si tous les endomorphismes sont des homothéties, c'est clair. Sinon, l'un a au moins deux sous-espaces propres stricts, nécessairement stables par les autres car ils commutent. Ils sont diagonalisables sur ces deux sous-espaces – car annulés par un polynôme SARS – et on applique l'hypothèse de récurrence. De même pour la triangulation : un sous-espace propre est stable par les autres, et ils y admettent une valeur propre commune (récurrence sur le nombre d'endomorphismes par exemple).

Exercice 11. $\mathbb{C}$ algébriquement clos permet de scinder χ_u, puis le lemme des noyaux donne la décomposition de E comme somme de sous-espaces caractéristiques. On pose $d_{E_i} = \lambda_i id_{E_i}$ qui est diagonal, et $n = u - d$ qui est nilpotent car $(u_{E_i} - \lambda_i id_{E_i})^{m_i} = 0$ par définition de $E_i = Ker(u_{E_i} - \lambda_i id_{E_i})^{m_i}$. Ils commutent clairement car d est une homothétie sur les sous-espaces propres de n.

Exercice 12. Les sous-espaces propres doivent être laissés stables. Les matrices du commutant sont donc par blocs correspondant aux blocs diagonaux de la matrice diagonalisée. Puis on vérifie que tous les tels blocs conviennent, et ils définissent entièrement un endomorphisme. La dimension est donc $\sum n_i^2$.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Pour la première, reconnaître en $M + (b - a)I$ un quasi-projecteur. La seconde est de rang 2, et les vecteurs propres du noyau sont immédiats (les $e_1 - e_j$ par exemple, il y en a bien $n - 2$ en s'arrêtant à $j = n - 1$). Les deux autres valeurs propres sont données par $(n - 1)x_n = \lambda(\lambda - 1)x_n$.

Exercice 2. Si $Ax = \lambda x$, on a $\sum a_{ij} x_j = \lambda x_i$ pour tout i. En particulier, pour le x_i de module maximum, qui est non nul si x est un vecteur propre, on obtient $|\lambda - a_{ii}|x_i \leq \sum |a_{ij}|x_i$, d'où le résultat. On en déduit le résultat sur les matrices à diagonales dominantes, car alors 0 n'appartient à aucun de ces disques.

Exercice 3. Ce sont les polynômes en u. En effet, soit v commutant avec u. On peut écrire $v(x_0) = \sum a_i u^i(x_0)$. Prouvons que $v = \sum a_i u^i$. La commutation prouve que $u^j v(x_0) = v(u^j(x_0))) \sum a_i u^i(u^j x_0)$, donc l'égalité est vraie sur une base, donc sur tout l'espace par linéairité. Réciproquement, tout polynôme en u commute bien évidemment avec u.

Exercice 4. Par le théorème de CAYLEY – HAMILTON, le polynôme caractéristique annule u. Il n'est donc pas inversible, l'un de ses facteurs n'est donc pas inversible. S'il est de degré 1, il existe un vecteur propre. S'il est de degré 2, le plan (x, ux) est stable puisque $u^2 x$ est dedans.

Exercice 5. Si $ux = \lambda x$ et $uy = \mu y$, considérons $u\left(\frac{x+y}{2}\right)$. C'est un $\rho\frac{x+y}{2}$ par hypothèse, mais c'est aussi $\frac{\lambda x+\mu y}{2}$ par ce qui précède. Puis les sous-espaces propres sont en somme directe, on a nécessairement $\lambda = \mu = \rho$ (sinon on aurait deux décompositions d'un même vecteur sur (x, y) !). Donc toutes les valeurs propres sont ρ : c'est une homothétie.

Exercice 6. La première est la résolution d'une équation différentielle donnant des solutions exponentielles. Les seules nulles en 0 sont 0. Le spectre est donc vide. Pour la seconde, les vecteurs propres sont des suites géométriques, et elles ne restent bornées que si elles ont des raisons inférieures à 1, ce qui donne un spectre de $[-2, 0]$.

Exercice 7. $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ donne la commutativité, et il est de notoriété publique que cela implique que toutes les matrices sont simultanément diagonalisables (récurrence sur la dimension). Dans une base de diagonalisation, les coefficients diagonaux sont ± 1, il y a donc 2^n possibilités distinctes. En particulier, les automorphismes conservant les involutions, cela donne $n \leq m$ si GL_n s'injecte dans GL_m et égalité par symétrie des rôles de m et n.

Exercice 8. Un polynôme SARS annule A, soit $\prod(X - \lambda_i)$. Alors $\prod(X^p - \lambda_i)$ est aussi SARS dans $\mathbb{C}$ car les λ_i sont non nuls et admettent donc exactement p racines p-ièmes. Si la matrice n'est pas inversible, plus précisément si son noyau est de dimension au moins 2, cela peut ne plus fonctionner : penser à une matrice nilpotente !

Exercice 9. Si f est diagonalisable, elle est diagonale avec k zéros dans une certaine base, et donc il en va de même pour f^2, qui est de fait diagonalisable, de noyau de même dimension, donc égal car on a toujours $Ker(f) \subseteq Ker(f^2)$. Réciproquement, si f^2 est diagonalisable, on écrit $(f^2 - \mu) = (f - \lambda)(f + \lambda)$ pour toute valeur propre μ non nulle de f^2. On conclut avec le lemme des noyau, le cas de $\mu = 0$ étant réglé par $Ker(f) = Ker(f^2)$. Dans le cas réel, pour pouvoir faire cela, il faut des valeurs propres positives pour f^2, ce qui est évidemment nécessaire à f diagonalisable également.

Exercice 10. On raisonne par récurrence sur la dimension. Si tous les endomorphismes sont des homothéties, c'est clair. Sinon, l'un a au moins deux sous-espaces propres stricts, nécessairement stables par les autres car ils commutent. Ils sont diagonalisables sur ces deux sous-espaces – car annulés par un polynôme SARS – et on applique l'hypothèse de récurrence. De même pour la triangulation : un sous-espace propre est stable par les autres, et ils y admettent une valeur propre commune (récurrence sur le nombre d'endomorphismes par exemple).

Exercice 11. $\mathbb{C}$ algébriquement clos permet de scinder χ_u, puis le lemme des noyaux donne la décomposition de E comme somme de sous-espaces caractéristiques. On pose $d_{E_i} = \lambda_i id_{E_i}$ qui est diagonal, et $n = u - d$ qui est nilpotent car $(u_{E_i} - \lambda_i id_{E_i})^{m_i} = 0$ par définition de $E_i = Ker(u_{E_i} - \lambda_i id_{E_i})^{m_i}$. Ils commutent clairement car d est une homothétie sur les sous-espaces propres de n.

Exercice 12. Les sous-espaces propres doivent être laissés stables. Les matrices du commutant sont donc par blocs correspondant aux blocs diagonaux de la matrice diagonalisée. Puis on vérifie que tous les tels blocs conviennent, et ils définissent entièrement un endomorphisme. La dimension est donc $\sum n_i^2$.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. C'est immédiatement un sous-groupe. La compacité vient du fait que c'est un fermé comme image réciproque de I_n par $M \mapsto {}^tMM$ qui est continue, et qu'il est borné car $\|M\| = \sqrt{Tr({}^tMM)} = \sqrt{n}$. Et $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. $\mathcal{SO}_n$ est l'intersection du compact $\mathcal{O}_n$ avec le fermé SL_n, comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par le déterminant.

Exercice 2. 1. S_n est l'image réciproque de 0 par $A \mapsto {}^tA - A$ qui est continue, et S_n^+ est fermé dans M_n par passage à la limite dans le critère ${}^tXAX \geqslant 0$, il est donc fermé dans M_n, donc dans S_n car celui-ci est fermé.

2. Puisque $S_n^{++} = S_n^+ \cap GL_n$, il suffit de prouver les résultats pour GL_n. Or c'est facile : c'est un ouvert car si A est inversible, alors les $A + \frac{1}{n}I$ également pour n assez grand. En effet, puisque $\chi_A(0) \neq 0$, il en va de même au voisinage de 0, *i.e.* les matrices $A + \frac{1}{n}I$ sont inversibles pour n assez grand, et convergence vers A, d'où la densité. C'est un ouvert car image réciproque par le déterminant, qui est continu, de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 3. 1. Si p est un projecteur orthogonal, alors $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$ par le théorème de PYTHAGORE, donc $\|p\| \leqslant 1$. Réciproquement, si $\|p(x + \lambda y)\| \leqslant \|x + \lambda y\|$ pour tout λ, on obtient, pour $x \in Im(p)$ et $y \in Ker(p)$, $\|y\|^2\lambda^2 + 2\langle x, y\rangle\lambda \geqslant 0$, donc $x \perp y$ et p est un projecteur orthogonal.

2. Si $p \circ q$ est un projecteur, alors il est orthogonal car $p \circ q\| \leqslant \|p\|\|q\| \leqslant 1$. Il est alors autoadjoint, donc $p \circ q = (p \circ q)^\star = q^\star \circ p^\star = q \circ p$.

Exercice 4. C'est facile : les sous-espaces propres de f sont stables par g. Puisque (la restriction de) g est autoadjoint(s) sur chacun d'eux, elle est orthodiagonalisable par le théorème spectral. La réunion de ces basses, qui sont ortonormales, est toujours orthonormale car les sous-espaces propres de f sont orthogonaux entre eux. Puisque les vecteurs de ces bases sont vecteurs propres de f – puisque appartenant aux sous-espaces propres – c'est gagné.

Exercice 5. Une racine carrée R de A commute avec $A = R^2$, donc les sous-espaces propres de A sont stables. Or, sur ceux-ci, A induit une homothétie λid, de racine carrée nécessairement $\sqrt{\lambda} id$. Réciproquement, la matrice R ainsi définie est bien symétrique, positive, et de carré A. C'est un polynôme en A : il suffit de prendre un polynôme (par exemple un interpolateur de LAGRANGE) envoyant λ sur $\sqrt{\lambda}$ pour chaque valeur propre.

Exercice 6. Par le théorème de CAYLEY – HAMILTON, le polynôme caractéristique annule u. Il n'est donc pas inversible, l'un de ses facteurs n'est donc pas inversible. S'il est de degré 1, il existe un vecteur propre. S'il est de degré 2, le plan (x, ux) est stable puisque u^2x est dedans. Puis récurrence.

Exercice 7. C'est immédiat après réduction en bon, car la somme des carrés des coefficients est $Tr({}^tAA)$.

Exercice 8. Le fait fondamental est que ${}^tAA$ est symétrique (positive). Puisqu'elle est nilpotente, comme A par commutativité, et diagonalisable, par le théorème spectral, elle est nulle. Sa trace est donc nulle, et on sait bien que c'est la somme des carrés des coefficients de A, qui est donc nulle également.

Élements de correction

Exercice 1. Méthode classique et variation de la constante : $(x^2+k)e^{-x^2}$. Idem pour la seconde, attention à la condition initiale et à la forme trompeuse : $\frac{2}{\sqrt{e}}e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}-1$.

Exercice 2. On interpète comme une EDL. g est solution de $y'+y=f$ avec f tendant vers 0. On sait expliciter de telles solutions : ce sont les $Ce^{-x}+e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$. f est inférieure à ε pour $x \geqslant A$, donc en découpant l'intégrale en A on obtient la convergence vers 0. La fonction $g-l$ est alors solution de $y'+y=g'+g-l$ qui tend vers 0, ce qui donne le résultat.

Exercice 3. La norme nous intéresse, donc on regarde naturellement $({}^tXX)'={}^t X({}^tA+A)X$. Si A est antisymétrique, la norme est donc constante. Si cette dérivée est nulle, alors ${}^tA+A$ est de seule valeur propre 0 (car $\langle AX, X\rangle$ est toujours nul), or il est symétrique donc diagonalisable. Il est donc nul, *i.e.* A est antisymétrique.

Exercice 4. La première se résoud classique avec une variation des constantes : $W=\begin{pmatrix}\cos & \sin\\ -\sin & \cos\end{pmatrix}$ d'inverse sa transposée (orthogonale), donc $\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix}=W^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \tan x\end{pmatrix}$. On obtient alors en intégrant $\lambda=\sin x-\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+k$ et $\mu=-\cos x+k'$.

Pour la seconde, on recherche une solutions particulière développable en série entière. On trouve des coefficients tous égaux et une solution $\frac{1}{1-x}$. On pense alors à la méthode de Liouville : si l'on dispose d'une solution particulière f non nulle de l'équation homogène, on peut ramener la résolutino d'une EDL *d'ordre 2* à des quadratures en posant $y=fz$. L'équation devient $xz''+z'=0$, d'où $z=\ln$ et $y=\frac{\ln x}{1-x}$. On a notre système fondamental de solutions.

Exercice 5. 1. La fonction $x\mapsto\sum\det\left(x_1,\ldots,ux_i,\ldots,x_n\right)$ est n-linéaire alternée, donc est colinéaire au déterminant. On obtient la constante avec la base canonique, ce qui donne la trace.

2. On dérive : $W'=\sum|X_1,\ldots,X_i',\ldots,X_n|=\sum|X_1,\ldots,AX_i,\ldots,X_n|=Tr(A)W$ par le lemme. =

Exercice 6.

1. S'il y a égalité, alors $y(t)$ et $y(t+T)$ sont solutions du même problème de Cauchy, les coefficients étant périodiques.

2. La solution générale est $\left(y_0+\int_0^t be^{-\alpha}\right)e^{\alpha}$. On développe l'équivalence $y(0)=y(T)$: si $e^{\alpha(T)}$ est nulle, et alors soit toutes les solutions conviennent soit aucune ; sinon on a une unique solution.

Exercice 7. 1. On réécrit l'inégalité sous la forme $\frac{u(t)v(t)}{K+\int_a^t uv}\leq v(t)$. Si $K>0$, alors le dénominateur reste strictement positif : on reconnaît une dérivée logarithmique. On obtient le résultat en intégrant. Si K est nul, on fait de même avec tout $\varepsilon>0$, et on obtient que u est majorée par $\varepsilon e^{\int v}$, et est donc nulle.

2. Sur tout segment $\|Y(t)-Z(t)\|\leqslant\int_{t_0}^t\|A\|\cdot\|Y-Z\|$ et $\|A\|$ est continue et positive. Le lemme de Gronwall donne donc $Y=Z$ *sur J*. Une suite exhaustive de segments permet alors de conclure en recollant les Y_n obtenus.

Exercice 8. 1. $Y=Y_0+\int_{t_0}^t(AY+B)$, on introduit donc la fonctionnelle F correspondante et $Y_{n+1}=F(Y_n)$, et on cherche à trouver un point fixe, qui sera alors solution. Le théorème de Picard est évidemment une solution...

2. On a posé $\alpha=\sup\|A\|$ sur $[t_0,t_0+l]$, etc. Puis c'est immédiat en majorant par l'intégrale du majorant de l'hypothèse de récurrence.

3. On majore donc $\|Y_{n+1}-Y_n\|$ par le terme général (exponentiel) d'une série convergente, donc il y a CVN, sonc (Y_n) CVU, et on peut intégrer terme à terme la somme pour prouver que la limite Y est toujours solution de l'équation différentielle.

Exercice 9. On sait que $X_{n+1}(t)=X(0)+\int_0^t Ax_n$, donc c'est immédiat par récurrence !

Exercice 10. On calcule l'intégrale double de deux manières : l'intégration par rapport à x est immédiate, donne l'intégrabilité sur le produit (*i.e.* Tonelli – Fubini s'applique) et se calcule, l'intégrale dans l'autre sens donnant l'intégrale recherchée. On obtient $\ln 2$.

Exercice 11. L'intégrabilité est immédiate, car pour $|t|\geqslant 1$ on a $|e^{-t^2}|\leqslant|e^{-t}|$. Puis l'intégrale double est bien définie : on la calcule en séparant les variables et en faisant un passage en polaire, on obtient $I^2=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 12. On note $F(x,y)=f(x-y)g(y)$. Pour tout y, $\int|F(x,y)|dx=|g(y)|\|f\|_1$ est finie, et sont intégrale par rapport à y vaut $\|f\|_1\|g\|_1$ qui est également finie par hypothèse. Le théorème de Fubini–Tonelli affirme alors que F est intégrable par rapport à y puis par rapport à x, *i.e.* que $f\star g$ est intégrable. L'inégalité est déjà prouvée.

Exercice 1. On calcule l'intégrale double de deux manières : l'intégration par rapport ? x est immédiate, donne l'intégrabilité sur le produit (*i.e.* Tonelli – Fubini s'applique) et se calcule, l'intégrale dans l'autre sens donnant l'intégrale recherchée. On obtient $\ln 2$.

Exercice 2. L'intégrabilité est immédiate, car pour $|t| \geqslant 1$ on a $|e^{-t^2}| \leqslant |e^{-t}|$. Puis l'intégrale double est bien définie : on la calcule en séparant les variables et en faisant un passage en polaire, on obtient $I^2 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3. On note $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Pour tout y, $\int |F(x,y)|dx = |g(y)|\|f\|_1$ est finie, et sont intégrale par rapport ? y vaut $\|f\|_1\|g\|_1$ qui est également finie par hypothèse. Le théorème de Fubini–Tonelli affirme alors que F est intégrable par rapport ? y puis par rapport ? x, *i.e.* que $f \star g$ est intégrable. L'inégalité est déj ? prouvée.

Exercice 4. On sait prouver la dérivabilité d'une intégrale lorsque seules les bornes varient, ou seul l'intégrande : un changement de variable affine (x étant fixé) permet de se ramener ? ce dernier cas. Puis, l'idée est de considérer la fonction plus générale de trois variables $(x,y,z) \mapsto \int_y^z f(x,t)dt$ qui est C^1 (même raison), et on sait dériver par rapport aux bornes (depuis la terminale) et par rapport ? l'intégrande (depuis le cours sur les intégrales ? paramètres). On obtient alors, par composition :

$$F' : x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt - \alpha'(x)f(\alpha(x),x) + \beta'(x)f(\beta(x),x)$$

Exercice 5. Tout est facile si on a compris la bonne définition de la différentielle : $f(a+h) - f(a) = df_a(h) + o(h)$. On obtient dans l'ordre : l'application linéaire (associée ? l'application affine), $\phi(\cdot,b) + \phi(a,\cdot)$ en développant, 0 puisque $\|x\|^a$ est un $o(x)$, $H \mapsto A^2H + AHA + HA^2$ (le reste est un $O(H^2)$ puisque la norme est sous-multiplicative).

Exercice 6. 1. Ce n'est vrai que pour $E \neq \{0\}$. Par l'absurde, $\|tx\| = u(tx) + o(tx)$ donne par homogénéité $\|x\| = u(x) + \frac{1}{t}o(tx)$. En faisant tendre t vers 0, il vient $\|x\| = u(x)$, et u est alors linéaire, positive, donc nulle.

2,3. En développant le carré de la norme avec le produit scalaire, on obtient $2\langle a|\cdot\rangle$, $2\langle a|\cdot\rangle$ ce qui permet d'obtenir la différentielle en $a \neq 0$ de la norme : $\frac{\langle a|\cdot\rangle}{\|a\|}$. En effet, $d(\sqrt{f})_a : h \mapsto \frac{1}{2\sqrt{f(a)}}df_a h$, on compose donc avec la règle de la chaîne.

Exercice 7. L'idée est de se servir des dérivées partielles. Les fonctions coordonnées sont différentiables comme polynômes, donc det également. Puis on développe par rapport ? une ligne ou une colonne, ce qui donne la dérivée partielle $\frac{\partial \det}{\partial(i_0,j_0)} = com(A)_{i_0,j_0}$. On trouve alors $d(\det)_A(H) = Tr({}^t com(A)H)$.

Exercice 8. Le déterminant est de classe C^1 comme polynôme et ne s'annule pas. La comatrice est de classe C^1 car ses coefficients sont des polynômes. L'inverse $A^{-1} = \frac{{}^t com(A)}{\det(A)}$ est donc de classe C^1. Pour la différentielle, on écrit $(A+H)^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(I + HA^{-1})^{-1} - I)$ et on se ramène ainsi ? la différentielle en I. Puis on sait que pour $\|H\| < 1$, $(I+A)$ est inversible d'inverse la série géométrique... On obtient finalement, le reste étant factorisable par $O(H^2)$, une différentielle $-A^{-1}HA^{-1}$. On retrouve la dérivée $-\frac{1}{x^2}$...

Exercice 9. On connaît des conditions simples pour avoir $\nabla g = 0$, on s'y ramène donc. On veut $\nabla f_{x_0} = a$ pour a fixé et pour un certain x_0, soit $\nabla g_{x_0} = 0$ avec $g(x) = f(x) - \langle a|x\rangle$, car la différentielle de $\langle a|\cdot\rangle$ est $\langle a|\cdot\rangle$, donc son gradient est a. Il suffit donc de montrer que g admet un extremum : c'est immédiat car $\frac{g(x)}{\|x\|}$ tend vers l'infini en l'inifni, on peut donc se ramener ? un compact et exploiter la continuité.

Exercice 10. 1. On vérifie que $\phi : t \mapsto f(a+tu)$ est convexe comme f. Réciproquement, avec $a = x$ et $u = y - x$, on a $\phi(0\lambda + 1(1-\lambda) \leq \lambda\phi(0) + (1-\lambda)\phi(1)$.

2. On a $\phi'(t) = \langle \nabla_{a+t(b-a)}|b-a\rangle = f_{a+t(b-a)}(b-a)$, et on sait que $\phi(1) - \phi(0) \geq \phi'(0)$ (les cordes sont croissantes), ce qui est le résultat voulu.

3. Les points critiques de f annulent ∇f et sont donc des minima globaux !

Exercice 11. 1. La longueur est l'intégrale de la vitesse. Le carré de celle-ci vaut respectivement $x'^2+y'^2$, $1+y'^2$ et $r^2+r'^2$. $6a$ pour l'astroïde. Points stationnaires : $t \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$. On limite l'intervalle ? $[0, \frac{pi}{2}]$ par symétries et périodicité. On calcule la vitesse, puis $T = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$. Cela donne un relèvement de $\pi - t$, on en déduit $C = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{-2}{3a\sin 2t}$. La développée des le lieu des $I = M + RN$, on connait tout.

2. C'est la longueur ? partir d'une origine, elle reparamètre la courbe en normale. $\frac{dT}{ds} = CN$ et $\frac{dN}{ds} = -CT$. La courbure est définie par ces relations, puis $M' = vT$ donc $M'' = v'T + Cv^2N$, donc $c = Det(M', M'')/v^3$. Les points d'inflexion s'obtiennent lorsque $Det(M', M'')$ s'annule en changeant de signe. On dérive, la vitesse ne s'annule qu'en

$t = 1$. La tangente est de pente $\frac{y'}{x'}$ et tend vers $\frac{4}{3}$ en 1. $p = 2$, $q = 3$ donc on a une rebroussement de première espèce. On dresse le tableau de variation, on a des branches infinies en les infinis et en 0. En l'infini, $\frac{y}{x}$ tend vers 1 et $y - 1x$ tend vers 0 : asymptote oblique $y = x$; en 0 on a une branche parabolique Oy. Puisque $y - '\frac{x}{2})^2$ tend vers 0, on a une parabole asymptote.

3. On définit p et q comme les premiers tels que $(M^{(p)}, M^{(q)})$ soit une base du plan. Dans cette base, le premier donne la tangente, puis le signe donne le type de point grâce au développement $M = M^{(p)}(t - t_0)^p/p! + M^{(q)}(t - t_0)^q/q!$. Plus simple encore en polaire : il suffit de regarder le signe de r autour d'un θ_0 annulateur (ce sont les seuls points singuliers, car $(ru)' = r'u + ru' = r'u + rv$). Pour le tracé, on réduit par périodicité puis demi périodicité puis parité. On obtient une « rosace ».

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Méthode classique et variation de la constante : $(x^2+k)e^{-x^2}$. Idem pour la seconde, attention à la condition initiale et à la forme trompeuse : $\frac{2}{\sqrt{e}}e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}-1$.

Exercice 2. On interpète comme une EDL. g est solution de $y'+y=f$ avec f tendant vers 0. On sait expliciter de telles solutions : ce sont les $Ce^{-x}+e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$. f est inférieure à ε pour $x \geqslant A$, donc en découpant l'intégrale en A on obtient la convergence vers 0. La fonction $g-l$ est alors solution de $y'+y=g'+g-l$ qui tend vers 0, ce qui donne le résultat.

Exercice 3. La norme nous intéresse, donc on regarde naturellement $({}^tXX)' ={}^t X({}^tA+A)X$. Si A est antisymétrique, la norme est donc constante. Si cette dérivée est nulle, alors ${}^tA+A$ est de seule valeur propre 0 (car $\langle AX, X\rangle$ est toujours nul), or il est symétrique donc diagonalisable. Il est donc nul, *i.e.* A est antisymétrique.

Exercice 4. La première se résoud classique avec une variation des constantes : $W = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix}$ d'inverse sa transposée (orthogonale), donc $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = W^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \tan x \end{pmatrix}$. On obtient alors en intégrant $\lambda = \sin x - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + k$ et $\mu = -\cos x + k'$.

Pour la seconde, on recherche une solutions particulière développable en série entière. On trouve des coefficients tous égaux et une solution $\frac{1}{1-x}$. On pense alors à la méthode de Liouville : si l'on dispose d'une solution particulière f non nulle de l'équation homogène, on peut ramener la résolutino d'une EDL *d'ordre 2* à des quadratures en posant $y=fz$. L'équation devient $xz''+z'=0$, d'où $z=\ln$ et $y=\frac{\ln x}{1-x}$. On a notre système fondamental de solutions.

Exercice 5. 1. La fonction $x \mapsto \sum \det(x_1,\ldots,ux_i,\ldots,x_n)$ est n-linéaire alternée, donc est colinéaire au déterminant. On obtient la constante avec la base canonique, ce qui donne la trace.

2. On dérive : $W' = \sum |X_1,\ldots,X_i',\ldots,X_n| = \sum |X_1,\ldots,AX_i,\ldots,X_n| = Tr(A)W$ par le lemme. =

Exercice 6.

1. S'il y a égalité, alors $y(t)$ et $y(t+T)$ sont solutions du même problème de Cauchy, les coefficients étant périodiques.

2. La solution générale est $\left(y_0+\int_0^t be^{-\alpha}\right)e^{\alpha}$. On développe l'équivalence $y(0)=y(T)$: si $e^{\alpha(T)}$ est nulle, et alors soit toutes les solutions conviennent soit aucune ; sinon on a une unique solution.

Exercice 7. 1. On réécrit l'inégalité sous la forme $\frac{u(t)v(t)}{K+\int_a^t uv} \leq v(t)$. Si $K>0$, alors le dénominateur reste strictement positif : on reconnaît une dérivée logarithmique. On obtient le résultat en intégrant. Si K est nul, on fait de même avec tout $\varepsilon>0$, et on obtient que u est majorée par $\varepsilon e^{\int v}$, et est donc nulle.

2. Sur tout segment $\|Y(t)-Z(t)\| \leqslant \int_{t_0}^t \|A\|\cdot\|Y-Z\|$ et $\|A\|$ est continue et positive. Le lemme de Gronwall donne donc $Y=Z$ *sur J*. Une suite exhaustive de segments permet alors de conclure en recollant les Y_n obtenus.

Exercice 8. 1. $Y=Y_0+\int_{t_0}^t(AY+B)$, on introduit donc la fonctionnelle F correspondante et $Y_{n+1}=F(Y_n)$, et on cherche à trouver un point fixe, qui sera alors solution. Le théorème de Picard est évidemment une solution...

2. On a posé $\alpha = \sup\|A\|$ sur $[t_0, t_0+l]$, etc. Puis c'est immédiat en majorant par l'intégrale du majorant de l'hypothèse de récurrence.

3. On majore donc $\|Y_{n+1}-Y_n\|$ par le terme général (exponentiel) d'une série convergente, donc il y a CVN, sonc (Y_n) CVU, et on peut intégrer terme à terme la somme pour prouver que la limite Y est toujours solution de l'équation différentielle.

Exercice 9. On sait que $X_{n+1}(t)=X(0)+\int_0^t Ax_n$, donc c'est immédiat par récurrence !

Exercice 10. On sait prouver la dérivabilité d'une intégrale lorsque seules les bornes varient, ou seul l'intégrande : un changement de variable affine (x étant fixé) permet de se ramener à ce dernier cas. Puis, l'idée est de considérer la fonction plus générale de trois variables $(x,y,z)\mapsto\int_y^z f(x,t)dt$ qui est C^1 (même raison), et on sait dériver par rapport aux bornes (depuis la terminale) et par rapport à l'intégrande (depuis le cours sur les intégrales à paramètres). On obtient alors, par composition :

$$F' : x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt - \alpha'(x)f(\alpha(x),x) + \beta'(x)f(\beta(x),x)$$

Exercice 11. Tout est facile si on a compris la bonne définition de la différentielle : $f(a+h)-f(a)=df_a(h)+o(h)$. On obtient dans l'ordre : l'application linéaire (associée à l'application affine), $\phi(\cdot,b)+\phi(a,\cdot)$ en développant, 0 puisque $\|x\|^a$ est un $o(x)$, $H\mapsto A^2H+AHA+HA^2$ (le reste est un $O(H^2)$ puisque la norme est sous-multiplicative).

Exercice 12. 1. Ce n'est vrai que pour $E\neq\{0\}$. Par l'absurde, $\|tx\|=u(tx)+o(tx)$ donne par homogénéité $\|x\|=u(x)+\frac{1}{t}o(tx)$. En faisant tendre t vers 0, il vient $\|x\|=u(x)$, et u est alors linéaire, positive, donc nulle.

2,3. En développant le carré de la norme avec le produit scalaire, on obtient $2\langle a|\cdot\rangle$, $2\langle a|\cdot\rangle$ ce qui permet d'obtenir la différentielle en $a\neq 0$ de la norme : $\frac{\langle a|\cdot\rangle}{\|a\|}$. En effet, $d(\sqrt{f})_a : h\mapsto\frac{1}{2\sqrt{f(a)}}df_a h$, on compose donc avec la règle de la chaîne.

Exercice 13. L'idée est de se servir des dérivées partielles. Les fonctions coordonnées sont différentiables comme polynômes, donc det également. Puis on développe par rapport à une ligne ou une colonne, ce qui donne la dérivée partielle $\frac{\partial\det}{\partial(i_0,j_0)}=com(A)_{i_0,j_0}$. On trouve alors $d(\det)_A(H)=Tr({}^tcom(A)H)$.

Exercice 14. Le déterminant est de classe C^1 comme polynôme et ne s'annule pas. La comatrice est de classe C^1 car ses coefficients sont des polynômes. L'inverse $A^{-1}=\frac{{}^tcom(A)}{\det(A)}$ est donc de classe C^1. Pour la différentielle, on écrit $(A+H)^{-1}-A^{-1}=A^{-1}(I+HA^{-1})^{-1}-I)$ et on se ramène ainsi à la différentielle en I. Puis on sait que pour $\|H\|<1$, $(I+A)$ est inversible d'inverse la série géométrique... On obtient finalement, le reste étant factorisable par $O(H^2)$, une différentielle $-A^{-1}HA^{-1}$. On retrouve la dérivée $-\frac{1}{x^2}$...

Exercice 15. On connaît des conditions simples pour avoir $\nabla g=0$, on s'y ramène donc. On veut $\nabla f_{x_0}=a$ pour a fixé et pour un certain x_0, soit $\nabla g_{x_0}=0$ avec $g(x)=f(x)-\langle a|x\rangle$, car la différentielle de $\langle a|\cdot\rangle$ est $\langle a|\cdot\rangle$, donc son gradient est a. Il suffit donc de montrer que g admet un extremum : c'est immédiat car $\frac{g(x)}{\|x\|}$ tend vers l'infini en l'inifni, on peut donc se ramener à un compact et exploiter la continuité.

Exercice 16. 1. On vérifie que $\phi:t\mapsto f(a+tu)$ est convexe comme f. Réciproquement, avec $a=x$ et $u=y-x$, on a $\phi(0\lambda+1(1-\lambda)\leq\lambda\phi(0)+(1-\lambda)\phi(1)$.

2. On a $\phi'(t)=\langle\nabla_{a+t(b-a)}|b-a\rangle=f_{a+t(b-a)}(b-a)$, et on sait que $\phi(1)-\phi(0)\geq\phi'(0)$ (les cordes sont croissantes), ce qui est le résultat voulu.

3. Les points critiques de f annulent ∇f et sont donc des minima globaux !

Exercice 17. Méthode classique, on obtient les translatées de $\tan$, de $-\log$, et $2\text{Arctan}(Ke^x)+k\pi$.

Exercice 18. La théorie de CAUCHY s'applique et donne l'existence et l'unicité d'une solution maximale. On multiplie par y' et on intègre en $\frac{1}{2}y'^2=2\sin^2\frac{y}{2}$. On fait un changement de fonction $z=\frac{y}{2}$ et on obtient $z'^2=\sin^{\check{s}z}$. Les seules solutions s'annulant sont les constantes $2k\pi$ (car solutions du même problème de CAUCHY), et elles ne vérifient pas $y(0)=\frac{\pi}{2}$. Puisque z' et $\sin z$ ne s'annulent pas et sont strcitement positives en 0, elles sont strictement positives partout, d'où $z'=\sin z$. Intégrer $\frac{1}{\sin}=\frac{\sin}{1-\cos^2}$ se fait par changement de variable et on retrouve $-\text{argth}(\cos)$. Puis $\text{argth}(\cos z)=C-t$, et on obtient C avec les CI.

Exercice 19. On sait qu'un intervalle maximal est ouvert, soit b une extrémité et $a\in int(I)$. On sait exprimer y à partir de sa dérivée : $y(x)=y(a)+\int_a^x f(t,y(t))dt$. La fonction f est bornée, donc est intégrable sur les bornés, donc son intégrale sur $[a,b[$ converge, *i.e.* y admet une limite en b, et on peut prolonger y en b, prolongement qui est toujours solution de l'équation différentielle, ce qui est absurde compte tenu de la maximalité.

Exercice 20. 1. Il suffit d'intégrer.

2. $\|F(\phi)(x)-y_0\|\leq Ma$ où $M=\sup\|f(x,y)\|$ sur $[x_0\pm a]\times\overline{B}(y_0,r)$, qui existe car f est continue sur ce compact. On impose donc $Ma\leq r$ (on peut diminuer a).

3. La lipschitziannité de f donne $\|F\phi-F\psi\|\leq ka\|\phi-\psi\|$, donc on impose $ka<1$ (on peut diminuer a).

4. Picard s'applique et donne l'existence et l'unicité d'un point fixe (donc d'une solution). Il se prouver facilement : la suite des itérés converge vers un point fixe par convergence absolue de la série des diffénces successives ; elle est unique par contractance.

!!!!!!

SEMAINE 5

Programme. Étude des courbes paramétrées planes régulières ; primitives usuelles et équations différentielles du premier ordre.

Exercice 1. Courbes paramétrées simples
Étudier en détails les courbes classiques suivantes, en réduisant l'étude sur un domaine aussi petit que possible :

- ⋆ (Astroïde) $\left(a\cos^3(t), a\sin^3(t)\right)$, $a > 0$
- ⋆ (Strophoïde) $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$
- ⋆ (Lemniscate de Bernouilli) $\left(\dfrac{t}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$
- ⋆ (Folium des Descartes) $\left(\dfrac{t}{1+t^3}, \dfrac{t^2}{1+t^3}\right)$
- ⋆ (Deltoïde) $(2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$
- ⋆ (Courbe de Lissajous) $(\sin 2t, \sin 3t)$

Exercice 2. Paramétrisation de problèmes de lieux géométriques
1. Un point M parcours la parabole $(6t^2, 2t)$. La tangente à la parabole en M coupe l'axe des abscisses en P, et la normale à la parabole en M coupe l'axe des ordonnées en Q. On note $I(t)$ le milieu du segment $[PQ]_t$. Déterminer le lieu des tels points I lorsque M parcours la parabole.

2. Considérons un cercle C de centre O, un point A distingué de C, et un point M parcourant C. Déterminer le lieux des orthocentres des triangles OAM lorsque M parcours C.

Exercice 3. Calculs de primitives
Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- ⋆ $\frac{1}{1+e^x}$
- ⋆ $\cos^3(2x)$
- ⋆ $Arccos(x)$
- ⋆ $(2x^2 + 7x + 3)e^x$

Exercice 4. Équations différentielles d'ordre 1
Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles à préciser :

- ⋆ (classiques) $y' + 2y = x^2$ et $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$
- ⋆ (singularités) $xy' - \alpha y = 0$ et $(e^x - 1)y' + e^x y = 1 + e^x$
- ⋆ (équation fonctionnelle) Trouver les f telles que $f' + f = f(0) + f(1)$
- ⋆ (équation fonctionnelle) Trouver les f telles que $f(s+t) = f(s)f(t)$
- ⋆ (changement de fonction) Résoudre $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ $(z = y')$ et $xy'' - (1+x)y' + y = 1$ $(z = y' - y)$

SEMAINE 4

Programme. *Bases de l'algèbre linéaire : extensions linéaires, liberté et liaison, sous-espaces vectoriels, endomorphismes, endomorphismes remarquables, théorie de la dimension, hyperplans, formes linéaires, calcul matriciel, calcul de déterminants, changements de base, matrices équivalentes et semblables.*

Exercice 1. Lemme de Schur

1. Prouver qu'un endomorphisme tel que x et $f(x)$ sont toujours colinéaires est réduit aux homothéties.
2. En déduire que le centre de $L(E)$ est une homothétie.

Exercice 2. Réunions de sous-espaces vectoriels

1. Montrer qu'une réunion de sous-espaces stricts n'est jamais un sous-espace vectoriel.
2. Prouver que si une famille $(F_i)_i$ est telle qu'un $F_i \cup F_j$ est toujours inclus dans un F_k, alors la réunion $\bigcup_i F_i$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Puissances de matrices

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & a \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Calculs de déterminants

Calculer les déterminants ou les polynômes caractéristiques des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{i,j} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Groupe spécial linéaire

Montrer que $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe et que tout matrice inversible s'écrit comme produit d'une homothétie et d'une matrice du groupe spécial linéaire.

Montrer que $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe.

Exercice 6. Matrices à diagonales dominantes

Montrer qu'une matrice à diagonale dominante, *i.e.* vérifiant $\forall i,\ \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$, est inversible.

Exercice 7. Matrices semblables

Montrer que deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Équations fonctionnelles

Trouver les endomorphismes f tels que :

1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA)$.
2. $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{R}),\ f(ABC) = f(BCA)$.

Semaine 7

Programme. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constant : définitions, stabilité des solutions, principe de superposition, recherche de solutions dans des cas particuliers. Fonctions à variables réelles : lipschitzianité, uniforme continuité, théorème de Heine, théorème de Rolle, accroissements finis.

Exercice 1. Résolution d'équations différentielles.

⋆ $y'' + 2y' + 2y = 2x$
⋆ $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{ch}(x)$

Exercice 2. Propriété des solutions de $y'' + p(x)y = 0$ pour $p > 0$.
On veut prouver que de telles solutions s'annulent. Supposons par l'absurde qu'une solution f et $y'' + p(x)y = 0$ ne s'annule pas.
1. Prouver que f est de signe constant. En déuire le signe de f''.
2. Prouver que la courbe de f est en dessous de ses tangentes.
3. En déduire que f' est nulle, et conclure.

Exercice 3. Théorème de Darboux.
1. Prouver qu'une fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Donner un exemple de fonction non continue vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 4. Exemples et contre-exemples.
Que dire de l'uniforme continuité et de la lipschitzianité des fonctions racine, logarithme et $x \mapsto x \ln x$?

Exercice 5. Une fonction définie par borne supérieure.
Pour f et g continues sur $[0, 1]$, on définit $\phi : t \mapsto \sup_{[0,1]}(f + tg)$. Prouver que ϕ est bien définie et qu'elle est lipschitzienne.

Exercice 6. Conditions d'uniforme continuité.
1. Prouver qu'une fonction périodique et continue est uniformément continue et bornée.
2. Prouver qu'une fonction continue et convergeant en l'infini est uniforément continue et bornée.

Exercice 7. Montrer que les compositions de fonctions uniformément continues ou bornées sont bornées.

Exercice 8. Contrôle des graphes des fonctions uniformément continues
Prouver qu'une fonction uniformément continue est inférieure à une fonction de la forme $a|x| + b$.

Exercice 9. Prolongement des fonctions uniformément continues.
1. Prouver que les fonctions uniformément continues conservent les suites de Cauchy.
2. En déduire qu'une fonction uniformément continue sur un intervalle se prolonge toujours aux bords.

Exercice 10. Lemme de Croft
Prouver qu'une fonction uniformément continue f telle que $f(nx) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout x, tend vers 0 en l'inifni.

Donner un exemple de fonction qui tend vers 0 selon toute suite arithmétique mais qui ne tend pas vers 0.

SEMAINE 8

Programme. *Construction de l'intégrale de* RIEMANN *sur un segment, propriétés élémentaires de l'intégration, inégalités de la moyenne et de* CAUCHY – SCHWARZ*, théorème fondamental de l'analyse, changement de variable, étude d'intégrales à bornes variables.*

Exercice 1. Calculs élémentaires d'intégrales.

$$\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \qquad \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \qquad \int \cos^3 \qquad \int e^t\cos(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \qquad \int t\arctan(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 2. Calculs un peu moins élémentaires d'intégrales.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+\sin} \quad ; \quad \int \frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)}dx$$

Exercice 3. Relations intégrales.
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et non nulle vérifiant $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Prouver que $f = 1$.

Exercice 4. Un petit théorème de point fixe.
Montrer qu'une fonction continue sur $[0,1]$ et d'intégrale $\frac{1}{2}$ admet un point fixe.

Exercice 5. Fonctions positives et continues par morceaux d'intégrale nulle.
Montrer qu'une fonction positive, continue par morceaux et d'intégrale nulle est nulle sauf en un nombre fini de points.

Exercice 6. Théorème des moments.
Soit f continue sur $[0,1]$ et vérifiant $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ pour tout entier n.
1. Pour $0 < \alpha < \beta < 1$, trouver un polynôme supérieur à 1 sur $[\alpha, \beta]$, et compris entre 0 et 1 sur$[0,\alpha] \cup [\beta, 1]$.
2. Prouver que pour tout n, $\int_0^1 P^n f = 0$, et en déduire que f est nulle.

Exercice 7. Lemme de Riemann – Lebesgue.
1. Pour f de classe C^1 sur $[a,b]$, prouver que $\int_a^b f(t)\sin(nt)dt \to 0$.
2. Prouver que ce résultat est vrai pour des fonctions en escalier.
3. En déduire qu'il en va de même des fonctions continues par morceaux.

Exercice 8. Lemme de Gronwall.
Soient f et g continues sur $[0,+\infty[$ et positives. On suppose que

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq C + \int_0^x fg$$

1. Montrer que si $C > 0$, alors pour tout $x \geq 0$ on a$f(x) \leq C\exp\left(\int_0^x g\right)$.
2. Que dire si $C = 0$?

Exercice 9. Théorème des noyaux réguliers.
On appelle une suite de noyaux réguliers une suite de fonctions $(\rho_n)_n$, positives, continues, nulles hors de $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. On définit la convolée de deux fonctions f et g par

$$f \star g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy$$

Montrer que $f \star \rho_n$ converge vers f pour toute fonction f continue.

Exercice 10. Sommes de Riemann.
Pour une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$, une subdivision $\sigma = (a_i)_i$ adaptée, et des points $x_i \in]a_i, a_{i+1}[$, on note $\mu(\sigma) = \sup|a_i - a_{i+1}|$ le pas de la subdivision et on définit la somme de Riemann associée par

$$R(f,(a_i)_i,(x_i)_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(x_i)$$

1. Montrer que si f est lipschitzienne, alors les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f lorsque $\mu \to 0$.
2. Montrer qu'il en va de même pour f continue.

Exercice 11. Irrationalité de π.

1. Pour $a, b \in \mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\frac{a}{b}$ des valeurs entières.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin t \,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \to 0$.
3. En supposant $\pi = a/b$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$ et conclure.

Exercice 12. Intégrales de Wallis & Formule de Stirling

Pour tout entier naturel n, on note $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n$ la n-ième intégrale de Wallis.

1. Calculer explicitement I_n en établissant une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. Montrer que $(I_n)_n$ est décroissante, strictement positive, et que $I_{n+1} \sim I_n$.
3. Trouver un équivalent de I_n en considérant le produit nI_nI_{n+1}.

SEMAINE 10

Programme. Structures algébriques élémentaires : monoïdes, groupes, sous-groupe, morphismes. Définitions et propriétés élémentaires.

Exercice 1. Études des propriétés élémentaires de lois de composition.
Étudier les propriétés algébriques intéressantes des lois suivantes :
⋆ $a \star b = \ln\left(e^a + e^b\right)$ sur $\mathbb{R}$
⋆ $a \star b = a + b - ab$ sur $[0,1]$

Exercice 2. Trivialités sur les nilpotents.
Un idempotent d'un monoïde est un élément x tel que $x \star x = x$.
1. Prouver que le produit de deux idempotent qui commutent est un idempotent.
2. Prouver que l'inverse d'un nilpotent inversible est un nilpotent.

Exercice 3. Montrer qu'une loi de composition $\star$ interne et associative sur un ensemble fini est unitaire si, et seulement si, elle possède un élément régulier.

Exercice 4. Montrer qu'un monoïde fini dans lequel tout élément est régulier est un groupe.

Exercice 5. Montrer qu'il existe toujours un idempotent dans un magma associatif fini.

Exercice 6. Montrer que tout monoïde dont tous les éléments sont involutifs est un groupe abélien.

Exercice 7. Addition des vitesses en théorie de la relativité.
Montrer que $x \star y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$ définit une loi de groupe abélien sur $]-c, c[$.

Exercice 8. Sous-groupes classiques.
Montrer que les ensembles suivant sont des sous-groupes d'un certain groupe :
⋆ $a + \omega\mathbb{Z}$
⋆ $\{\sigma \in \mathfrak{S} \mid \sigma(x) = x\}$
⋆ $Z(G)$

Exercice 9. Réunion de deux sous-groupes.
Prouver que la réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe si, et seulement si, l'un est inclus dans l'autre.

Exercice 10. Partie finie stable
Prouver qu'une partie finie d'un groupe et stable par la loi est un sous-groupe.

Exercice 11. Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}$.
1. Prouver que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$.
2. Prouver que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont les $x\mathbb{Z}$ ou sont denses.

Exercice 12. Groupe des automorphismes d'un magma.
Montrer que l'ensemble des automorphismes d'un magma est un groupe pour la composition.

Exercice 13. Groupes non isomorphes.
Prouver que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(Q^\star, \times)$ ne sont pas isomorphes. De même pour $\mathbb{R}^\star$ et $\mathbb{C}^\star$.

Exercice 14. Loi de groupe *via* un isomorphisme.
Prouver que $x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$ est une loi de groupe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Un sous-groupe trop grand.
Prouver que si H est un sous-groupe de G de cardinal au moins moitié, alors ce n'est autre que G.

Exercice 16. Théorème de Lagrange.
1. Prouver le théorème de LAGRANGE : l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.
2. En déduire que l'ordre d'un élément [1] divise l'ordre du groupe.
3. En déduire que tout groupe cyclique d'ordre premier est simple [2].
4. En déduire le petit théorème de FERMAT : $a^{p-1} \equiv a \ (mod\ p)$.

1. L'ordre d'un élément x le plus petit entier positif strictement tel que $x^p = e$.
2. Un groupe est dit simple lorsqu'il n'a pas de sous-groupe non trivial

SEMAINE 13

Programme. Arithmétique dans $[X]$. Rappels sur les polynômes, relations entre coefficients et racines ; PPCM et PGCD ; théorèmes de BEZOUT et de GAUSS.

Exercice 1. Divisibilité d'itérés.
Prouver que pour tout polynôme P, $P^{\circ n} - X$ est divisible par $P - X$.

Exercice 2. Divisibilités.
1. Prouver que $(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X^{pq} - 1)(X - 1)$ pour p et q premiers entre eux.
2. Prouver que $X^2 \mid (X + 1)^n - nX - 1$.

Exercice 3. Sommes de zéros.
Montrer que les sommes des zéros des dérivées successives sont en progression arithmétique jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Exercice 4. Division euclidienne explicite.
1. On pose $A = X^2 + 2X \cos\theta + 1$ et $B_n = X. \sin\theta + \sin(n - 1)\theta$. Prouver que AB_n et trouver le quotient.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$?
3. Donner le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$ en fonction du reste de la division euclidienne de k par n.

Exercice 5. Division euclidienne et formule de Taylor.
Donner la division euclidienne de P par $(X - a)$.

Exercice 6. Équations fonctionnelles polynomiales.
1. Résoudre $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

Exercice 7. Équation impossible.
On suppose que deux polynômes vérifient $P^n - Q^m = 1$ où $n, m \geq 2$. Montrer qu'ils sont constants.

Exercice 8. Caractérisation des polynômes non premiers entre eux.
Montrer que deux polynômes non nuls P et Q ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux polynômes non nuls U et V tels que $deg(U) < deg(B)$ et $deg(V) < deg(A)$ et vérifiant $AU + BV = 0$.

Exercice 9. Relations entre coefficients et racines & fonctions symétriques
1. Calculer la somme des inverses des carrés des zéros de $x^3 + px + q$.
2. Calculer $\sum(x_i + x_{i+1})^3$ où les x_i sont les zéros de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ et les indices sont pris modulo 3.

SEMAINE 14

Programme. Fraction rationnelles. Opérations ; pôles et parties polaires ; décomposition en éléments simples. Sommes de RIEMANN. Formules de TAYLOR.

Exercice 1. Décompositions en éléments simples.

Décomposer en élément simple les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \qquad \frac{1}{X(X-1)^2} \qquad \frac{1}{X^2+X+1} \qquad \frac{X^{n-1}}{X^n-1}$$

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F de carré X.

Exercice 3. Parité des fractions rationnelles.

Montrer qu'une fraction rationnelle est paire si, et seulement si, son numérateur et son dénominateur – en représentation irréductible – sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

Exercice 4. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

SEMAINE 12

Programme. Étude de $[X]$. Degré, valuation, opérations et structure ; fonctions polynomiales et zéros ; division euclidienne et divisibilité ; irréductibilité et multiplicité d'un zéro ; dérivées et formules de TAYLOR .

Exercice 1. Équation fonctionnelle de polynômes
1. Trouver les P tels que $P \circ P = P$.
2. Résoudre $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 2. Unicité de la décomposition d'un nombre en somme de dyadiques.
1. Développer le polynôme $P_n = (1+X)(1+X^2)\cdots(1+X^{2^n})$.
2. En déduire que tout entier se décompose uniquement en somme de puissances de 2.

Exercice 3. Divisions euclidiennes remarquables.
1. Expliciter la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Expliciter la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 4. Racines rationnelles.
1. Montrer qu'un polynôme à coefficients entiers, avec les coefficients dominant et constant non nuls, admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ seulement si $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. $X^3 + 3X - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 5. Irrationalité d'un cosinus.
Prouver que $\cos\frac{\pi}{9}$ est irrationnel.

Exercice 6. Dérivation d'un polynôme scindé.
1. Montrer que la dérivée d'un polynôme scindé est scindée.
2. Montrer que la dérivée d'un polynôme simplement scindé est simplement scindée.
3. Prouver qu'un polynôme simplement scindé ne peut avoir deux coefficient successifs nuls.

Exercice 7. Polynômes positifs.
Prouver les polynômes réels positifs sont les sommes de deux carrés.

Exercice 8. Polynômes de Tchebychef
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta)) \cos n\theta$. En déterminer une relation de récurrence, le degré, le coefficient dominant et les racines.

Exercice 9. Polynômes et racines
Montrer que les polynômes suivants n'ont que des racines simples dans $\mathbb{C}$:
- $\star$ $P_n = \sum \frac{X^k}{k!}$
- $\star$ $P_n = X^n - X + 1$

Exercice 10. Théorème de Gauss – Lucas
Montrer que les racines de la dérivée d'un polynôme P sont dans l'enveloppe convexe des racines de P'.

Exercice 11. Polynômes de Hilbert
On pose $H_0 = 1$ et $H_n = \frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)$. Montrer que ces polynômes envoient les entiers sur des entiers, en déduire que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$, et prouver l'équivalence des trois propositions suivantes pour tout polynôme réel P de degré au plus n :
- $\star$ $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$
- $\star$ $\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ P(k) \in \mathbb{Z}$
- $\star$ P est combinaison linéaire des polynômes de HILBERT d'ordre au plus n.

SEMAINE 16

Programme. Généralités sur les espaces vectoriels et les applications linéaires : définitions, opérations sur les sous-espaces, dépendance linéaire, applications linéaire.

Exercice 1. Complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition produit : $(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$ et de la multiplication externe par les complexes définie par : $(a + i.b) \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = (a \cdot \vec{x} - b \cdot \vec{y}, a \cdot \vec{y} + b \cdot \vec{x})$. Montrer que cela définit une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Sous-espaces vectoriels... ou non ?
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel indiqué ?

⋆ $\{x \leq y\} \subseteq \mathbb{R}^2$
⋆ $\{(u_n)_n \text{ convergente}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
⋆ $\{(u_n)_n \text{ périodique}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
⋆ $\{(u_n)_n \mid u_{n+2} = 7u_{n+1} - 2u_n\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
⋆ $\{f(0) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
⋆ $\{f - g \mid f, g \text{ croissantes}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 3. Familles libres
Prouver la liberté ou la liaison des familles suivantes :

$$(x \mapsto |x-a|)_{a \in \mathbb{R}} \quad ; \quad (x \mapsto \chi_{[a,+\infty[})_{a \in \mathbb{R}} \quad ; \quad (x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}} \quad ; \quad (x \mapsto \sin(x^a))_{a \in \mathbb{R}} \quad ; \quad (\ln(p))_{p \in \mathbb{P}}$$

Exercice 4. Réunions de sous-espaces vectoriels

1. Montrer qu'une réunion de sous-espaces stricts n'est jamais un sous-espace vectoriel.
2. Prouver que si une famille $(F_i)_i$ est telle qu'un $F_i \cup F_j$ est toujours inclus dans un F_k, alors la réunion $\bigcup_i F_i$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. Espaces supplémentaires
Prouver que les espaces suivants sont supplémentaires :

⋆ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ F = \{f \mid \forall i,\ f(a_i) = 0\},\ G = \mathbb{R}_n[X]$
⋆ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ F = P(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ G = I(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
⋆ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ F = \{f \mid f(0) = f'(0) = 0\},\ G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\})$
⋆ $E = \mathcal{C}([0, \pi]),\ \{f \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\},\ G = \text{Vect}(\sin, \cos)$
⋆

Exercice 6. Endomorphismes, images et noyaux
Prouver la linéarité des applications suivantes, trouver leur noyau, leur image, et éventuellement leur réciproque :
1. $P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P - XP'$
2. $P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[X]$
3. $f \in C^{\infty}_T \longmapsto f' \in C^{\infty}_T$
4. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + y, x - y)$
5. $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n)$

Exercice 7. Lemme de Schur
1. Prouver qu'un endomorphisme tel que x et $f(x)$ sont toujours colinéaires est une homothétie.
2. En déduire que le centre de $L(E)$ est une homothétie.

Exercice 8. Endomorphismes nilpotents
Pour un endomorphisme f nilpotent, prouver que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre. Prouver qu'un tel endormorphisme est tel que $id - f$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 9. Noyaux et images itérés d'un endomorphisme f
1. Prouver que la suite $(Ker(f^k))_k$ est croissante et que la suite $(Im(f^k))_k$ est décroissante.
2. Prouver que ces monotonies sont strictes jusqu'à un certain rang p, à partir duquel les suites stationnent.
3. Montrer qu'alors $Im(f^p) \oplus Ker(f^p) = E$.

*Première semaine **Programme.** Entiers naturels (propriétés et principe de réucrrence), nombre réels (bornes supérieures et inférieures, intervalles). Généralités sur les nombres complexes, résolution des polynômes du second degré, racines n-ièmes, exponentielles de complexes. Géométrie plane élémentaire, produit scalaire, colinéairité et déterminants, ensembles particuliers (droites, cercles, lignes de niveau, intersections, équations, etc.).

ENTIERS NATURELS ET PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Exercice 1. Prouver les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 2. Prouver que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n} C_i^p = C_{n+1}^{p+1}$.

Exercice 3. Le mathématicien et juriste français Pierre de FERMAT (1601 – 1655) pensait que tous les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$ étaient premiers, après l'avoir vérifié jusqu'à $n = 4$. Leonhard EULER (1707 – 1783) met en défaut cette conjecture en exhibant une décomposition de F_5 en 1732. Cependant les nombres F_n, appelés nombres de FERMAT, ont des propriétés fort intéressantes. Prouvez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{i=0}^{n} F_i = F_{n+1} - 2$$

et en déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f : n \in \mathbb{N} \mapsto \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ est à valeurs entières.

Exercice 5. Prouver qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, multiplicative et telle que $f(2) = 2$ est nécessairement l'identité.

Nombres réels

Exercice 6. Trouver les éventuelles bornes supérieures et inférieures réelles des ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\} \qquad \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$$

Exercice 7. Pour A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Prouver les relations suivantes (et que les quantités qui y interviennent existent) :
⋆ $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$
⋆ $\inf(-A) = -\sup(A)$
⋆ $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$

Exercice 8. Prouver qu'une suite réelle croissante et majorée admet une limite.

Exercice 9. Construction des racines n-ièmes

Nombres complexes

Exercice 10. Trouver les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) + zf(-z) = 1 + z$.

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$:
⋆ $z^2 - 2z\cos(\theta) = 0,\ \theta \in \mathbb{R}$
⋆ $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$ sachant qu'il y a un zéro dans $i\mathbb{R}$
⋆ $z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$ sachant qu'il y a un zéro dans $i\mathbb{R}$ et un zéro dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Résoudre de manière générale l'équation $(z-a)^n = r(z-b)^n$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 13. Prouver l'inégalité du parallélogramme : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. En donner une interprétation géométrique. Prouver que $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ |a+b|^2 \leq (1 + [a|^2)(1 + |b|^2)$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 14. Développer $\sin(3\theta)$. Prouver plus généralement que $\cos(n\theta)$ s'exprime comme un polynôme en $\cos\theta$, appelé *polynôme de Tchebychev de première espèce*, que $\sin(n\theta)$ s'exprime comme le produit de $\sin\theta$ par un polynôme en $\cos\theta$, appelé *polynôme de Tchebychev de seconde espèce*, et que $\tan(n\theta)$ s'exprime comme une fraction rationnelle en $\tan\theta$.

Linéariser $\cos(3\theta)$. Prouver plus généralement que toutes les puissances de $\cos$ et de $\sin$ sont linéarisables.

Exercice 15. Calculer les sommes $\sum_{i=0}^{n} \cos(k\theta + k_0)$ et $\sum_{i=0}^{n} \sin(k\theta + k_0)$, puis en déduire $\sum_{i=0}^{n} \cos^3(k\theta)$.

Exercice 16. Calculer les sommes $P_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$ et $F_n(\theta) = \sum_{i=0}^{n} P_n(\theta)$.

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE DANS LE PLAN

Exercice 17. Montrer que la somme des longueurs des côtés d'un quadrilatère ayant un sommet sur chaque côté d'un carré de côté unité est comprise entre 2 et 4.

Exercice 18. Soit ABC un triangle non aplati. On note p le demi-périmètre du triangle et S son aire.

1. Prouver le théorème d'AL-KASHI : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.
2. En déduire la formule de HERON : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
3. En déduire la formule des sinus : $\frac{\hat{A}}{\sin\hat{A}} = \frac{\hat{B}}{\sin\hat{B}} = \frac{\hat{C}}{\sin\hat{C}}$.

*Semaine 3 **Programme.** Courbes de fonctions réelles d'une variable réelle, propriétés des fonctions réciproques, fonctions trigonométriques et hyperboliques.

Exercice 1. Calculs de dérivées Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes, en précisant leurs domaines de définition et de dérivabilité :

1. $x \mapsto e^{xch(a)}ch(x\ sh(a))$.

Exercice 2. Étude de fonctions Étudier les fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $x \mapsto ch(2Argth(x))$.
2. $x \mapsto sh\left(\frac{1}{2}Argch(x)\right)$.
3. $Argth\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
4. $sin(2Arctan(x))$.

Exercice 3. Résolutions d'équations Résoudre les équations suivantes :

1. $Argth(x) = Argch\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $log_2x + log_4x + log_8x + log_{16}x = \frac{25}{4}$.
3. $Arcsin(tan(x)) = x$.
4. $Arctan(x) + Arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4. Simplifications d'expressions Simplifier, lorsque c'est possible, les expressions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $\prod_k \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.
2. $\sum_k \tan(kx)\tan((k+1)x)$.

Exercice 5. Identités et relations Prouver, sur un domaine à préciser, les relations suivantes :

1. $Arccos(x) = 2Arcsin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$ et en déduire $\lim_{1^-} \frac{Arccos(x)}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 6. Équations fonctionnelles

Résoudre, en admettant dans un premier temps que les applications continues linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les homothéties :

1. $\forall x, y > 0,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x, y > 0,\ f(xy) = f(x)f(y)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = f(x)f(y)$.

SEMAINE 16

Programme. Anneaux & corps, matrices, opérations élémentaires.

Exercice 1. Anneaux finis intègres.
Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps.

Exercice 2. Élements nilpotents.
Soit x et y deux éléments d'un anneau $(A, +, \times)$.
1. Montrer que si x est nilpotent et que x et y commutent, alors xy est nilpotent.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
4. Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible. Préciser $(1 - x)^{-1}$

Exercice 3. Entiers de Gauss et corps quadratiques.
Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau multiplicatif commutatif, et déterminer $\mathbb{Z}[i]^{\times}$.
Faire de même avec $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Exercice 4. Anneaux et groupes des inversibles.
Montrer que les ensembles suivants sont des anneaux et en déterminer le groupe des inversibles :

- $\star$ $\{\frac{m}{n} \mid n \text{ impair}\}$
- $\star$ $\{\frac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 5. Matrices élémentaires et opérations élémentaires.
1. Calculer $E_{ij}E_{kl}$ pour tous i, j, k, l.
2. Gabriel : relations entre transvections et dilatations.

Exercice 6. Commutant de diagonale variée.
Trouver le commutant d'une diagonale à valeurs diagonales distinctes.

Exercice 7. Puissances d'une matrice unipotente.
Calculer les puissances successives de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Inversions de matrices.
Calculer les inverses des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_1 & = \end{array} \right.$$

Semaine 16

Programme. Généralités sur les espaces vectoriels : projecteurs et symétries, base et dimension, formule de Grassmann, base incomplète, supplémentaires.

Exercice 1. Dimension d'un espace vectoriel.
Justifier que les ensemvles suivants sont des espaces vectoriels et en trouver la dimension et une base :
⋆ $\{(ax^2+bx+c)\cos(x) \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$
⋆ $\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n, u_{n+3}=au_{n+2}+nu_{n+1}+cu_n\}$

Exercice 2. Projecteurs de même noyau.
Pour p et q deux endormorphismes, montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
⋆ $p\circ q=q$ et $q\circ p=q$
⋆ p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 3. Projecteurs qui commutent.
Montrer que la composée $p\circ q$ de deux projecteurs p et q qui commutent est un projecteur. En déterminer le noyau et l'image.

Exercice 4. Projecteurs.
Si p et q sont des projecteurs tels que Im $p\subseteq$ Ker q, montrer que $r=p+q-pq$ est un projecteur, et trouver sin image et son noyau.

Exercice 5. Un projecteur caché dans les groupes finis.
Si G est un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(E)$, notons $E^G=\{x\in E \mid \forall g\in G, gx=x\}$ l'espace invariant de G. Prouver que

$$\dim E^G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\, g$$

Exercice 6. Une caractérisation de Ker $u\oplus$ Im $u=E$.
Pour E de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$, prouver l'équivalence entre
⋆ Ker $u=$ Ker u^2
⋆ Im $u=$ Im u^2
⋆ Ker $u\oplus$ Im $u=E$
⋆ $\exists v\in\mathcal{L}(E),\ u\circ v=0$ et $u+v\in\mathbf{GL}(E)$

Exercice 7. Un corps de nombres.
On note $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mid (a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4\}$.
1. Prouver que $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$ si, et seulement si, n est un carré dans $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que K est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, en trouver une base.

SEMAINE 19

Programme. Systèmes linéaires & applications linéaires

Exercice 1. Rangs et compositions
Si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, montrer que $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

Exercice 2. Indice de nilpotence
Soit f un endomorphismes nilpotent, *i.e.* tel qu'il existe p vérifiant $f^p = 0$. Supposons p minimal et $x \notin Ker(f^{p-1})$.
1. Prouver que $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que $p \leq n$, *i.e.* que $f^n = 0$.

Exercice 3. Nilpotence locale & nilpotence globale
Montrer que si E est de dimension finie et si $\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}, f^{p_x} x = 0$, alors f est nilpotent.

Exercice 4. Trois droites & trois droites
Soit E un espace de dimension 2. Montrer qu'il existe un unique automorphisme envoyant D_i sur Δ_i pour tout i.

Exercice 5. Lemme de Schur linéaire
Prouver que tout endomorphisme tel que $(x, u(x))$ soit lié pour tout x est une homothétie.

Exercice 6. Noyau et image supplémnetaires.
Montrer que $f_{Im(f)}$ – l'endomorphisme $Im(f) \to Im(f)$ induit par f sur son image – est un automorphisme si, et seulement si, $Ker(f) \oplus Im(f) = E$.

Exercice 7. Noyaux et images itérés d'un endomorphisme f
1. Prouver que la suite $(Ker(f^k))_k$ est croissante et que la suite $(Im(f^k))_k$ est décroissante.
2. Prouver que ces monotonies sont strictes jusqu'à un certain rang p, à partir duquel les suites stationnent.
3. Montrer qu'alors $Im(f^p) \oplus Ker(f^p) = E$.

Exercice 8. Une caractérisation de Ker $u \oplus$ Im $u = E$.
Pour E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, prouver l'équivalence entre
⋆ Ker $u =$ Ker u^2
⋆ Im $u =$ Im u^2
⋆ Ker $u \oplus$ Im $u = E$
⋆ $\exists v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathbf{GL}(E)$

Exercice 9. Dimension du commutant.
Montrer que la dimension du commutant d'une matrice $A \in TS_n(\mathbb{R})$ est toujours supérieure à n.

SEMAINE 22

Programme. Suites récurrentes linéaires du second ordre. Groupe symétrique.

Exercice 1. Génération du groupe symétrique.
1. Montrer la formule fondamentale $\sigma(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \cdots\ \sigma(a_n))$.
2. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(i, i+1)$.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1, i)$.
4⋆. Montrer que le nombre minimal de transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$ est $n-1$.
5. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par la transposition $(1, 2)$ et la permutation circulaire $(1\ 2\ \cdots\ n)$.

Exercice 2. Le groupe alterné.
1. Montrer que le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$.
2. Montrer qu'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui contient une permutation impaire est de cardinal pair.
3. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
4. Montrer que $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ et que $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$.

Exercice 3. Zoologie de $\mathfrak{S}_5$.
Faire la zoologie des éléments de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 4. Centres de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$.
1. Montrer que le centre de $\mathfrak{S}_n$ est $\{\mathrm{id}\}$ pour $n \geqslant 3$.
2. Montrer que le centre de $\mathfrak{A}_n$ est $\{\mathrm{id}\}$ pour $n \geqslant 4$.

Exercice 5. Morphismes de groupes $\mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$.
Trouver tous les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$.

Exercice 6. Signatures.
Déterminer les signatures des permutations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :
0. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
1. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
3. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 8. Une équation fonctionnelle.
Déterminer les $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telles que $f((f(x)) = 6x - f(x)$.

Exercice 9. Suites arithmético-géométriques.
Étude générale des suites arithmético géométriques définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

SEMAINE 29

Programme. Suites numériques.

Exercice 1. Suites extraites et convergence.
Montrer que $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. Généraliser à toute partition finie de $\mathbb{N}$.

Exercice 2. Suites intermédiaires.
Soient u et v deux suites positives. Prouver que si $u_n = o(v_n)$, alors il existe une suite w_n telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$. Autrement dit, il n'y a pas de bon ordre pour la domination de fonctions en un point : entre deux fonctions dont l'une domine l'autre, on peut toujours intercaler une fonction dominant l'une et dominée par l'autre.

Exercice 3. Règles de D'Alembert et de Cauchy.
On considère une suite de réels strictement positifs $(u_n)_n$.
1. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers l, montrer que u converge si $l < 1$, diverge si $l > 1$, et qu'on ne peut conclure si $l = 1$.
2. Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers l, montrer que u converge si $l < 1$, diverge si $l > 1$, et qu'on ne peut conclure si $l = 1$.
3. Montrer que la seconde condition implique la première.

Exercice 4. Irrationalité de e.
Notons $u_n = \sum_1^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_1^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n}$.
1. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
2. Montrer que $e = \sum_1^\infty$ est irrationnel.

Exercice 5. Convergence et développement limité d'une suite de zéros.
1. Montrer que pour tout n, l'équation $x + \tan x = n$ a une unique solution sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, soit x_n.
2. Étudier la convergence de $(x_n =_n$ et donner un développement limité.

Exercice 6. Points fixes attractifs et répulsifs.
On consifère une application f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et une suite x_n définie de manière itérative $x_{n+1} = f(x_n)$.
1. Montrer que si x converge, c'est nécessairement vers un point fixe de f.
2. Si $|f'(x)| < 1$, montrer que la suite converge vers x dès que x_0 est assez proche de x. On dit que le point fixe est attractif.
3. Si $|f'(x)| > 1$, montrer que la suite diverge sauf si $x_0 = x$. On dit que le point fixe est répulsif.

Exercice 7. Une riche suite réucrrente.
Étudier la suite récurrente définie par $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, pour $x_0 \in]0, 1[$ et $\lambda \in]0, 1]$.

Exercice 8. Suites arithmético-géométriques.
Étude générale des suites arithmético géométriques définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

Exercice 9. Pavage du plan par des cercles.
Prouver que le plan ne peut être pavé par des cercles. Pour cela, on peut par exemple se placer dans un repère et utiliser le théorème des segments emboités.

Exercice 10. Moyenne arithmético-géométrique.
Soient u et v les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a, \ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrez que ces deux suites convergent vers une même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de u et v.

SEMAINE 11

Programme. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1. Équation de divisibilité.
1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x+2 \mid x^2+2$.
2. Résoudre dans $(\mathbb{Z}^\star)^2$ l'équation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équationb $10 \mid n^2+(n+1)^2+(n+3)^2$.

Exercice 2. Attroupements de composés.
Montrer qu'il existe 2012 nombres composés consécutifs.

Exercice 3. Condition nécessaire et suffisante de résolution d'équation diophantienne.
Prouver qu'il existe une solution à $au+bv=d$ pour trois entiers a, b et d si, et seulement si, $pgcd(a,b) \mid d$.

Exercice 4. Nombre de diviseurs.
Exprimer le nombre de diviseurs positifs d'un entier en fonction de ses valuations p-adiques [3].

Exercice 5. Divisibilité de coefficients binômiaux.
Montrer que $n+1 \mid \binom{2n}{n}$ pour tout n.

Exercice 6. Racines rationelles.
1. Prouver qu'une racine est rationelle si, et seulement si, c'est la racine d'un carré.
2. Plus généralement, prouver que si une puissance d'un nombre rationnel est entière, alors celui-ci est entier.

Exercice 7. Un système obscur...
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système $\{x \wedge y = d\ ;\ x \vee y = m\}$ ait une solution.

Exercice 8. Une propriété des nombres premiers.
Montrer que tout nombre premier $p \geq 5$ est tel que $24 \mid p^2-1$.

Exercice 9. Propriété des nombres de Fermat et infinité des nombres premiers.
1. Prouver que les nombres de FERMAT $F_n = 2^{2^n}+1$ vérifient $\prod_{k=1}^n F_k = F_{n+1}-2$.
2. En déduire l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Exercice 10. Division euclidienne en puissance !
1. Prouver que si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors 2^r-1 est le reste de la division euclidienne de 2^a-1 par 2^b-1.
2. Montrer que $pgcd(2^a-1, 2^b-1) = 2^{pgcd(a,b)}-1$.

Exercice 11. Petit théorème de Fermat *via* le morphisme de Frobenius.
1. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $p \mid \binom{p}{k}$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n \quad [p]$

3. La valuation p-adique d'un entier est l'exposant de p dans sa décomposition en facteurs premiers

SEMAINE 23

Programme. Applications multilinéaires, formes alternées, déterminants.

Exercice 1. Un déterminant très peu linéaire !
Trouver tous les cas où det $(A+X) = \det(A) + \det(X)$ pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Le groupe général linéaire est ouvert et dense.
1. Montrer que pour tout $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(|\lambda| < \varepsilon \Longrightarrow A + \lambda B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est limite de matrices inversibles.

Exercice 3. Formes linéaires sur $M_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que les formes linéaires sur $M_n(\mathbb{R})$ sont de la forme $X \mapsto \operatorname{Tr} AX$.
2. Trouver toutes les formes linéaires vérifiant $f(XY) = f(YX)$.

Exercice 4. Le groupe $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$.
Prouver que $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe.

Exercice 5. Formes n-linéaires alternées.
Calculer la dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension d.

Exercice 6. La formule de Williamson.
Prouver que pour des matrices A_{ij} qui commutent, les matrices $A = (A_{ij})_{ij}$ et $B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)_{i=1}^{m} A_{\sigma(i)i}$ ont même déterminant.

Exercice 7. Racines de $-I_n$.
1. Prouver que s'il existe des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, alors n est pair.
2. Trouver les telles matrices.

Exercice 8. Quelques déterminants.
Que dire du déterminant de
⋆ $\overline{A}$
⋆ ${}^tA$
⋆ $A \in A_n(\mathbb{R})$

Exercice 9. Vandermonde, Cauchy, compagnon et Hürwitz.
Calculez les déterminants très classiques suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$$

Exercice 10. Matrice et comatrice.
Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{com}(M) = M$.

Exercice 11. Cherchez la trace !
Si f est une forme n-linéaire alternée sur un espace de dimension finie E, prouver que

$$\forall (x_i)_i \in E^n, f_u(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, ux_i, \ldots, x_n) = \operatorname{Tr}(u) f(x_1, \ldots, x_n)$$

SEMAINE 24

Programme. Espaces vectoriels euclidiens.

Exercice 1. Des produits scalaires classiques... et moins classiques !
Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur les espaces associés :
⋆ $(M, N) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{Tr}\ {}^tMN$
⋆ $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$
⋆ $(f, g) \in \mathcal{C}^1([0, 1])^2 \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'g'$

Exercice 2. Endomorphismes conservant l'orthogonalité & endomorphismes orthogonaux.
Montrer qu'un endomorphisme conserve l'orthogonalité si, et seulement si, il est composé d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

Exercice 3. Caractérisation des projections orthogonales.
Montrer qu'une projection est orthogonale si, et seulement si, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout x.

Exercice 4. Stabilité des orthogonaux.
Montrer que si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors f conserve un sous-espace F si, et seulement si, il le fixe ainsi que son orthogonal.

Exercice 5. Produit scalaire sur les matrices.
On définit $(A, B) = Tr({}^tAB)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.
1. Prouver que cela définit bien un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Prouver que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux dans cet espace.
4. Prouver que l'on a pour toute matrice A l'inégalité $Tr(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{Tr({}^tAA)}$, et étudier le cas d'égalité.

Exercice 6. Stricte et uniforme convexité d'un espace préhilbertien.
1. Prouver que la boule unité d'un espace préhilbertien est strictement convexe, *i.e.* vérifie $\|tx + (1 - t)y\| < 1$ dès que $x \neq y$. Existe-il des normes non strictement convexes ?
2. Prouver que la boule unité d'un espace préhilbertien est uniformément convexe, *i.e.* vérifie $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall\|x-y\| > \varepsilon, \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$. Existe-il des nombres non uniformément convexes mais strictement convexes ?

Exercice 7. Orthogonal de l'ensemble des polynômes.
On considère l'application $(f, g) = \int_a^b fg$ définie sur $C([a, b])$. Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire. Trouver l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8. Masse de Dirac... fonction ou non ?
1. On considère la forme linéaire $f \mapsto f(0)$ sur $C([0, 1])$. Prouver que celle forme linéaire ne s'écrit pas sous la forme $(g, \cdot) = f \mapsto \int_0^1 fg$ avc g continue.
2. Lorsque l'on se restreint à $\mathbb{R}[X]$, est-ce vrai ?
3. Lorsque l'on se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique Q tel que $P \mapsto P(0)$ s'écrit sous la forme $(Q, \cdot)$: $P \mapsto \int_0^1 PQ$, et qu'il est de degré n.

Exercice 9. Déterminant de Gram.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On définit la matrice de GRAM du système par $G((x_i)_i) = (\langle x_i x_j \rangle)_{i,j}$.
1. Prouver que cette matrice est inversible si, et seulement si, la famille $(x_i)_i$ est liée.
2. Prouver que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base d'un sous-espace F, alors $d(x, F)^2 = \frac{|G(x_1,\ldots,x_n,x)|}{|G(x_1,\ldots,x_n)|}$.
3. Calculer $\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$. Comment faire le calcul directement, sans le résultat sur le déterminant de GRAM ?

Exercice 10. Projection sur un convexe fermé dans un Hilbert.
Soient E un espace de HILBERT réel, *i.e.* un espace préhilbertien complet, un convexe fermé C de E et un élément x de E.
1. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de C telle que $\|x - x_n\| \to d(x, C)$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est de CAUCHY.
3. En déduire qu'il existe un x_C de C tel que $d(x, C) = \|x - x_C\|$.

Semaine 24

Programme. Isométries vectorielles d'un espace euclidien, groupes spéciaux orthogonaux en dimensions 2 et 3.

Exercice 1. Stabilité des orthogonaux.
Prouver que si $u \in O(E)$, alors F est un sous-espace stable si, et seulement si,$F^{\perp}$ est stable.

Exercice 2. Endomorphismes conservant l'orthogonalité.
Déterminer les endomorphismes conservant l'orthogonalité.

Exercice 3. Endomorphismes conservant le produit vectoriel en dimension 3.
Déterminer les endomorphismes conservant le produit vectoriel en dimension 3.

Exercice 4. Étude d'une famille d'endomorphismes.
Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E, α un réel et f_α l'application définie par $f_\alpha(x) = x+\alpha(x{\cdot}a)a$.
1. Montrer que $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour le produit de composition et observer que f_α et f_β commutent.
2. Calculer f_α^p pour $p \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq -1$. Quelle est la nature de f_{-1} ?
4. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = -2$. Quelle est la nature de f_{-2} ?

Exercice 5. Étude d'un endomorphisme particulier.
Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3, et $f : x \mapsto (x \mid a)a + a \wedge x$. Montrer que $f \in O(E)$ et préciser géométriquement f.

Exercice 6. Étude d'endomorphismes représentés par une matrice.
E désigne un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristique, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

SEMAINE 26

Programme. Espaces et applications affines.

Exercice 1. Caractérisation simplifiée des espaces affines.
Une partie X d'un espace affine A est un sous-espace affine si, et seulement si, elle est stable pour les barycentres de deux points. Autrement dit, si dès que deux points sont dans X, alors toute la droite engendrée par eux est également dans X.

Exercice 2. Transformation d'un quadrilatère non plat.
Montrer qu'il existe une unique application affine permutant quatre points non coplanaires, et en trouver un point invariant. On peut aussi se demander s'il y en a d'autres.

Exercice 3. Points fixes et applications affines.
Si f est une application affine vérifiant $f^n = \text{id}$ pour un certain entier n, montrer qu'elle admet un point fixe.

Exercice 4. Limites de barycentres.
À partir de trois points non alignés qui forment les trois premiers termes, on définit la suite $M_n = \text{isobar}(M_{n-1}, M_{n-2}, M_{n-3})$. Converge-t-elle ?

Exercice 5. Quelques applications affines dérivées.
1. Trouver le conjugué $f \circ h \circ f^{-1}$ d'une homothétie par une application affine.
2. Trouver le commutant des translations.
3.Trouver les translations commutant avec les symétries.

Exercice 6. Conservation du parallélisme.
Montrer que les applications affines conservant le parallélisme sont les homothéties et les translations.

Exercice 7. Sous-groupe abélien du groupe des homothéties translations. 1. Vérifier que cet ensemble est bien un groupe.
2. Montrer qu'un sous-groupe commutatif du groupe des homothéties-translations est constitué soit de translations, soit d'homothéties du même centre.

Exercice 8. Applications affines « concrètes ».
1. Donner l'expression analytique de la projection sur $(x + y + z = 1)$ parallèlement à $\text{Vect}(i + j - k)$.
2. Déterminer l'application affinen ayant pour expression analytique

$$\left\{\begin{array}{lll} x' & = & -y - z + 1 \\ y' & = & -2x - y - 2z + 2 \\ z' & = & x + y + 2z - 1 \end{array}\right.$$

SEMAINE 27

Programme. Géométrie différentielle plane.

Exercice 1. Étude de courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos 3t \\ y & = & \sin 2t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & e^t \\ y & = & t^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y & = & \frac{t^3}{1+t^2} \end{array}\right.$$

Exercice 2. Étude de courbes paramétrées en coordonnées polaires.

$$r = 1+\cos\theta \qquad r = \sin 4\theta \qquad r = \cos^2\theta$$

Exercice 3. Calculs de longueurs.

$$r = a(1+\cos\theta) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos^3 t \\ y & = & a\sin^3 t \end{array}\right. \qquad r = \cos^2\theta$$

Exercice 4. Mouvements circulaires.
1. Si $\|\vec{OM}(t)\|$ est constante, *i.e.* si le mouvement est sur un cercle de centre O, montrer que la vitesse est orthogonale à $\vec{OM}(t)$, *i.e.* orthoradiale.
2. Si M a un mouvement circulaire autour de O et si l'accélération est centrale, montrer que le mouvement est uniforme.

Exercice 5. Arcs à courbure constante.
Quels sont les arcs réguliers de classe C^2 et de courbure constante ?

Exercice 6. Lemniscate de Bernouilli.
Pour $A(0,1)$ et $B(0,-1)$, déterminer les points M tels que $MA.MB = 1$.

SEMAINE 28

Programme. Fonctions de plusieurs variables réelles et champs de vecteurs.

Exercice 1. Possibilité de majoration.
Déterminer tous les couples $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$ pour lesquels il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y > 0, x^\alpha y^\beta \leqslant M(x+y)$$

Exercice 2. Lipschitzianité de la distance.
Montrer que la distance à une partie est lipschitzienne.

Exercice 3. Limites de fonctions.
Étudier les limites à l'origine des fonctions

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad x^y$$

Exercice 4. Continuité du taux d'accroissement prolongé.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrer que F est continue.

Exercice 5. Dérivations partielles.
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^y,\ x > 0 \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = x\sin(x+y)$$

Exercice 6. Faiblesses de la dérivation partielle (1).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x},\ \text{si } x \neq 0 \\ 0,\ \text{si } x = 0 \end{cases}$.
a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
b) Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 7. Faiblesses de la dérivation partielle (2).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x},\ \text{si } x \neq 0 \\ 0,\ \text{si } x = 0 \end{cases}$.
a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
b) Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 8. Dérivation d'une intégrale à bordes et à intégrande variables.
Soient a et b de classe C^1. Soit $c(x,y)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par rapport à x. Montrer que l'intégrale générale suivante est de classe C^1 et calculer ca dérivée :

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} c(x,t)\mathrm{d}t$$

SEMAINE 29

Programme. Isométries d'un espace affine euclidien, similitudes planes.

Exercice 1. Caractérisation simplifiée des espaces affines.
Une partie X d'un espace affine A est un sous-espace affine si, et seulement si, elle est stable pour les barycentres de deux points. Autrement dit, si dès que deux points sont dans X, alors toute la droite engendrée par eux est également dans X.

Exercice 2. Transformation d'un quadrilatère non plat.
Montrer qu'il existe une unique application affine permutant quatre points non coplanaires, et en trouver un point invariant. On peut aussi se demander s'il y en a d'autres.

Exercice 3. Points fixes et applications affines.
Si f est une application affine vérifiant $f^n = \mathrm{id}$ pour un certain entier n, montrer qu'elle admet un point fixe.

Exercice 4. Limites de barycentres.
À partir de trois points non alignés qui forment les trois premiers termes, on définit la suite $M_n = \mathrm{isobar}(M_{n-1}, M_{n-2}, M_{n-3})$. Converge-t-elle ?

Exercice 5. Quelques applications affines dérivées.
1. Trouver le conjugué $f \circ h \circ f^{-1}$ d'une homothétie par une application affine.
2. Trouver le commutant des translations.
3.Trouver les translations commutant avec les symétries.

Exercice 6. Endomorphismes conservant l'orthogonalité.
Déterminer les endomorphismes conservant l'orthogonalité.

Exercice 7. Conservation du parallélisme.
Montrer que les applications affines conservant le parallélisme sont les homothéties et les translations.

Exercice 8. Sous-groupe abélien du groupe des homothéties translations.
1. Vérifier que cet ensemble est bien un groupe.
2. Montrer qu'un sous-groupe commutatif du groupe des homothéties-translations est constitué soit de translations, soit d'homothéties du même centre.

Exercice 9. Applications affines « concrètes ».
1. Donner l'expression analytique de la projection sur $(x + y + z = 1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(i + j - k)$.
2. Déterminer l'application affinen ayant pour expression analytique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -y - z + 1 \\ y' & = & -2x - y - 2z + 2 \\ z' & = & x + y + 2z - 1 \end{array} \right.$$

Exercice 10. Composition de similitudes.
Soit ABC un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$. On désigne par S_1, S_2, S_3 les similitudes directes du plan $\mathcal{P}$ de centres respectifs A, B, C telles que $S_1(B) = C, S_2(C) = A$ et $S_3(A) = B$. Décrire les composées $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ et $S_1 \circ S_2 \circ S_3$.

SEMAINE 29

Programme. Isométries d'un espace affine euclidien, similitudes planes.

Exercice 1. Stabilité de la notion de convexité.
Que dire de la somme, de la combinaison linéaire, et de la limite éventuelle d'une fonction convexe ?

Exercice 2. Composition de fonctions convexes.
Que dire de la composée de deux fonctions convexes ?

Exercice 3. Fonctions convexes et limites.
Soit f une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$.
1. Si f est bornée, montrer qu'elle est constante.
2. Si f est strictement croissante, montrer qu'elle tend vers l'infini en $+\infty$.

Exercice 4. Continuité et dérivabilités latérales des fonctions convexes.
1. Montrer qu'une fonction convexe est continue.
2. Montrer qu'une fonction convexe est dérivable à droite et à gauche.

Exercice 5. Convexité et comportement asymptotique.
Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
1. Si f tend vers 0 en $+\infty$, montrer qu'elle est positive.
2.. Si f a une asymptote en $+\infty$, étudier la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote.

Exercice 6. Convexité et minimums.
Montrer qu'un minimum local d'une fonction convexe est un minimum gloabal.

Exercice 7. Concavité et sous-additivité.
Montrer qu'une fonction dérivable et concave sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant $f(0) = \geqslant 0$, est sous-additive.

Exercice 8. Inégalité arithmético-géométrico-harmonique.
Montrer que pour une famille de réels positifs $(x_i)_i$, on a

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 9. Inégalités de Hölder et de Minkowski.
Soient p et q strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1. Montrer que $\forall a, b, \geqslant 0,\ \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$.
2. Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$, déduire de ce qui précède :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}$$

Semaine 8

Programme. Relations de comparaison. Rappels de calcul différentiel élémentaire d'une variable : valeurs vectorielles, C^k-difféomorphisme, accroissements finis, fonctions convexes.

Exercice 1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.

Exercice 2. Que peut-on dire d'une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3. Montrer qu'une fonction convexe est continue.

Exercice 4. Montrer qu'un minimum local est nécessairement global pour une fonction convexe.

Exercice 5. Montrer qu'une fonction vérifiant $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ est convexe.

Exercice 6. Théorème de Darboux.
1. Prouver qu'une fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Donner un exemple de fonction non continue vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7. Exemples et contre-exemples.
Que dire de l'uniforme continuité et de la lipschitzianité des fonctions racine, logarithme et $x \mapsto x \ln x$?

Exercice 8. Une fonction définie par borne supérieure.
Pour f et g continues sur $[0,1]$, on définit $\phi : t \mapsto \sup_{[0,1]}(f + tg)$. Prouver que ϕ est bien définie et qu'elle est lipschitzienne.

Exercice 9. Lemme de Croft
Prouver qu'une fonction uniformément continue f telle que $f(nx) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout x, tend vers 0 en l'inifni.

Donner un exemple de fonction qui tend vers 0 selon toute suite arithmétique mais qui ne tend pas vers 0.

……

Élements de correction

Exercice 1. Les tracés de courbes sont tous simples et doivent être maîtrisés : il s'agit toujours de réduire le domaine par des considérations de périodicité, de parité, de rotations et de symétries ; puis d'étudier sur le domaine réduit les fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Un premier tracé est alors possible, et il peut faire apparaître des points particuliers, qu'il est alors intéressant de confirmer si cela n'a pas été fait avant : points multiples, points singuliers (comportement non discernable sans développements limités), intersection avec les axes, tangentes horizontales ou verticales, branches infinies, asymptotes, etc. Mieux vaut tracer l'un de ces courbes en détaillant toutes les informations accessibles plutôt que de toutes les tracers à moitié !

Exercice 2. 1. Les problèmes posés de manière géométriques ne doivent pas dérouter : en travaillant un peu les propriétés géométriques du problème, on paramètre la courbe que l'on veut tracer et on peut alors l'étudier classiquement. Commençons donc par déterminer une telle paramétrisation : la tangente en M à C passe par M et est dirigée par le vecteur vitesse $(12t; 2)$, et une équation cartésienne est donnée par $(x - 6t^2; y - 2t) \wedge (6t; 1) = 0$. On obtient $x - 6ty + 6t^2 = 0$, ce qui donne $P(-6t^2; 0)$ en prenant $x = 0$. De même la normale à C en M s'obtient par $(x - 6t^2; y - 2t) \cdot (6t; 1) = 0$, coit $6tx + y - 36t^3 - 2t = 0$, ce qui donne $Q(0; 36t^3 + 2t)$ en prenant $y = 0$. On en déduit les coordonnées du milieu de $[PQ]$ et la paramétrisation du lieu recherché : $x(t) = -3t^3$ et $y(t) = 18t^3 + t$. On peut alors étudier aisément la courbe.

2. L'étude est triviale si l'on passe en coordonnées polaires.

Exercice 3. Sans résultats d'intégration et méthodes d'intégration par parties, il faut reconnaître les schémas classiques de primitives et les forcer à apparaître. Écrire, pour la première $1 = (1 + e^x) - e^x$; linéariser $\cos^3$; utiliser une intégration par parties ; chercher une primitive de la forme $P(x)e^x$ avec P de degré 2.

Exercice 4. Les deux premières équations différentielles illustrent la technique de base de résolution, et doit être parfaitement maîtrisée : recherche de solutions de l'équation homogène puis méthode de variation de la constante. Lorsqu'il existe des singularités (annulation du coefficient devant y'), séparer l'étude sur les intervalles sans singularités, et essayer de recoller par la suite. Les équations fonctionnelles se résolvent en déduisant des équations des équations différentielles simples, $f(0) + f(1)$ étant une constante dans la première, et s pouvant être fixé dans la seconde. Pour finir, faire le changement de fonction ou de variable indiqué.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. 1. Il faut prouver que le coefficient de colinéarité est toujours le même. Si $ux = \lambda x$ et $uy = \mu y$, alors $u(x+y) = \theta(x+y)$ par hypothèse, mais si x et y sont indépendant, cela mène à $\theta(x+y) = \lambda x + \mu y$, soit $\theta = \mu = \lambda$, ce qui clos la preuve.

2. On en déduit, en écrivant la commutativité avec les projecteurs suivant les droites, que le centre de $L(E)$ est formé des homothéties.

Exercice 2. 1. Si F et G sont deux sous-espaces non inclus l'un dans l'autre distincts, alors il existe $f \in F \backslash G$ et $g \in G \backslash F$. Alors, $f+g$ n'est ni dans F ni dans G. En effet, si $f+g \in F$, $(f+g) - f = g \in F$, ce qui n'est pas. De même pour G. Ainsi, la réunion non triviale de deux espaces vectoriels n'est jamais un espace vectoriel.

2. Dans ce cas, une combinaison linéaire est toujours dans un F_k car deux éléments des F_i sont toujours dans un même F_k qui est un sous-espace vectoriel. La réunion des F_i est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Il est classique et important de repérer dans la première matrice celle d'un projecteur additionnée à une matrice scalaire, qui se diagonalise aisément et dont les puissances sont connues. Les puissances de la seconde se calculent à l'aide de la formule du binôme, la matrice étant unipotente.

Exercice 4. On écrit $PA = BP$ puis $P = R + iQ$. Le polynôme $det(R + tQ)$ est non nul sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{R}$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $R + tQ$ est inversible, et cette matrice convient.

Exercice 5. La structure de groupe vient dez la multiplicativité du déterminant. L'exercice est très simple : le déterminant est non nul donc on peut le normaliser. La multilinéarité du déterminant permet alors de le faire correctement.

Pour les matrices à coefficients entiers, se servir de la formule de la comatrice et du fait que le déterminant est $1$1.

Exercice 6. La multiplicativité du déterminant et la structure de groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ donnent le résultat.

Exercice 7. Si la matrice n'est pas inversible, il existe une relation linéaire entre ses colonnes, donc en isolant le coefficient de plus grande valeur absolue et en appliquant l'inégalité triangulaire on obtient que la diagonale n'est pas dominante.

Exercice 8. 1. Si f convient, avec les matrices élémentaires il vient $f(E_{ij}E_{kl}) = f(E_{kl}E_{ij})$, soit $\delta_{jk} f(E_{il}) = \delta_{li} f(E_{kj})$. On obtient notamment, pour $j = k = 1$, $f(E_{il}) = \delta_{il} f(E_{11}$. On trouve alors, pour tout A, $f(A) = tr(A) f(E_{11}$. Réciproquement, les traces conviennent par propriété.

2. Par ce qui précède $f(A) = Tr(A)F$. Donc $Tr(ABC)F = Tr(BAC)F$. Si F est non nulle, on en déduit

$$1 = Tr(E_{11}E_{12}E_{21}) = Tr(E_{12}E_{11}E_{21}) = 0$$

Donc il n'y a que l'application nulle, sauf si $n = 1$ auquel cas toutes conviennent.

Élements de correction

Exercice 1. Les solutions s'obtiennent avec les méthodes classiques sans difficulté : $x-1+(A\cos(x)+B\sin(x))e^{-x}$ et $\frac{1}{2}x^2e^x+\frac{1}{4}e^{-x}+(1x+B)e^x$.

Exercice 2. 1. La fonction est continue et, par hypothèse, ne s'annule pas. On conclut avec le théorème des valeurs intermédiaires. Puis, $f''=-pf\leq 0$.

2. Il s'agit de prouver un résultat évident lorsque l'on connaît les fonctions concaves. Pour le prouver directement, on ramène le problème à prouver que $g(x)=f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))$ est négative. Cette fonction est négative, de dérivée $f'-f'(a)$ qui est positive puis négative puisque f' est décroissante, puisque f'' est négative. On en déduit que g est maximale en a, où elle est nulle.

3. Une tangente coupe l'axe des abscisse sauf si elle est horizontale. Puisque f ne peut s'annuler ou devenir négative, ses tangentes ne peuvent couper l'axe des abscisses, donc nécessairement elles sont toutes horizontales, donc sa dérivée est constamment nulle, donc la fonction est constante, et puisque $f''=0=pf$, f est nulle, ce qui n'est pas.

Exercice 3. 1. On choisit a et b dans I, et on veut prouver que λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est atteint, autrement dit que l'on peut trouver un x tel que $f'(x)=\lambda$. Le théorème des accroissements finis affirme que cela est vrai s'il y a une pente de λ. On s'intéresse alors des pentes, notamment de celles issues de $(a,f(a))$ et de $(b,f(b)$:

$$\phi : t\longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}\qquad \psi : t\longmapsto \frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$

On prolonge ces deux applications en a et b respectivement, par $f'(a)$ et $f'(b)$. On obtient ainsi deux applications continues sur $[a,b]$, leurs images sont donc deux segments. Puisqu'ils contiennent tous les deux $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, la réunion des deux intervalles est un segment, qui contient au moins $[f'(a),f'(b)]$, donc qui contient λ : l'un des deux contient donc λ, et on conclut par la formule des accroissements finis.

2. La fonction $x\mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ convient.

Exercice 4. $\sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$ holderienne donc uniformément continue. En effet, en considérant les carrés il vient $\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{x-y}$, donc si $|x-y|\leq\varepsilon^2$, alors $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\varepsilon$. Elle n'est pas lipschitzienne au voisinage de zéro car sa dérivée diverge vers l'infini ; elle est lipschitzienne dès que l'on retire un tel voisinage.

Observons que ln n'est pas uniformément continue. Si tel était le cas, on aurait $|\ln x-\ln y|\leq\varepsilon$ dès que $|x-y|\leq\delta$. Alors avec $y=x+\delta$, on aurait $\ln\left(\frac{x+\delta}{x}\right)$ inférieur à ε, alors que cette quantité diverge vers l'infini en 0. Elle n'est a fortiori pas lipschitzienne, mais elle l'est dès que l'on retire un voisinage de zéro.

$x\ln x$ est prolongeable par continuité en 0. On obtient donc une fonction continue sur un segment, donc uniformément continue par le théorème de Heine.

Exercice 5. La fonction $x\mapsto f(x)+tg(x)$ est continue sur un segment donc admet une borne supérieure qu'elle atteint, disons en x_t. On a alors $\phi(t)-\phi(t')=f(x_t)+tg(x_t)-f(x_{t'})-t'g(x_{t'})$. Puisque $f(x_{t'})+tg(x_{t'})\leq f(x_{t'})+t'g(x_{t'})$ par définition, il vient $\phi(t)-\phi(t')\leq(t-t')g(x_t)\leq\|g\|_\infty(t-t')$. On obtient ainsi la lipschitzianité.

Exercice 6. 1. Une fonction périodique se ramène à un segment représentatif, et la continuité sur un segment implique l'uniforme continuité et le caractère borné. Pour l'uniforme continuité, mieux vaut choisir un intervalle $[0,2T]$: si $|x-y|\leq\delta$, alors ils sont tous les deux dans un même intervalle de forme $[nT,(n+2)T]$ pour $\delta<1$.

2. Une fonction convergeant à l'infini est uniformément bornée au voisinnage de l'infini : les termes se rapprochent de la limite donc se rapprochent entre eux. On est alors ramené à un segment $[-A,A]$, où la fonction est uniformément continue par le théorème de Heine.

Exercice 7. Par récurrence on se ramène à la composition de deux fonctions. Le cas de deux fonctions bornées ou de deux fonctions uniformément continues est trivial, il reste donc à traiter $f\circ g$ et $g\circ f$ avec f bornée et g uniformément continue. Le premier cas est trivial. Le second découle de l'uniforme continuité sur un segment.

Exercice 8. On partitionne de sorte que chaque variation soit inférieure à 1 : il existe δ tel que $|x-y|\leq\delta$ implique $|f(x)-f(y)|\leq 1$, on écrit alors

$$|f(x)-f(0)|\leq|f(x)-f(n\delta)|+\sum_{k=1}^{n=E(x/\delta)}|f(k\delta)-f((k-1)\delta)|\leq n+1$$

et le résultat s'ensuit, puisque $n\leq\frac{x}{\delta}+1$.

Exercice 9. 1. Une suite de CAUCHY est une suite dont les termes se rapprochent uniformément. Une fonction uniformément continue est une fonction envoyant uniformément des éléments uniformément proches sur des images uniformément proches. Les images d'une suite de CAUCHY sont donc uniformément proches, autrement dit elles forment une suite de CAUCHY.

2. Toute suite convergeant vers une borne a de l'intervalle est de CAUCHY car convergente. L'image est donc de CAUCHY donc convergente. Il faut prouver que les telles limites sont toutes les mêmes : pour cela on considère deux suites $(a_n)_n$ et $(a'_n)_n$ convergentes vers a, et on les « croise » en considérant la suite α_n qui vaut k (resp. a'_p) si n vaut $2k$ (resp. $2p+1$). Elle converge vers a, son image converge donc, et sa limite est celle de toute suite extraite, qui sont nécessairement égales, disons à l.

On définit alors $\widetilde{f}$ qui vaut f sur l'intervalle et l en a. Il faut prouver que cette fonction est uniformément continue. Pour cela, on approche la borne par une suite, et on passe à la limite dans l'uniforme continuité après avoir remarqué que si $|x-a|<\delta$, alors $|x-a_n|<\delta$ à partir d'un certain rang.

Exercice 10. La fonction est uniformément continue, donc si deux éléments sont proches d'au plus δ, alors leurs images sont proches d'au plus ε. L'hypothèse de convergence donne $f(n\delta)$ convergeant vers 0. Vient alors l'idée de découper la droite réelle en segments $[n\delta,(n+1)\delta]$: pour n suffisamment grand, les $f(n\delta)$ sont inférieurs à ε. Les x suffisamment grands sont proches de ces $n\delta$ de moins de δ, donc les $f(x)$ sont proches de certains $f(n\delta)$ de moins de ε, et ceux-ci sont proches de 0 à moins de ε. Cela prouve le résultat : les $f(x)$ sont proches de 0 à moins de 2ε pour x suffisamment grand, ce qui traduit bien la convergence vers 0.

On obtient un contre exemple avec $f(x)=n$ si $x=\pi^n$ et 0 sinon. La fonction le converge pas vers 0 puisqu'elle diverge suivant la suite π^n qui tend vers l'infini, mais elle tend vers 0 suivant les suites arithmétiques, une seule valeur des $k\pi^n$ pouvant être non nulle : si $k\pi^n = k'\pi^{n'}$, alors $\pi^{n-n'}$ serait rationnel, ce qui n'est pas puisque π est transcendant.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il s'agit de primitives immédiates : on reconnaît deux fois $\frac{u'}{u}$, puis un changement de variable t^2 fait apparaître du $\frac{1}{1+t^2}$, puis on écrit $\cos^2 = 1 - \sin^2$ (mais de manière générale, linéariser est une méthode infaillible bien que peu efficace), puis on voit $\cos(t)$ comme $Re(e^{it})$, et enfin deux intégrations par parties résolvent le calcul.

Exercice 2. On songe au changement de variable $u = \tan(t/2)$, et ce de manière générale dès lors que les règles de BIOCHE ne s'appliquent pas. Pour la seconde, on est en présence d'une fraction rationelle en e^x, donc pose donc $u = e^x$. Calculs laissés à la joie de l'élève...

Exercice 3. Par linéarité de l'intégration l'hypothèse se traduit par $\int_0^1 f(f-1) = 0$. Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue et positive qui est nulle, d'où $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 4. Si f n'a pas de point fixe, par continuité on a $f(x) < x$ ou $f(x) > x$ sur $[0,1]$, or cela implique que l'intégrale de f est inférieure ou supérieure strictement à $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$.

Exercice 5. S'il existe un point x_0 dans un intervalle de continuité de f tel que $f(x_0) \neq 0$, par exemple $f(x_0) > 0$, alors $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ sur un voisinage de x_0, soit $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Il vient alors que $\int_I f \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f \geq \alpha f(x_0) > 0$, ce qui fait que l'intégrale de f n'est pas nulle.

Exercice 6. Le polynôme $(X-\alpha)(\beta-X)+1$ convient. L'hypothèse donne la nullité de l'intégrale contre tout monôme, donc par linéarité contre tout polynôme. Par l'absurde on suppose que f n'est pas nulle, il existe donc c tel que $f(c) \neq 0$, par exemple $f(c) > 0$. La continuité de f prouve que $f > \frac{1}{2}f(c)$ sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenant c. Puisque f est continue sur un segment elle est bornée, disons par M, et puisque P' ne s'annule que strictement entre les racines de P et est continue, $P' \geq \lambda > 0$ sur $[0, \alpha]$, donc

$$\left|\int_0^\alpha P^n f\right| \leq M \int_0^\alpha P^n \leq \frac{M}{\lambda}\int_0^\alpha P^n P' = \frac{M}{\lambda}\left[\frac{P^{n+1}}{n+1}\right]_0^\alpha \leq \frac{M}{\lambda(n+1)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

De même, l'intégrale entre β et 1 tend vers 0. Or $\int_\alpha^\beta P^n f \geq \int_\alpha^\beta f \geq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)f(c)$ ne tend pas vers 0, donc l'intégrale sur $[0,1]$ non plus, et c'est absurde puisque les $\int P^n f$ sont toutes nulles !

Exercice 7. Pour une fonction continûment dérivable, il suffit d'intégrer par parties et de constater que la dérivée est bornée. Dans le cas d'une fonction en escalier, c'est un simple calcul d'intégrale qui donne le résultat, puisqu'alors $\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = \int_\alpha^\beta \sin(nt)dt$. Pour une fonction continue, on approche uniformément par des fonctions en escalier : il existe e en escalier telle que $\sup|f-e| \leq \varepsilon$, donc les intégrales sont proches à $(b-a)\varepsilon$ près par inégalité de la moyenne, or celle de la fonction en escalier contre $\sin(n\cdot)$ est constamment nulle.

Exercice 8. On s'intéresse naturellement à $\int_0^x fg = \phi(x)$. L'hypothèse se réécrit en $\frac{fg}{C+\phi} = \frac{\phi'}{C+\phi} \leq g$, donc en intégrant on obtient $\int_0^x g \geq \ln(C+\phi(x)) - \ln C$, donc en prenant l'exponentielle $f(x) \leq C + \phi(x) \leq \exp\left(\int_0^x g\right)$. Dans le cas où C est nulle, on a l'inégalité pour $C+\varepsilon$, puis on passe à la limite, le critère étant continu.

Exercice 9. On découvrira en seconde année que la convergence est en fait « uniforme », ce qui est beaucoup plus fort, c'est la convergence vraiment intéressante dans les espaces de fonctions. Pour n suffisamment grand, l'uniforme continuité de f – théorème de HEINE – donne $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour $x, y \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, d'où

$$|f \star \rho_n(x) - f(x)| \leq \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f(y) - f(x))g(x-y)\right| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x) - f(y)|g(x-y)dy \leq \varepsilon \int g = \varepsilon$$

Exercice 10. Dans le cas lipschitzien, de brutales majorations suffisent :

$$\left|\int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(x_i)\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}}(f(x) - f(x_i)\right)dx\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(x) - f(x_i)|\,dx$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} k\,|x - x_i|\,dx \leq k(b-a)\sigma \longrightarrow 0$$

Dans le cas continue, le théorème de HEINE affirme que f est uniformément continue. Pour une subdivision de pas suffisamment petit, on aura donc $|f(x) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ pour tout i, et on reprend les mêmes majorations en utilisant cette majoration au lieu de la lipschitzianité de f.

Exercice 11. Les dérivées successives sont presque toujours nulles, les seuls cas où il reste des termes non nuls sont les $n \leq k \leq 2n$, et la formule de LEIBNIZ donne alors l'explicitations des valeurs, que l'on constate être entières. Des majorations larges donnent la convergence des I_n vers 0, la présence du $n!$ dominant tous les autres termes qui sont au plus géométriques. Or, en intégrant par parties suffisamment de fois jusqu'à « bannir » le polynôme de l'intégrale, on trouve que les I_n sont entières comme combinaisons linéaires des dérivées successives en 0 et en π. La suite stationne donc à 0, alors que la fonction $P_n \sin$ est continue, positive et non nulle sur $[0, \pi]$!

Exercice 12. Une intégration par parties donne $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, ce qui permet d'obtenir la valeur explicite des I_n en fonction de n, en distinguant deux cas selon la parité de n. La fonction $n \mapsto \sin^n$ est décroissante puisque sin est inférieur à 1, donc il en va de même de I_n. Puisque $\sin^n$ est positive, continue et non nulle, I_n est strictement positive. On peut alors diviser $I_n \leq I_{n+1} \leq I_{n+2}$ et obtenir à l'aide de la relation de récurrence précédent $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{n+2}{n+1}$ ce qui donne $I_n \sim I_{n+1}$ par le théorème des trois fonctions. La relation de récurrence donne $(n+1)I_nI_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2}$, la suite est donc constante et vaut $I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$. Ce qui précède donne donc $\frac{\pi}{2} = (n+1)I_nI_{n+1} \sim nI_n^2$, soit $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puisque I_n est positif.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. La première est interne, commutative, associative, régulière et non unitaire. La seconde est interne (reconnaître $1-(1-x)(1-y)$), commutative, associative, unitaire de neutre 0, 0 est le seul inversible et 0 le seul non régulier.

Exercice 2. On écrit $(xy)(xy) = x^2y^2 = xy$ et $x^{-1}x^{-1} = (x^2)^{-1} = x^{-1}$.

Exercice 3. Un neutre est toujours régulier. Réciproquement, si x est régulier, on peut trouver deux puissances différentes égales puisque l'ensemble est fini, soit $x^p = x^q$. Si $p > q$, la régularité donne $x^{p-q} = e$ car $x^p \star y = x^q \star y$ implique $x^{p-q} \star y = y$ pour tout y.

Exercice 4. Il suffit de prouver l'existence des inverses. Or, si x est régulier, alors l'application $y \mapsto x \star y$ est injective, donc bijective par finitude de l'ensemble, donc il existe un antécécent à e, *i.e.* un inverse. Cela étant valable pour tout x.

Exercice 5. On cherche un point fixe de $x \mapsto x^2 = x \star x$. On considère alors la suite des itérés x^{2^n} qui ne peut être injective, donc il existe $p > q$ tels que $x^{2^p} = x^{2^q}$. On pose $n = p - q > 0$ et on a alors $(a = x^{2^q} = x^{2^p})^{2^n} = x^{2^q}$. Soit $a^{2^n} = a$. On vérifie que a^{2^n-1} est un idempotent.

Exercice 6. Tout élément involutif signifie tout élément est son propre symétrique, c'est donc un groupe, et il est abélien car $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$.

Exercice 7. Simple vérification, 0 est neutre et bien noter la stabilité de l'intervalle : $(x+c)(y+c) > 0$ et $(x-c)(y-c) > 0$.

Exercice 8. Simples vérifications : sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathfrak{S}, \circ)$ et G.

Exercice 9. C'est l'analogue du même exercice pour les sous-espaces vectoriels. Par l'aburde, si tel n'est pas le cas, si $a \in A\backslash B$ et $b \in B\backslash A$, alors $a \star b$ est dans la réunion puisque c'est un sous-groupe par hypothèse. Or s'il est dans A, $a^{-1} \star (a \star b)$ est dans A, ce qui n'est pas, et idem pour b. C'est absurde.

Exercice 10. La non injectivité et la régularité des éléments donne un $x^p = e \in A$, donc $x^{-1} = x^{p-1} \in A$ est dans A, ce qui en fait un sous-groupe.

Exercice 11. 1. C'est $d\mathbb{Z}$ avec d le plus petit élément positif, on le prouve par division euclidienne.
2. Il faut raisonner un peu plus, en considérant $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 12. C'est presque du cours !

Exercice 13. L'antécédent de i est réel de carré -1 (élément de carré 1 et distinct de 1 par injectivité, donc la seconde partie est prouvée. L'antécédent $a \in (\mathbb{Q}, +)$ de $2 \in (\mathbb{Q}^\star, \times)$ vérifie $f(a) = 2 = f(a/2 + a/2) = f(a/2)^2$ or c'est impossible dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 14. La sinus hyperbolique vérifie $sh(x+y) = sh(x) \star sh(y)$, c'est donc un isomorphisme avec $(\mathbb{R}, +)$., donc il s'agit bien d'une loi de groupe.

Exercice 15. Par l'absurde, s'il existe $x \notin H$, alors $xHetH$ ont même cardinal (les translations étant des bijections) donc ne sont pas disjoints. Un élément commun s'écrirait donc $y = zx$ avec y et z dans H, ce qui ferait que x est dans H, ce qui n'est pas.

Exercice 16. 1. Un groupe G est partitionné en ses classes xH : elles sont disjointes ou égales, donc G est union disjointe de telles classes, qui ont toutes même cardinal.
2. L'ordre d'un élément est en fait le cardinal du sous-groupe engendré par cet élément.
3. Le cardinal d'un sous-groupe divise p, donc est 1 ou p.
4. On travaille dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (le groupe des entiers modulo p) qui est d'ordre p, donc $a^p = 1$ dans le groupe.

SEMAINE 13

Exercice 1. La preuve est immédiate par récurrence une fois que l'on a compris le fonctionnement pour $n = 2$. Or cela découle simplement de la factorisation classique de $a^k - b^k = (a-b)\sum a^k b^{n-k-1}$.

Exercice 2. 1. Les racines des facteurs du premier sont racines du second, et sont distinctes mis à part 1, qui de toutes manières est de multiplicité suffisante dans le second facteur.

2. Même raisonnement : 0 est racine double du second, ce qui prouve la divisibilité.

Exercice 3. 1. Par le lemme de GAUSS, on obtient $X \mid P$, puis $X+1 \mid P$, etc. jusqu'à $X+3 \mid P$, par la relation entre P et $P(X+1)$. Ainsi, $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$, et la relation donne $Q(X+1) = Q$, donc Q constant. Réciproquement, de tels polynômes conviennent.

Exercice 4. Ce joli résultat est une simple conséquence de la relation entre coefficients et racines : puisque $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$, σ_1 est la somme des racines, et on obtient une raison de $\frac{a_{n-1}}{na_n}$ car la somme des zéros de la dérivée k-ième est alors $-\frac{(n-k)a_{n-1}}{na_n}$.

Exercice 5. On remarque que $B_n = XB_{n-1} + A\sin(n-1)\theta$ avec les formules de duplication, donc par récurrence $B_n = A(\sin(n-1)\theta + X\sin(n-2)\theta + \cdots + X^{n-2}\sin\theta) = AQ_n$.

Exercice 6. 1. La division euclidienne existe par théorème et le reste est de degré au plus 1. En remplaçant X par i et $-i$, ce qui annule X^2+1, on obtient $X\sin n\theta + \cos n\theta$ comme quotient.

2. On écrit $X^k = X^{nq+r} = X^r(X^{nq} - 1 + X^r = (X^n - 1)\left(\sum_{i=0}^{q-1} X^{kn+r}\right) + X^r$ et le degré de ce reste est bien inférieur à $n-1$.

3. La formule de TAYLOR pour les polynômes prouve, puisque le reste à $P(a)$, que le quotient est le reste de TAYLOR d'ordre 1 divisé par $X - a$, soit $\sum P^{k+1}(a)/(k+1)!(X-a)^k$.

Exercice 7. On réécrit l'équation en une relation de BÉZOUT $PP^{n-1} - QQ^{m-1} = 1$, d'où $P \wedge Q = 1$. En dérivant on obtient que $PQ^{m-1}Q'$, donc PQ' par le théorème de GAUSS, et symétriquement QP'. Si aucun des deux est constant, on aboutit à une contradiction au niveau des degrés car le degré d'une dérivée d'un polynôme *non constant* est strictement inférieur. L'un des deux est donc constant, donc l'autre également compte tenu de la relation.

Exercice 8. S'ils ne sont pas premiers entre eux, D n'est pas constant et $A = DV$ et $B = -DU$ conviennent. Réciproquement, s'ils sont premiers entre eux et si $AU = -BV$, alors AV par le théorème de GAUSS, or $V \neq 0$ donc on devrait avoir $deg(A) \leq deg(V)$, ce qui n'est pas.

Exercice 9. 1. Il suffit de réduire au même dénominateur pour obtenir $\frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}$, que l'on connaît en fonction des coefficients avec $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$., on obtient p^2/q^2.

2. On développe et on fait apparaître les fonctions symétriques élémentaires : $S = (x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2)(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^2x_2^2x_2 + x_1x_2^2x_3^2 + x_2x_3^2x_1^2) = (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3)\sigma_1 - \sigma_2\sigma_3$, on trouve -16.

Élements de correction

Exercice 1. La méthode de décomposition en éléments simples est facile et à maîtriser parfaitement : après avoir isolé la partie entière, on recherche les coefficients de la décomposition en multipliant par la partie polaire adéquate et en prenant la limite au pôle.

Exercice 2. Une immédiate condition de degré donnerait alors que $1 = 2d(F)$, ce qui n'est pas possible.

Exercice 3. On réécrit la condition $F(X) = F(-X)$ sous la forme $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$ avec P et Q premiers entre eux. Cela donne $Q(X)$ et $Q(-X)$ associés, puis égaux ou opposés par des considérations de coefficient dominant, et cela donne le même résultat sur P.

Exercice 4. Une simple décomposition en éléments simples donne un télescopage immédiat, et une somme égale à 1.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. 1. Les arguments de degré et de valuation sont les premiers à explorer lorsque l'on traire de relations entre polynômes. Ici, on obtient nécessairement $d(P) \leq 1$, puis en explicitant la relation avec des coefficiens indéterminés on obtient $P = X$ ou P constant.

2. Exploitons notre connaissance de la dérivation formelle : la relation donne $d(P) = 3$ en regardant les coefficients dominant, ou alors $d(P) \leq 1$, on recherche alors les coefficients explicitement.

Exercice 2. 1. L'idée est de faire intervenir l'identité remarquable $a^2 - b^2$: en considérant $(1 - X)P_n(X)$, on obtient un « télescopage » de cette identité qui donne $P_n = 1 - X^{2^{n+1}}$.

2. Le coefficient devant X^k du polynôme P_n, pour $n \geq k$, est le nombre de telles décompositions possibles.

Exercice 3. On obtient explicitement les coefficients du reste, qui est de degré au plus 1, en évaluant en a, b et en dérivant et en évaluant en a.

Exercice 4. C'est un résultat classique et utile. En substituant $\frac{p}{q}$ à X et en réduisant au même dénominateur, on obtient la condition nécessaire. Puis un polynôme de degré trois se factorisant admet nécessairement un facteur de degré un, donc une racine, or ce n'est pas le cas ici par le critère précédent.

Exercice 5. L'exercice ainsi posé peut être déroutant. La méthode est cependant importante : on sait que $\cos\frac{\pi}{3}$ est rationnel, et que $\cos 3x$ est un polynôme à coefficients entiers en $\cos x$. Ainsi, $\cos\frac{\pi}{9}$ est une racine d'un polynôme à coefficients entiers : si elle était rationelle, le critère de l'exercice précédent permet d'obtenir sa valeur, et on obtient une absurdité.

Exercice 6. 1. et 2. On introduit les racines ordonnées de P. On montre que la dérivée P' en a autant moins une : si une racine a une multiplicité supérieure à 2, elle est encore racine de P' avec des multiplicités décrémentées de 1 ; sinon entre deux racines successives de P, il y en a une de P' par le théorème de ROLLE. Le compte y est : P' est scindé. Il faut bien retenir le raisonnement, utile indécemment souvent : si $P = \prod(X - x_i)^{a_i}$, alors on peut écrire

$$P' = \prod(X - x_i)^{a_i - 1} \prod(X - y_i)$$

3. Une dérivée successive aurait alors 0 comme zéro multiple, or ce ne peut être le cas par ce qui précède.

Exercice 7. Les sommes de deux carrés sont positifs. Réciproquement, un facteur irréductible est somme de deux carrés s'il est positif : les racines sont de multiplicité paire, et les facteurs irréductibles sans racines sont sommes de deux carrés, c'est la mise sous forme canonique bien connue. Il reste à prouver que la famille des polynômes sommes de deux carrés est multiplicative, et cela vient de la relation $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$.

Exercice 8. Définir les polynômes par la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ et ses premiers termes, ce que l'on obtient en utilisant les formules de duplication, et prouver les autres propriétés par récurrence. Ou alors développer à l'aide de la formule d'EULER et de celle du binôme. Les racines sont les $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$

Exercice 9. Pour le premier, remarquons que sa dérivée est le précédent. S'il a une racine double, il y a une racine commune aux deux, donc à leur différence, or celle-ci vaut $X^k/k!$, donc X serait nul, ce qui n'est manifestement pas puisque 0 n'est pas une racine. Pour le second, si tel est le cas alors $x^n = x/n$ puisque la dérivée s'annule, on obtient alors x, et on vérifie qu'il n'est pas racine.

Exercice 10. Si $P = a\prod(X - a_i)$, alors on écrit $\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{X - a_i}$. Si a est une racine de P' et non de P, on a donc $\frac{P'(a)}{P(a)} = \sum \frac{1}{a - a_i} = \sum \frac{\overline{a_i} - \overline{a}}{|a - a_i|^2}$, et donc en passant au conjugué et en isolant a on obtient le résultat.

Exercice 11. On reconnaît les coefficients du binôme, qui sont entiers, et cela clos les deux premières questions puisque $H_n(k)$ est le produit des n entiers consécutifs à partir de k. La seule implication un peu moins évidente est alors que la seconde implique la troisième, or en décomposant P suivant cette base $(H_n)_n$, on a le premier coefficient qui est $P(0)$ et est entier, et on prouve que les suivant sont entiers par récurrence simple et facile.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. L'exercice est simple et purement technique, mais nécessite cependant de connaître la définition d'un espace vectoriel sans avoir recours à un espace vectoriel le contenant.

Exercice 2. On vérifie la stabilité par combinaisons linéaire ou on trouve un contre-exemple : non (passage à l'opposé inversant les inégalités), oui, oui (avec une période produit des deux produits), oui, oui et oui.

Exercice 3. Pour prouver la liberté d'une famille, on suppose que cette famille vérifie une relation liénaire et on prouve que nécessairement ses coefficients sont nuls.

1. En isolant l'un des termes, on obtient $\alpha_k|x-a_k| = \sum \alpha_i|x-a_i|$, le membre de gauche n'étant oas dérivable en a_k, alors que le terme de droite si.
2. En évaluant une combinaison linéaire $\sum \alpha_k \chi_{[a_k,+\infty[}$ en le plus petit des a_k, on obtient la nullité du α_k correspondant, et par suite la nullité de chacun des α_k.
3. Un α_k non nul impliquerait $\sum \alpha_k e^{a_k x}$ équivalent à un $\alpha_k e^{a_k x}$ en $-\infty$ ou $+\infty$, qui divergerait alors.
4. En dérivant et en prenant un équivalent en l'infini, on obtient la nullité des coefficients.
5. On sépare termes positifs et négatifs : $\sum_{\alpha_k>0} \ln(p_k) = \sum_{\alpha_k \leq 0} \ln(p_k)$, on réduit à un même dénominateur pour obtenir une relation à coefficients entiers, on considère l'expoentielle de cette relation, et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers donne la nullité des α_k.

Exercice 4. 1. Si F et G sont deux sous-espaces non inclus l'un dans l'autre distincts, alors il existe $f \in F\backslash G$ et $g \in G\backslash F$. Alors, $f+g$ n'est ni dans F ni dans G. En effet, si $f+g \in F$, $(f+g)-f = g \in F$, ce qui n'est pas. De même pour G. Ainsi, la réunion non triviale de deux espaces vectoriels n'est jamais un espace vectoriel.

2. Dans ce cas, une combinaison linéaire est toujours dans un F_k car deux éléments des F_i sont toujours dans un même F_k qui est un sous-espace vectoriel. La réunion des F_i est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. 1. Un polynôme s'annulant en $n+1$ points est nul, ce qui donne l'intersection nulle de F et G. Une fonction s'écrit toujours $f = (f-L)+L$ où L est le polynôme de Lagrange interpolant les $f(a_i)$.

2. Une fonction paire et impaire est nulle. Toute fonction s'écrit comme somme de sa partie paire et de sa partie impaire.

Exercice 6. La linéaire d'applications est toujours une simple vérification, découlant des propriétés de linéarité de l'intégration, de la dérivation, de la somme, du produit, etc. Pour trouver le noyau, il s'agit de résoudre des équations : équations différentielles, suites récurrentes, etc.

Exercice 7. 1. Il faut prouver que le coefficient de colinéarité est toujours le même. Si $ux = \lambda x$ et $uy = \mu y$, alors $u(x+y) = \theta(x+y)$ par hypothèse, mais si x et y sont indépendant, cela mène à $\theta(x+y) = \lambda x + \mu y$, soit $\theta = \mu = \lambda$, ce qui clos la preuve.

2. On en déduit, en écrivant la commutativité avec les projecteurs suivant les droites, que le centre de $L(E)$ est formé des homothéties.

Exercice 8. En composant une relation liénaire par f^{p-1}, on obtient la nullité du premier coefficient, et par suite de tous.

Deuxième partie 2. Élements de correction

Exercice 1. On reformule naturelle le problème en vue d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il faut prouver que la fonction définie par $g(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)$ s'annule. Elle est continue, comme f. Malheureusement, $g(0)$ et $g(1)$ n'ont pas de signe apparent. On constate par contre que

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = f(1)-f(0) = 0$$

Si les termes de la somme ne sont pas tous nuls, il y en a de positifs et négatifs strictement, ce qui permet de conclure.

Exercice 2. La difficulté des exercices de type calculatoire, qui ne sont pas difficile à condition de connaître son cours, est de faire les calculs proprement et tranquillement : il ne faut pas avoir peut de détailler ses calculs, mieux vaut perdre quelques minutes à le faire que sauter des étapes qui auraient évité au résultat final d'être faux.

C'est la règle de dérivation des fonctions composées qui est utile ici, et il ne faut pas oublier d'écrire x^x sous forme exponentielle avant de dériver !

Exercice 3. Lorsque l'on cherche à calculer des dérivées n-ièmes, on applique naturellement la formule de LEIBNIZ, qui est d'autant plus adapté ici qu'elle permet d'obtenir des formules explicites simplement, les dérivées successives des polynômes s'annulant à partir d'un certain rang, et celles de sinus étant périodiques.

Exercice 4. La méthode de recherche pour des équations fonctionnelles est le raisonnement par analyse et synthèse : on suppose qu'une fonction vérifie l'équation, et on en déduit des conditions sur la fonction qui, dans l'idéal, permettent d'obtenir des formes explicites. C'est une recherche de conditions nécessaires : si une fonction est solution, alors elle doit vérifier cela. Il reste alors à faire la synthèse : les fonctions ainsi trouvées, et les solutions, s'il y en a, sont nécessairement parmi elles, saitisfont-elles les équations.

1. On prend g constante et on tombe sur $f = id$, qui convient.
2. La symétrique entre x et $1 - x$ amène à remplacer x par $1 - x$ par exemple, et à combiner les deux équations pour trouver une expression de f. Il reste alors à vérifier si elle convient bien.
3. La présence de la somme et de la différence peut être exploitée en posant $x = y$, ce qui donne la forme explicite de f car $f(0) = 0$ par l'équation. Il reste à vérifier que la fonction ainsi trouvée convient.

Exercice 5. La méthode est la même que précédemment, mais c'est la continuité qui est fondamentale pour conclure, par un argument de passage à la limite.

1. Une récurrence immédiate montre que $f(7^n x) = f(x)$, soit $f(x) = f(7^{-n}x)$, ce qui donne $f(x) = f(0)$ pour tout x lorsque n tend vers l'infini. La réciproque est immédiate, mais à préciser !
2. Le résultat est le même et la méthode est la même : à x fixé, $\frac{1}{1+x^2}$ est supérieur à 1 strictement, sauf dans le cas où $x = 0$ auquel cas le résultat est immédiat. De même pour la synthèse !

Exercice 6. L'exercice est facile, et il suffit de revenir aux définitions et de les appliquer lors de l'évaluation de $g(-x)f(-x)$ ou $f(g(-x))$.

Exercice 7. Dans le cas contraire, on aurait l'existence de deux réels $x < y$ tels que $f(x) \geq f(y)$. En appliquant $f \circ f$ qui est croissante, on aurait une contradiction avec l'hypothèse sur $f \circ f \circ f$.

Exercice 8. (à rédiger)

Exercice 9. L'application ϕ est continue comme f. Elle ne s'annule pas sur I, sinon cela contredirait l'injectivité de I. Si $\phi(0) > 0$, cela implique que $\phi(1) > 0$ donc que ϕ croît. Dans le cas contraire, on a la décroissance de ϕ en appliquant le résultat précédent à $-\phi$.

Exercice 10. 1. On ramène le problème à une recherche de point d'annulation. Posons $g(x) = f(x) - x$. Par hypothèse, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue comme f, g s'annule, autrement dit f admet un point fixe.

2. On raisonne de la même manière, mais la condition sur le signe de g provient de l'étude asymptotique : les limites sont de signes opposés, le théorème des valeurs intermédiaires peut donc s'appliquer. Puisque id croît strictement, il ne peut y avoir qu'un seul point fixe, sinon f ne serait pas décroissante. C'est bien évidemment faux si f est seulement supposée croissante !

3. Théorème de Picard (à rédiger).

Exercice 11. Par densité de $\mathbb{Q}$. On commence par prouver que $f(nx) = nf(1)$ pour les entiers, ce qui découle d'une récurrence avec l'hypothèse. Puis pour les relatifs, ce qui procient de la définition de l'opposé : $f((n-n)x) = f(0) = 0 = f(nx) + f((-n)x)$ donc $f((-n)x) = -f(nx) = (-n)f(1)$. Puis pour les rationnels avec $qf(p/qx) = f(px) = pf(x)$. Puis on conclut par densité et continuité.

Exercice 12. Par uniforme continuité, des x proches à δ près sont envoyés sur des images distantes de ε près. Par hypothèse, $f(n\delta)$ tend vers 0, donc à partir d'un certain rang est inférieure à ε. Tout x est proche d'un $n\delta$ à δ près, donc $f(x)$ est inférieure à 2ε pour x suffisamment grand.

Élements de correction

Exercice 1. L'application $x \mapsto ax$ est bijective car injective par intégrité et puisque l'anneau est fini. Ainsi, 1 a un antécédent, *i.e.* a est inversible.

Exercice 2. S'il y a commutation, $(xy)^n = x^n y^n$, et la formule du binôme donne la nilpotence de la somme. Puis, $(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = 0$. Enfin, il s'agit de la sommation géométrique bien connue : $(1-x)^{-1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

Exercice 3. C'est clairement un anneau. Si x est inversible, alors il est inversible dans $\mathbb{C}$, et on connaît donc son inverse. Puisque $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$, donc nécessairement $\{a; b\}/(a^2+b^2) \subseteq \mathbb{Z}$. Donc le produit $|\frac{ab}{a^2+b^2}| \leq \frac{1}{2}$ est entier, donc nul. On obtient les inverses après vérification : $\pm 1, \pm i$. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un corps.

Exercice 4. Dans tous les cas, le caractère de sous-anneau est immédiat. Pour trouver les inversibles, expliciter la fraction de l'inverse et traduire cela en une égalité entre entiers, et conclure : m, n impairs et m puissance de 2.

Exercice 5. En écrivant explicitement les termes du produit, on obtient la formule très utile et fondamentale $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Exercice 6. Cela donne $a_{ij}d_i = a_{ij}d_j$ pour tous i, j, donc tous les éléments sont nuls sauf les diagonaux. Réciproquement, c'est évident.

Exercice 7. L'astucieuse idée, qui sera des plus justifiée l'année prochaine, est d'écrire la matrice comme $I + N$ avec N nilpotente d'ordre 2 et qui commutent : il suffit alors d'appliquer la formule du binôme.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Les systèmes générateurs sont à chaque fois des bases, on le voit en considérant des valeurs particulières pour le premier ($2n\pi$) et en remarquant qu'une suite récurrente linéaire est exactement définie par ses premiers termes.

Exercice 2. Si la première condition est vérifiée, alors on remarque que $p^2 = p$ et que $q^2 = q$, ce sont donc des projecteurs. Puis pour $x \in \text{Ker } p$, $qx = qpx = q0 = 0$ donc on a l'inclusion des noyaux, donc égalité par symétrie des rôles de p et q. Réciproquement, écrivons $q = y + z$ avec $x \in \text{Im } q$ et $z \in \text{Ker } q = \text{Ker } p$, et il vient alors $p(q(x)) = p(q(y)) = p(y) = p(x)$. Donc $pq = p$, et symétriquement pour l'autre égalité.

Exercice 3. La commutativité donne immédiatement $(p \circ q)^2 = p \circ q$ et la linéarité est claire. Pour x dans la somme $\text{Ker } p + \text{Ker } q$, soit $x = y + z$, $pqx = qpy + pqz = 0$ puisqu'ils commutent, donc $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subseteq \text{Ker } p \circ q$. Réciproquement on peut écrire un élément du noyau de $p \circ q$ sous la forme $x = y + z \in \text{Im } p + \text{Ker } p$, et alors $0 = pqx = qpx = qpy = qy$ donc $y \in \text{Ker } q$ et $x \in \text{Ker } p + \text{Ker } q$. L'image est clairement incluse dans l'intersection des images par commutativité ; réciproquement, un élément de l'intersection vérifie $y = px$ et $y = qy$ soit $y = qpx = pqx$, donc est dans l'image.

Exercice 4. En développant et en exploitant le fait que $qp = 0$, on trouve $r^2 = r$ et la linéairité est immédiate. Puis on constate que $pr = p$ et que $qr = q$, donc $\text{Ker } v \subseteq \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, avec l'autre inclusion est est évidente. Puis l'image de $\text{Im } r$ est clairement dans $\text{Im } p + \text{Im } q$; réciproquement si $x = x_1 + x_2$ est dans cette somme, alors on constate que $q(x) = x_2$ et cela donne $r(x) = x$, ce qui achève la preuve.

Exercice 5. L'idée est de considérer $u = \frac{1}{|G|} \sum g$. Un changement de variable par translation – remarque souvent utile : $x \mapsto ax$ est toujours bijective dans un groupe fini, car injective ! – donne que $gu = ug = u$ pour tout g, donc $u^2 = u$, donc u est un projecteur. Si $x \in E^G$, il est clair que $ux = x$, ; réciproquement si $ux = x$, alors $gx = gux = ux = x$. Ainsi, $\text{Im } u$ – qui est l'espace fixé par u, puisque c'est un projecteur – est exactement E^G. Concluons : la dimension de E^G est le rang de u et le rang d'un projecteur est... sa trace !

Exercice 6. On a toujours $\text{Im } u^2 \subseteq \text{Im } u$ et $\text{Ker } u \subseteq \text{Ker } u^2$. Les deux premières propositions sont donc équivalentes par le théorème du rang car $\dim \text{Ker } u + \dim Imu = \dim E = \dim \text{Ker } u^2 + \dim \text{Im } u^2$. Supposons que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$. Si $y \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u$, alors $y = u(x)$ pour un certain x, et $u(y) = 0 = u^2(x)$ donc $x \in \text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ donc $u(x) = y = 0$. Ainsi la somme est directe. Puisque la somme des dimensions fait n par le théorème du rang, on a bien $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = E$. Supposons que $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = E$ désormais. Si $y \in \text{Im } u$, $y = u(x)$ pour un certain x ; or cet x s'écrit $i + k$ avec $i \in \text{Im } u$ et $k \in \text{Ker } u$, donc $y = u(x) = u(i) = u^2(i_0)$, donc $\text{Im } u \subseteq \text{Im } u^2$, et cela donne l'égalité.

Exercice 7. 1. Si n est un carré, sa racine est rationnelle. Si $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, alors $p^2 = nq^2$, donc $q \mid p$, et donc $q = 1$ puisqu'ils sont premiers entre eux. Ainsi, n est nécessairement un carré.

2. Par définition, K est le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$. Pour prouver que c'est une base, on écrit $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, puis on écrit $a + b\sqrt{2} = \sqrt{3}(c + +d\sqrt{2})$ et on prend le carré, ce qui donne une relation linéaire entre les coefficients car $(1, \sqrt{2})$ est libre par ce qui précède. De même avec $a + c\sqrt{3} = \sqrt{2}(b + d\sqrt{3})$. On obtient lka nullité de tous les coefficients, on a donc une base et l'espace est de dimension 4.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Tout provient du fait que la composition diminue le rang. On encadre donc intelligemment, par exemple $rg(f) = rg(fgf) \leq rg(gf) \leq rg(f)$.

Exercice 2. On écrit une relation linéaire. On compose par f^{p-1}, ce qui annule tous les vecteurs sauf x, et donne donc la nullité du premier coefficient. On itère alors.

Exercice 3. Il suffit de considérer une base, et le produit des p_{e_i} convient comme indice de nilpotence.

Exercice 4. On écarte les cas particuliers triviaux (droites confondues). Alors, deux vecteurs forment une base : c'est possible. Pour le troisième, on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui se résoud toujours, les systèmes étant libres.

Exercice 5. Si $ux = ax$ et $uy = by$, alors $ax + by = u(x + y) = c(x + y)$, ce qui n'est pas si x et y forment une famille libre, sauf si $a = b = c$.

Exercice 6. Si $g = f_{Im}$ est bijective, alors les deux espaces sont supplémentaires : si x est dans l'image et dans le noyau, alors $g(x)$ existe et est nul, donc x est nul par injectivité ; et $x = (x-u)+u$ où $f(x) = g(u)$ convient. Bien plus élégamment, par analyse et synthèse : si $x = a + b$ avec $a \in Ker$ et $b \in Im$, alors $f(b) = f(x) = g(b)$ et b est entièrement déterminé car g est bijective, donc $a = x - b$ et cela convient car $f(x) = f(b)$. Réciproquement, g est linéaire comme f, son noyau est l'intersection du noyau de f et de la source, soit 0, puis tout $y = f(x)$ s'écrit $f(a+b) = f(b) = f(f(c)) = g(f(c)) = g(b)$.

Exercice 7. La monotonie est évidente mais importance à garder à l'esprit : il suffit de l'écrire. Les dimensions sont naturelles, monotones et bornées : elles stationnent, et l'égalité des dimensions couplée avec les inclusions déjà obtenues permettent de conclure. Plus précisément – et pour répondre à la question – au premier moment où un noyau est égal au suivant, alors la suite stationne : si $f^{k+2}x = 0$, alors fx est dans le noyau de ,f^{k+1}, donc de f^k également par hypothèse, donc x est dans le noyau de f^{k+1} : on les inclusions réciproques. Pour finir, si $y = f^p x$ et $f^p y = 0$ on a, puisque $Ker f^{2p} = Ker f^p$, $y = 0$ donc les deux sont supplémentaires par le théorème du rang.

Exercice 8. On a toujours Im $u^2 \subseteq$ Im u et Ker $u \subseteq$ Ker u^2. Les deux premières propositions sont donc équivalentes par le théorème du rang car dim Ker $u +$ dim $Imu =$ dim $E =$ dim Ker $u^2 +$ dim Im u^2. Supposons que Ker $u =$ Ker u^2. Si $y \in$ Im $u \cap$ Ker u, alors $y = u(x)$ pour un certain x, et $u(y) = 0 = u^2(x)$ donc $x \in$ Ker $u^2 =$ Ker u donc $u(x) = y = 0$. Ainsi la somme est directe. Puisque la somme des dimensions fait n par le théorème du rang, on a bien Ker $u \oplus$ Im $u = E$. Supposons que Ker $u \oplus$ Im $u = E$ désormais. Si $y \in$ Im u, $y = u(x)$ pour un certain x ; or cet x s'écrit $i + k$ avec $i \in$ Im u et $k \in$ Ker u, donc $y = u(x) = u(i) = u^2(i_0)$, donc Im $u \subseteq$ Im u^2, et cela donne l'égalité.

Exercice 9. On s'intéresse au sysème linéaire $AX - XA = 0$ d'inconnue X. L'idée est de se limiter aux $X\ inTS_n$. Puisque les relations entres coefficients diagonaux sont trivialement vérifiées, il reste $\frac{n(n-1)}{2}$ équations pour $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues : la dimension de $S \cap TS_n$ est supérieure à n, donc de même pour S.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. 1. Si x est un $\sigma(a_i)$, alors $\sigma c\sigma^{-1}(x) = \sigma c(a_i) = \sigma a_{i+1}$. Sinon, $\sigma^{-1}x$ n'est pas un a_i, donc $\sigma c\sigma^{-1}x = \sigma\sigma^{-1}x = x$.

2. On sait décomposer les cycles $(i, i+1, \cdots, j) = (i, i+1)(i+1, i+2)\cdots(j-1, j)$. Les cycles « successifs » sont donc dans le groupe engendré par les $(i, i+1)$. Puis $(i, j) = (j, j-1, \cdots, i+1)(i, i+1, \cdots, j)$.

3. Il suffit de prouver que toute transposition peut être obtenue à partir de celles-ci. Or $(1, i)(1, j)(1, i)^{-1} = (i, j)$.

4. Un subtil détour par la théorie des graphes s'impose ! On représente les i par des sommets et on relie des sommets tel qu'il y a la transposition correspondante dans un système de transpositions donné. Si le système engendre $\mathfrak{S}_n$, c'est que le graphe doit être connexe. Or un graphe connexe a aui moins $n-1$ arêtes, ce qui se prouve par récurrence sur n avec le lemme des poignées de mains !

5. On constate que $c^i(1, 2)c^{-i} = (i+1, i+2)$. Et $c^{-1} = c^{n-1}$ car c'est un n-cycle, donc tous les $(i, i+1)$ sont engendrés par les deux permutations initiales.

Exercice 2. 1. On a une bijection entre $\mathfrak{A}_n$ et son complémentaire par translation $\sigma \mapsto \tau\sigma$ où τ est une transposition.

2. Avec la même idée, une permutation impaire permet de construire une bijection entre une partie du sous-groupe et son complémentaire : le cardinal est donc le double du cardinal commun à des deux parties – car elles sont complémentaires – et il est donc pair.

3. Le groupe alterné est l'ensemble des produits pairs de transpositions. Les 3-cycles sont dans $\mathfrak{A}_n$. Réciproquement, il suffit de prouver que tout produit de deux transpositions est engendré par les 3-cycles. Or cela vient de $(i, j)(k, l) = (i, j, k)(i, k, l)$ pour des éléments distincts ; $(i, j)(i, k) = (i, k, j)$ pour des éléments distincts ; $(i, j)(i, j) = \mathrm{id}$.

4. Les commutateurs de permutations pairs sont pairs. Réciproquement, il suffit de prouver que tout 3-cycle est un commutateur. Or si $\sigma = (a, b, c)$, alors $\sigma^2 = (a, c, b)$ est un autre 3-cycle donc lui est conjugué, donc il existe τ tel que $\sigma^2 = \tau\sigma\tau^{-1}$ soit $\sigma = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$. Les commutateurs sont toujours pairs, puis la réciproque est identique pour $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3. L'ordre est $5! = 120$. Les éléments sont : l'identité ; $\binom{5}{2} = 10$ transpositions ; $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$ double-transpositions ; $2\binom{5}{3} = 20$ 3-cycles ; $3!\binom{5}{4}$ 4-cycles ; $4!$ 5-cycles ; $2\binom{5}{3}$ 3-cycles-transpositions.

Exercice 4. 1. L'idée est d'exploiter $u(a, b)u^{-1} = (u(a), u(b))$. Si a, b, c sont distincts et si u est dans le centre – la conjugaison est alors triviale – alors $\{a, b\} = \{u(a), u(b)\}$. De même, $\{a, c\} = \{u(a), u(c)\}$, donc par intersection $u(a) = a$, pour tout a.

2. Idem mais quatre éléments sont nécessaires, car $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Exercice 5. Une transposition est envoyée sur 1 ou sur -1. Toutes les transpositions étant conjuguées, elles ont toutes la même image. Il s'ensuit qu'un tel morphisme ne peut être que l'identité ou la signature.

Exercice 6. On compte toujours le nombre d'inversions. On a $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$. Et la seconde a 17 inversions, donc une signature -1.

Exercice 7. Ce sont les méthodes classiques de résolution par l'équation caractéristique !

Exercice 8.
À x fixé on pose $u_n = f^n(x)$, et la suite vérifie alors la relation de récurrence $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$. Puisque la fonction doit rester positive, le coefficient devant $(-3)^n$ est nul, ce qui donne $f(x == 2x$, qui réciproquement convient.

Exercice 9. Classique !

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il suffit d'écrire que $|u_{2n} - l| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang n_1, que $|u_{2n+1} - l| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang n_2, donc que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang $\max(2n-1, 2n_2+1)$. L'autre sens est immédiat, pour une partition quelconque de $\mathbb{N}$ en ensembles N_i, on ordonnerait les N_i par une extractrice ϕ_i, et on généralise les $|u_{\phi_i(n)} - l| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang n_i en $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang $\max_i \phi_i(n_i)$.

Exercice 2. Une suite intermédiaire pour un critère géométrique est naturellement donnée par $w_n = \sqrt{u_n v_n}$, et l'on vérifie qu'elle convient effectivement.

Exercice 3. L'idée est toujours la même : comparer aux suites géométriques. Par exemple avec le premier cas, si $l < 1$, alors à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} < c = \frac{1+l}{2}(> l) < 1$ donc par télescopage du produit $u_n < Kc^n$ où K est une constante (la donner explicitement) ! On conclut par convergence comparée. Noter que cela donne un résultat bien plus fort : la série $\sum u_n$ converge, car la série géométrique $\sum c^n$ converge (vers $\frac{1}{1-c}$). La dernière question se fait en revenant aux définitions et en manipulant astucieusement les inégalités.

Exercice 4. L'adjacence est immédiate. Pour l'irrationalité, on suppose toujours que $e = \frac{p}{q}$. Puisque $u_n < e < v_n$, on obtient que $q!p$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs (lesquels ?), ce qui est absurde.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. 1. Il suffit de traduire le fait que le quotient est entier, en notant que $x^2+2=(x+2)(x-2)+6$. On obtient finalement $x \in 2+\mathrm{Div}(6)$.

2. On se ramène à $(x-5)(y-5)=25$, et on conclut par décomposition en facteurs premiers.

3. Il n'y a de dix cas à examiner, modulo 10. On obtient 0 ou 4 modulo 10.

Exercice 2. Les $2013!+k$ avec $2 \leq k \leq 2012$ sont composés car k divise toujours $2013!$ sont divise le nombre entier.

Exercice 3. La condition est nécessaire par définition du PGCD et suffisante par le théorème de BÉZOUT.

Exercice 4. Puisqu'on a immédiatement tous les diviseurs avec leurs décomposition en facteurs premiers, on obtient le produit des valuations incrémentées de 1.

Exercice 5. On a $n+1\binom{2n+1}{n+1}=(2n+1)\binom{2n}{n}$. Or, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux car $2(n+1)-(2n+1)=1$ (BEZOUT), donc par le théorème de GAUSS on a le résultat.

Exercice 6. 1. C'est clairement suffisant. Puis supposons $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$ sous forme irréductible. En passant au carré, $n \mid p^2$; puis $p^2=nq^2$ avec $p \wedge q=1$ donc $p^2 \mid n$ et donc $n=p^2$.

2. Avec les mêmes notations, si $x^n=k \in \mathbb{Z}$, alors $p^n=q^n k$. Puisque $q^n \wedge p^n=1$ comme p et q, on a $q^n \mid p^n$ donc $q^n=1=q$ et on a le résultat.

Exercice 7. Nécessairement $d \mid m$, et réciproquement si tel est le cas alors $x=d$ et $y=m$ conviennent.

Exercice 8. On écrit $p^2-1=(p-1)(p+1)$, donc on obtient le produit de deux nombres pairs, et même d'un pair et d'un multiple de quatre (deux entiers pairs consécutifs), donc $8 \mid p^2-1$. Puis, l'un est multiple de 3 car il y a un multipe de trois parmi les consécutifs $p-1$, p, $p+1$ et ce ne peut être p car il est premier distinct de 3.

Exercice 9. 1. La propriété est bonne à retenir et se prouve par réucrrence simple et facile.

2. La relation prouve que les F_n sont premiers entres eux (sinon un diviseur commun diviserait 2, donc ils seraient pairs... ! Il y a donc injectivité de l'application qui à F_n associe son plus petit facteur premier.

Exercice 10. 1. Avec les notations usuelles, $2^a-1=2^{bq+r}-1=2^r(2^{bq}-1)+2^r-1=2^r(2^b-1)(1+2^b+\cdots+2^{b(q-1)})+2^r-1$ et $2^r-1<2^b-1$ donc est bien le reste. Puis, avec la suite descendante $(r_n)_n$ des restes de l'algorithme d'EUCLIDE, il vient $pgcd(2^a-1,2^b-1)=pgcd(2^b-1,2^{r_0}-1)=pgcd(2^{r_0}-1,2^{r_1}-1)=\cdots=pgcd(2^{r_m}-1,2^0-1)=2^{r_m}-1$.

Exercice 11. 1. On remarque que $k\binom{p}{k}=p\binom{p-1}{k-1}$, donc que $p \mid k\binom{p}{k}$ et on conclut avec le théorème de GAUSS puisque p est premier et supérieur à k.

2. On le prouve par récurrence, en développant avec le binôme de NEWTON $(n \pm 1)^p$.

Élements de correction

Exercice 1. C'est toujours vrai dans le cas trivial $n = 1$. Sinon, avec $X = A$ on obtient que det $(A) = 0$ par multilinéarité. On se sert alors du fait que A est équivalente à J_r *via* P et Q. Avec la matrice $X = P(I_n - J_r)Q$, on obtient une contradiction.

Exercice 2. 1. La fonction $\lambda \mapsto \det(A + \lambda B)$ est polynômiale donc continue. Elle est non nulle en 0, donc il en va de même sur un voisinage. De manière générale, garder à l'esprit que le déterminant est un polynôme est souvent utile.

2. La suite de matrices $M + \frac{1}{n} I_n$ converge vers M. Elles sont inversibles à partir d'un certain rang, car le polynôme $\det(M + \lambda I_n)$ n'a qu'un nombre fini de zéros. Ainsi, tout propriété « continue » sur les matrices peut être prouvée seulement sur les matrices inversibles, elle se prolonge alors par densité à toutes les matrices.

Exercice 3. L'application $A \mapsto (X \mapsto \mathrm{Tr}\, AX)$ est linéaire et à valeurs dans les formes linéaires. C'est un isomorphisme car elle est injective dans un espace de même dimension, car si $Tr(AX) = 0$ pour tout X, alors avec les A_{ij} on obtient la nullité de A.

Si f convient, avec les matrices élémentaires il vient $f(E_{ij}E_{kl}) = f(E_{kl}E_{ij})$, soit $\delta_{jk} f(E_{il}) = \delta_{li} f(E_{kj})$. On obtient notamment, pour $j = k = 1$, $f(E_{il}) = \delta_{il} f(E_{11})$. On trouve alors, pour tout A, $f(A) = tr(A) f(E_{11})$. Réciproquement, les traces conviennent par propriété.

Exercice 4. Les lois sont celles induites de $M_n(\mathbb{R})$, elles sont bien définies et $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un monoïde pour ces lois. Le problème se pose de savoir si l'inverse d'une matrice – qui existe dans $M_n(\mathbb{R})$ car le déterminant fait 1 – est bien à coefficients entiers. La formule de la comatrice donne $M^{-1} = (\det M)^{-1}{}^t\mathrm{com}(M)$ qui est à coefficients entiers si $\det M = \pm 1$, c'est en particulier vrai pour $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 5. Comme toujours, l'objectif est de préciser la forme des objets de cet étrange espace qu'est $\mathbf{A}_d(\mathbb{R}^n)$. Si f est une forme d-linéaire alternée en dimension n, alors son effet sur des vecteurs décomposés suivant une base e est, puisque f est multilinéaire et alternée donc antisymétrique,

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_d) = f\left(\sum x_{i1} e_i, \ldots, \sum x_{id} e_i\right) &= \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_d \leqslant n} x_{i_1 1} \cdots x_{i_d d} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_d}) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant n} \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) x_{i_1 1} \cdots x_{i_d d}}_{a_{I = \{i_1, \ldots, i_n\}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_d})} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_d}) \end{aligned}$$

ce qui fait que les a_I engendrent $\mathbf{A}_d(\mathbb{R}^n)$. En effet, ils sont n-linéaires alternés, car ce sont simplement des déterminants. On vérifie alors facilement qu'elle est libre, car si $\sum \lambda_I a_I = 0$, alors en évaluant en e_I on obtient la nullité de tous les termes sauf $a_I(e_I)$ qui vaut 1, et donne donc la nullité de λ_I. La dimension est ainsi du nombre de I, soit $\binom{n}{d}$.

Exercice 6. La preuve se fait par récurrence sur le nombre de blocs, en se servant d'un algorithme de Gauss pour faire tourner la récurrence. De manière générales, tout ce que l'on sait faire sur les matrices par bloc sont des opérations sur les lignes et les colonnes pour se ramener à des matrices diagonales par blocs ou triangulaires par blocs, dont on sait calculer les déterminants.

Exercice 7. La multiplicativité du déterminant donne $\det(A^2) = (-1)^n = (\det A)^2$, donc nécessairement la dimension est paire.

Exercice 8. La formule définissant le déterminant donne $\overline{\det A} = \det \overline{A}$, $\det {}^tA = \det A$ et $\det A = 0$ pour une matrice symétrique en dimension *impaire*. On ne peut rien dire en dimension paire, en effet la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique, mais son déterminant n'est pas nul.

Exercice 9. Exercice très important, dont il convient de connaître les méthodes et les idées. Pour Vandermonde, on peut opérer sur les lignes et rechercher une relation de récurrence. Mais l'idée économique et puissante est de remplasser a_n par X. En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que le coeffiocient de X^{n-1} est le Vandermonde d'ordre $n - 1$. Puis, le polynôme s'annule en chaque x_i, donc est factorisable par $\prod(X - x_i)$ qui est de degré $n - 1$. On obtient $V_n = \prod(x_n - x_i) V_{n-1}$ et une récurrence immédiate donne la formule bien connue.

Pour le déterminant de Cauchy, on raisonne de même : manipulations ou $n \leftarrow X$ et voir une fraction rationnelle en développant. Pour Hürwitz, on ajoute X à chaque coefficients. En soustrayant une colonne aux autres, on constate en développant que c'est un polynôme de degré 1. En calculant en $-b$ et en $-a$, on obtient les coefficients et on trouve la valeur. Ce déterminant dans le cas $a = b$ et $r_i = c$ est intéressant et peut se traiter par une technique fort utile également : décomposer en une somme de deux matrices plus simples, et y voir... une matrice scalaire plus un projecteur !

Pour la matrice compagnon, c'est une simple récurrence.

Exercice 10. La formule de la comatrice est évidemment la clé de l'exercice. Elle donne immédiatement que ${}^tMM =$ det MI_n. En prenant la trace (qu'il faut savoir calculer : c'est la somme des carrés des éléments de la matrice, pour le voir il suffit d'écrire explicitements les termes diagonaux du produit) on obtient det $M \geqslant 0$. En prenant le déterminant, on obtient det ${}^2M =$ det ^{M}. Si $n \neq 2$, le déterminant vaut 1 ou 0. S'il est nul, le rapport avec la trace donne $M = 0$, qui convient. S'il vaut 1, la matrice est dans $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}$; réciproquement, une telle matrice vérifie ${}^tMM = I_n =^t \mathrm{com}(M)M$, et vérifie donc l'équation car elle est inversible. Dans le cas $n = 2$, on les recherche à la main, on obtient les « complexes ».

Exercice 11. L'application f_u est une forme n-linéaire alternée. En dimension n, on sait que l'espace des telles formes est une droite vectorielle, en particulier engendrée par f – si elle est non nulle, sinon tout l'exercice est trivial – soit $f_u = \lambda_f f$. D'abord, λ_f ne dépend que de u : en effet, si $g = \alpha f$ est une autre forme n-linéaire alternée, $\lambda_f \alpha g = \lambda_f f = f_u = \alpha g_u = \alpha \lambda_g u$. En fixant une base b et en appliquant cela à det , on obtient en développant $\lambda_u =$ det ${}_u(b) =$ Tr u.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Vérifications faciles !

Exercice 2. Si on prend deux vecteurs unitaires u et v, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux car $(x+y|x-y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$. L'hypothèse donne fond $f(x+y$ et $f(x-y)$ orthogonaux, soit $\|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2$. On en déduit que l'image des vecteurs unitaires ont tous même norme, ce qui donne le résultat par normalisation des vecteurs.

Exercice 3. Si p est orthogonale, le théorème de PYTHAGORE donne $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x-p(x)\|^2 \geqslant \|x\|$. Réciproquement, on sait que p projette sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$, il s'agit donc de montrer qu'ils sont orthogonaux. On utilise une méthode varationnelle : si $x \in Im(p)$ et $y \in Ker(p)$, en développant $\|p(z = x+\lambda y)\|^2 \leqslant \|z\|^2$ on obtient nécessairement, par positivité d'une fonction affine, $(x|y) = 0$.

Exercice 4. Il suffit de montrer un sens. L'égalité revient aux inclusions par argument de dimension trivial puisque f est un isomorphisme. Le reste est aisé : $f(x)$ et $f(y)$ sont bien orthogonaux si x et y le sont, donc $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$, donc il y a égalité.

Exercice 5. Tout se base sur les propriétés classiques de la trace, notamment $Tr(AB) = Tr(BA)$. Il convient de savoir prouver la supplémentarité de A_n et S_n, ce qui se fait par analyse et synthèse. L'inégalité de CAUCHY – SCHWARZ donne le dernier résultat, avec égalité si, et seulement si, A est une homothétie positive.

Exercice 6. La stricte convexité s'obtient par l'inégalité triangulaire et le cas d'égalité ; l'uniforme convexité s'obtient grâce à l'identité du parallélogramme.

Exercice 7. C'est classiquement un produit scalaire, par linéarité et positivité de l'intégration, et parce qu'une fonction *continue* et positive d'intégrale nulle est nulle. L'orthogonal est plus difficile à trouver sans indications : il s'agit de l'ensemble des fonctions telles que $\int fP = 0$ pour tout polynôme P. Avec le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, on peut trouver P proche de f à ε près, et l'intégrale de fP – qui est nulle – est proche de l'intégrale de f^2 : $\int fP - \int f^2 = \int |f||P-f| \leq (b-a)\|f\|_\infty \varepsilon$.

Exercice 8. 1. Une telle fonction g ne pourraît être continue. En effet, si on considère les fonctions « tente » qui sont affines entre $(0, 2^n)$ et $(2^{-n}, 0)$ et nulles après, elles sont continues, mais le rapport $\frac{\|gf_n\|}{\|f_n\|}$ diverge.

2. Avec $P_n = (1-X)^n$, on obtient une valeur 1 en 0, pourtant l'intégrale converge vers 0, ce que l'on constate en majorant directement ou par le théorème de convergence dominée.

3. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, le théorème de représentation de RISEZ – immédiat en dimension finie – prouve l'existence et l'unicité d'un tel Q. S'il n'était pas de degré n, alors XQ serait encore dans $\mathbb{R}_n[X]$, et on aurait alors $0 = \int XQ^2$, ce qui impliquerait $Q = 0$.

Exercice 9. 1. Si la famille est liée, une relation entre les vecteurs donne la même relation entre les colonnes. Réciproquement, si la matrice n'est pas inversible, alors il existe une relation non triviale $\sum \lambda_i C_i = 0$ entre les colonnes, et donc le vecteur $\sum \lambda_i x_i$ est orthogonal à tous les x_i, mais est dans l'espace engendré par eux : il est donc nul car orthogonal à lui-même.

2. Il suffit de développer $|G(x_1, \dots, x_n, x)$ en écrivant $x = y+z$ avec $y \in Vect((x_i)_i)$ et z dans son orthogonal. Tous les termes de la dernière colonne s'annulent sauf le terme diagonale, il suffit alors de développer par rapport à la dernière colonne.

3. Il s'agit de calculer une distance à un espace, on reconnaît en effet le produit scalaire $(P,Q) = \int_0^1 PQ$, et on recherche donc (le carré de) la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X] = \{at^2+bt+c\}$. On applique simplement le résultat précédent en calculant les projections sur les X^i. Sans le résultat de GRAM, il faudrait trouver le projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, que l'on écrirait avec des constantes indéterminées $p(X^3) = aX^2+bX+c$, et on obtient les coefficients avec $(p(X^3), X^i) = (X^3, X^i)$.

Exercice 10. 1. Il s'agit de la définition séquentielle de la borne inférieure définissant la distance à une partie.

2. On écrit l'identité du parallélogramme $\left\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x-x_n\|^2 + \|x-x_m\|^2)$, on exploite la convexité en disant que $\left\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\right\| \geq d(x,C)$, et on exploite la définition de la suite $(x_n)_n$ pour prouver que $\|x_n - x_m\|$ tend vers 0 avec n et m.

3. La complétude donne l'existence d'une limite, qui est dans C qui est fermé par hypothèse.

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il suffit de montrer un sens. L'égalité revient aux inclusions par argument de dimension trivial puisque f est un isomorphisme. Le reste est aisé : $f(x)$ et $f(y)$ sont bien orthogonaux si x et y le sont, donc $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$, donc il y a égalité.

Exercice 2. On prouve que ce sont les composées d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal, qui conviennent clairement. Il suffit donc de prouver que les vecteurs unitaires sont envoyés sur des vecteurs de même norme. Si on prend deux vecteurs unitaires u et v, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux car $(x+y|x-y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$. L'hypothèse donne fond $f(x+y$ et $f(x-y)$ orthogonaux, soit $\|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2$. On en déduit que l'image des vecteurs unitaires ont tous même norme, ce qui donne le résultat par normalisation des vecteurs.

Exercice 3. On prouve que ce sont les rotations, qui vérifient trivialement la propriété car si (i,j,k) est une base orthonormée directe, alors (fi, fj, fk) également, et la propriété s'étend par linéarité. Réciproquement, si f conserve le produit vectoriel, alors (fi, fj, fk) est également orthogonale. On en déduit que $\|fk\| = \|fi\|\|fj\| = \|fk\|\|fi\|^2$ et donc soit $fi = 0$ et $f = 0$, soit $\|fk\| = 1$, ainsi que les autres. La famille (fi, fj, fk) est orthonormée, et directe puisque $fk = fi \wedge fj$, c'est donc une rotation.

Exercice 4. On vérifie directement que $f_a f_b = f_{\alpha+b+ab}$ et que $f_\alpha^p = f_{(\alpha+1)^p-1}$. Si $\alpha \neq -1$, on trouve un inverse $f_{-\alpha/(\alpha+1)}$, sinon c'est la projection sur $a^\perp$. Si $\alpha = 2$ c'est la réflexion par rapport à $a^\perp$, et si $\alpha \neq 0, 2$ on trouve $\|f_\alpha(\alpha)\| \neq \|f_\alpha\|$ qui n'est donc pas orthogonal.

Exercice 5. La formule de LAGRANGE prouve que $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$, c'est donc une isométrie. Si $f(x) = x$, la formule du double produit vectoriel – ou les propriétés d'orthogonalités du produit vectoriel – donne que $a \wedge x = 0$, soit $x \in Vect(a)$. La réciproque est évidente : on obtient ainsi une rotation autour de $Vect(a)$, et pour $x \in a^\perp$, $f(x) = x \wedge a$, donc l'angle vaut $\pm\frac{\pi}{2}$, le signe plus étant pour une orientation de l'axe selon a.

Exercice 6. Ce sont des rotations. On recherche tout d'abord l'axe en résolvant les systèmes $f(x) = x$. Puis, l'angle est obtenu avec $Tr(f) = 1 + 2\cos\theta$, et le signe de l'angle avec le signe du déterminant de $(x, u, f(i))$. On obtient des axes dirigés par $3i + j + k$, $i + j$, $i - 4k$ et $i + 4j + k$; et des angles $-arccos - \frac{5}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, etc.

Élements de correction

Exercice 1. Un sous-espace affine est clairement stable par passage aux droites, puisqu'il l'est par passage à un barycentre d'un nombre quelconque de points. Réciproquement, on veut montrer que $\{\vec{AM} \mid M \in X\}$ est un sous-espace vectoriel – c'est la direction de X. La stabilité par homothéties est claire puisque l'on reste sur la même droite. Pour la somme, un dessin suffit pour comprendre : la somme de $\vec{AM}$ et de $\vec{AN}$ vaut $2\vec{AI}$ où I est le milieu de $[MN]$. Or par hypothèse I est dans X car M et N le sont ; donc tout la droite (AI) est dans X, donc la somme des deux vecteurs également.

Exercice 2. En considérant les vecteurs, on a trois vecteurs qui forment une famille libre, qui déterminent donc entièrement l'application linéaire sous-jacente, ce qui donne l'unicité puisque l'image des points est connue. Le centre du quadrilatère est évidemment fixe, c'est l'isobarycentre des points qui sont permutés !

Exercice 3. L'isobarycentre des itérés successifs de tout point convient.

Exercice 4. On se place dans un repère (tant qu'à faire, donné par les trois premiers points) puis on passe aux coordonnées. L'isobarycentre se traduit par une relation de récurrence linéaire sur chaque coordonnée : on sait expliciter leurs valeurs en fonction de n.

Exercice 5. 1. En passant aux applications linéaires associées, on tombe sur une homothétie de même rapport mais de centre l'image du centre.

2. Il suffit de traduire la définition sur les applications : ce sont les translations.

3. On doit avoir $A + u = A + s(u)$ pour une translation de vecteur u et pour A dans l'espace invariant par la symétrie, donc u doit être dans la direction invariante.

Exercice 6. On raisonne sur les applications linéaires associées. L'hypothèse signifie simplement que tout $u(x)$ est colinéaire à x. On on sait que cela revient à u homothétie : si $ux = ax$ et $uy = by$, alors $u(x + y) = ax + by = c(x + y)$, et on a la conclusion en prenant deux vecteurs non colinéaires. Les applications affines qui ont pour applications associées les homothéties sont bien les homothéties et les translations.

Exercice 7. Il suffit de composer les applications linéaires associées. C'est bon s'il n'y a que des translations. Si une homothétie non triviale commute avec une translation, c'est que la translation est l'identité. Si deux homothéties commutent, en regardant l'image d'un centre on trouve deux points fixes : ils sont nécessairement égaux.

Exercice 8. 1. Il suffit décrire en coordonnées que $p(M)$ vérifie $x' + y' + z' = 1$ et que $\vec{Mp(M)}$ est dans $\mathrm{Vect}(i + j - k)$, et de résoudre le système.

2. C'est bien la représentation analytique d'une représentation affine. C'est une isométrie car $A^2 = I$. Ses points invariants sont $(x + y + z = 1)$, et elle symétrise parallèlement à $\mathrm{Vect}(i + 2j + k)$.

Élements de correction

Exercice 1. Classique ! On étudie la régularité, les symétries et périodicités, puis on dresse soigneusement les tableaux de variations de x, y, x', y'. S'il y a des branches infinies, on étudie $\frac{y}{x}$ aux bords, puis s'il converge vers l on évalue la limite de $y - lx$ pour trouver une éventuelle asymptote. On affine en recherchant des tangentes, des intersections avec les axes, des points multiples, des changement d'inflexion (annulation de $det(v, a)$), etc. Les points singuliers s'étudient avec le développement limité usuel

Exercice 2. Classique ! On étudie la régularité, on réduit par symétries et périodicité, on dresse le tableau de variations de r. La tangente est donnée par l'écart avec la droite radiale $\tan V = \frac{r}{r'}$.

Exercice 3. Classique ! Ce sont de simples calculs d'intégrale, attention toutefois à la formule $\int \sqrt{x'^2 + y'^2}$ qui n'est valable qu'en paramétrage cartésien !

Exercice 4. 1. C'est un résultat bien connu en physique et géométriquement évident : il suffit de dériver $\|\vec{OM}(t)\|^2 = \langle OM, OM \rangle$.

2. La vitesse est orthoradiale, et de plus $Det(OM, v)$ est de dérivée $Det(v, v) + Det(OM, a) = 0$, donc est constant, or il vaut Rv puisque les vecteurs sont orthogonaux.

Exercice 5. Un changement de paramétrage ne change pas la constance de la courbure. En se limitant aux paramétrages normaux, la condition s'écrit $\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$, d'où $\alpha = \alpha_0 + \frac{s}{R}$. Comme $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$ et $\frac{d\phi}{ds} = \sin\alpha$, on en tire $x = x_0 + R\sin\alpha(s)$ et $y = y_0 + R\cos\alpha(s)$, paramétrage d'un cercle. Si $R = 0$, on raisonne de la même façon et on trouve une portion de droite.

Exercice 6. On traduit l'équation pour un point en coordonnées polaires, et on obtient $r = \sqrt{2\cos 2\theta}$ qui est une courbe à étudier comme d'habitude.

Exercice 7. Dérivation partielle et composition.

Donner les dérivées partielles, éventuellement en fonction de la fonction apparaissant dans l'expression, des fonctions

$$f(u^2 + v^2, uv) \qquad f(r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad f(x + t, y + t) = f(x, y) \Longrightarrow xf'_1 + yf'_2 = 0$$

Exercice 8. Extremums locaux [4]

Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : B(0, 5) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3$

d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 9. Fonctions harmoniques.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si, et seulement si, son laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est nul.

a) Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

b) Montrer que f est harmonique si, et seulement si,φ' est solution d'une équation différentielle qu'on précisera.

c) En résolvant cette équation, déterminer f.

4. Pour le malheur de bien des âmes, l'Académie française a tranché en faveur d'*extremums* plutôt que d'*extrema* lors de la très controversée réforme de l'orthographe de 1990…

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Avec $y = x$ on obtient $a + b = 1$. Réciproquement on vérifie que cela convient, en distinguant $x \leqslant x$ et $x \leqslant y$.

Exercice 2. C'est une ingégalité triangulaire renversée : $d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$ puis $d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$ en passant à l'infimum.

Exercice 3. Pas de limite avec $x = y$ puis $x = 0$. On majore pour faire apparaître $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. Pas de limite également pour la troisième.

Exercice 4. Si le point limite n'est pas sur la diagonale, c'est bon par continuité de F. Sinon, soit $(x, y) \to a$ avec $x = y$ et $f'(x) \to f'(a)$ par continuité de la dérivée, soit avec $x \neq y$ et $F(x, y) = f'(c)$ avec $x \in]x, y[$ par les accroissements finis, et lorsque $(x, y) \to a$, $x \to a_1$. La fonction est continue.

Exercice 5. On dérive comme des fonctions d'une variable.

Exercice 6. Les taux d'accroissements partiels $\frac{1}{h}(f(h(a, b)) - f(0, 0))$ sont calculables et ont des limites finies lorsque $h \to 0$. Puis en $x = y^2$ la fonction ne tend pas vers sa valeur en $(0, 0)$.

Exercice 7. Réécrire intelligemment en $(0, 0)$ pour lever l'indétermination : $xy\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$ qui tend bien vers 0 en l'origine. On calcule les dérivées partielles, on calcule la dérivée en $(0, 0)$, on vérifie que les dérivées partielles tendent vers leur valeur en l'origine.

Exercice 8. Subtil mais joli exercice : on cherche les dérivées partielles de $\int_x^y c(z, t)\mathrm{d}t$ par rapport à x, y et z. Par rapport aux bornes c'est du programme de terminale : $c(y, t)$ et $-c(x, t)$. Par rapport à l'intérieur il faut prouver que l'on peut dériver à l'intérieur lorsque les bornes sont fixes : écrire la différence entre taux d'accroissement et intégrale de la dérivée et montrer la convergence vers 0 en majorant brutalement. Pour finir, la problème initial est la dérivée d'une composée.

Exercice 9. Appliquer la formule de dérivation des composées...

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Un sous-espace affine est clairement stable par passage aux droites, puisqu'il l'est par passage à un barycentre d'un nombre quelconque de points. Réciproquement, on veut montrer que $\{\vec{AM} \mid M \in X\}$ est un sous-espace vectoriel – c'est la direction de X. La stabilité par homothéties est claire puisque l'on reste sur la même droite. Pour la somme, un dessin suffit pour comprendre : la somme de $\vec{AM}$ et de $\vec{AN}$ vaut $2\vec{AI}$ où I est le milieu de $[MN]$. Or par hypothèse I est dans X car M et N le sont ; donc tout la droite (AI) est dans X, donc la somme des deux vecteurs également.

Exercice 2. En considérant les vecteurs, on a trois vecteurs qui forment une famille libre, qui déterminent donc entièrement l'application linéaire sous-jacente, ce qui donne l'unicité puisque l'image des points est connue. Le centre du quadrilatère est évidemment fixe, c'est l'isobarycentre des points qui sont permutés !

Exercice 3. L'isobarycentre des itérés successifs de tout point convient.

Exercice 4. On se place dans un repère (tant qu'à faire, donné par les trois premiers points) puis on passe aux coordonnées. L'isobarycentre se traduit par une relation de récurrence linéaire sur chaque coordonnée : on sait expliciter leurs valeurs en fonction de n.

Exercice 5. 1. En passant aux applications linéaires associées, on tombe sur une homothétie de même rapport mais de centre l'image du centre.

2. Il suffit de traduire la définition sur les applications : ce sont les translations.

3. On doit avoir $A + u = A + s(u)$ pour une translation de vecteur u et pour A dans l'espace invariant par la symétrie, donc u doit être dans la direction invariante.

Exercice 6. On prouve que ce sont les composées d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal, qui conviennent clairement. Il suffit donc de prouver que les vecteurs unitaires sont envoyés sur des vecteurs de même norme. Si on prend deux vecteurs unitaires u et v, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux car $(x+y|x-y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$. L'hypothèse donne fond $f(x+y$ et $f(x-y)$ orthogonaux, soit $\|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2$. On en déduit que l'image des vecteurs unitaires ont tous même norme, ce qui donne le résultat par normalisation des vecteurs.

Exercice 7. On raisonne sur les applications linéaires associées. L'hypothèse signifie simplement que tout $u(x)$ est colinéaire à x. On on sait que cela revient à u homothétie : si $ux = ax$ et $uy = by$, alors $u(x+y) = ax+by = c(x+y)$, et on a la conclusion en prenant deux vecteurs non colinéaires. Les applications affines qui ont pour applications associées les homothéties sont bien les homothéties et les translations.

Exercice 8. Il suffit de composer les applications linéaires associées. C'est bon s'il n'y a que des translations. Si une homothétie non triviale commute avec une translation, c'est que la translation est l'identité. Si deux homothéties commutent, en regardant l'image d'un centre on trouve deux points fixes : ils sont nécessairement égaux.

Exercice 9. 1. Il suffit décrire en coordonnées que $p(M)$ vérifie $x'+y'+z' = 1$ et que $M\vec{p(M)}$ est dans Vect$(i+j-k)$, et de résoudre le système.

2. C'est bien la représentation analytique d'une représentation affine. C'est une isométrie car $A^2 = I$. Ses points invariants sont $(x+y+z=1)$, et elle symétrise parallèlement à Vect$(i+2j+k)$.

Exercice 10. Par composition c'est une similitude d'angle π et de rapport 1, *i.e.* une symétrie centrale. De centre B et le milieu de $[AC]$ car B est envoyé sur lui-même et A est envoyé sur C.

Élements de correction

Exercice 1. La somme et la limite sont évidemment convexe, par contre ce n'est pas le cas des combinaisons linéaires : attention aux multiplications par des nombres négatifs !

Exercice 2. Pour pouvoir appliquer la seconde fonction à l'inégalité de convexité de la première, il faut qu'elle soit monotone. Si elle est croissante, la composée est convexe ; si elle est décroissante, la composée est concave.

Exercice 3. 1. La dérivée est strictement positive en un point, et la fonction est au dessus de la tangente en ce point, donc tend vers $+\infty$ (ou avec les taux d'accroissements $\tau_{0,x} \geqslant \tau_{0,1} > 0$.

2. Si une dérivée n'est pas nulle, f est au dessus d'une fonction affine, et croît donc infiniment en $+\infty$ ou en $-\infty$ (ou avec les taux d'accroissements : si $\tau_{a,b} \neq 0$, $\tau_{a,x}$ lui est supérieur pour $x > b$ et inférieur pour $x < b$, or dans les deux cas on obtient des limites infinies.

Exercice 4. 1. C'est simplement le théorème d'encadrement (« des gendarmes ») appliqué aux encadrements $f(y) \leqslant f(x) + (y-x)\tau_{x,y}$.

2. La croissance des taux d'accroissements en donne une limite à droite et à gauche en tout point, comme pour toute fonction croissante et majorée. Ce résultat donne en particulier la continuité de la fonction à droite et à gauche, *i.e.* la cointinuité.

Exercice 5. 1. Cela vient du fait que f décroît au voisinage de l'infini. En effet, $\tau_{a,x} \geqslant \tau_{a,b}$ pour $a < b < x$, donc à la limite $\tau_{a,b} \geqslant 0$.

2. Si on regarde la différence $f(x) - (ax + b)$, il s'agit d'une fonction convexe comme différence d'une fonction convexe et d'une fonction concave. Puisqu'elle tend vers 0 en $+\infty$ par définition de l'asymptote, elle est positive par ce qui précède, et f reste au dessus de son asymptote.

Exercice 6. Si $f(x_0)$ est un minimum local, il est global car $\tau_{y,x_0} \geqslant \tau_{x,x_0} \geqslant 0$ pour $y \geqslant x$ et x assez proche de x_0, donc $f(y) \geqslant f(x_0)$ pour tout $y \geqslant x_0$. Idem de l'autre côté, le dénominateur des taux d'accroisement étant négatifs.

Exercice 7. On consifère naturellement la fonction $y \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$. Elle décroît car sa dérivée est négative car f' est décroissante. Puisqu'elle est négative en 0, elle est négative sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8. La fonction inverse i est convexe sur $]0, +\infty[$, ce qui donne par une inégalité de Jensen $i\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum i(x_i)$, qui est le résultat voulu. Puis le logarithme est strictement concave, en passant au logarithme dans l'inégalité arithmético géométrique on a $\frac{1}{n}\sum \ln x_i \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum xi\right)$, ce qui est encore l'inégalité de Jensen.

Exercice 9. Convexité du $\ln$ pour la première, le reste en découle en appluquant la première et en sommant !

ÉLEMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Il suffit d'écrire que la première fonction envoie une combinaison linéaire au dessus de la combinaison linéaire des images, puis d'appliquer la seconde qui est croissante, et utiliser la même propriété.

Exercice 2. Il faut faire attention au fait que l'on n'a pas forcément dérivabilité. Mais dans tous les cas on a $f(x) \geq f(a) + (x-a)\tau_{b,a}$ pour $x \leq a$ ou $x \geq b$ car les pentes sont croissantes. Donc en l'infini, si $\tau_{a,b}$ n'est pas nul, on obtient une limite infinie. Nécessairement, f est bornée si, et seulement si, elle est constante.

Exercice 3. On se sert de la croissance des cordées tirées de $x_0 \in]a, b[$:

$$\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

et le théorème des trois fonctions permet de conclure.

Exercice 4. Si a est minimum local de f, alors pour $b > c > a$ et c suffisamment proche de a, on a par croissance des cordes $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq 0$
et on raisonne de même pour $c < a$ en faisant attention aux signes !

Exercice 5. Pour $a, b \in I$, pon introduit $A = \{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$. L'hypothèse donne la stabilité de A par moyenne arithmétique de deux éléments. Per récurrence, A contient donc les $\lambda/2^n$ pour $\lambda \in A$, donc nottament les $k/2^n$ pour k entier. On approche donc un par $E(\lambda 2^n)/2^n$ et on passe à la limite pour obtenir que λ est également dans A.

Exercice 6. 1. On choisit a et b dans I, et on veut prouver que λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est atteint, autrement dit que l'on peut trouver un x tel que $f'(x) = \lambda$. Le théorème des accroissements finis affirme que cela est vrai s'il y a une pente de λ. On s'intéresse alors des pentes, notamment de celles issues de $(a, f(a))$ et de $(b, f(b)$:

$$\phi : t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \qquad \psi : t \longmapsto \frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$

On prolonge ces deux applications en a et b respectivement, par $f'(a)$ et $f'(b)$. On obtient ainsi deux applications continues sur $[a, b]$, leurs images sont donc deux segments. Puisqu'ils contiennent tous les deux $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, la réunion des deux intervalles est un segment, qui contient au moins $[f'(a), f'(b)]$, donc qui contient λ : l'un des deux contient donc λ, et on conclut par la formule des accroissements finis.

2. La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ convient.

Exercice 7. $\sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$ holderienne donc uniformément continue. En effet, en considérant les carrés il vient $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$, donc si $|x-y| \leq \varepsilon^2$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$. Elle n'est pas lipschitzienne au voisinage de zéro car sa dérivée diverge vers l'infini ; elle est lipschitzienne dès que l'on retire un tel voisinage.

Observons que $\ln$ n'est pas uniformément continue. Si tel était le cas, on aurait $|\ln x - \ln y| \leq \varepsilon$ dès que $|x-y| \leq \delta$. Alors avec $y = x + \delta$, on aurait $\ln\left(\frac{x+\delta}{x}\right)$ inférieur à ε, alors que cette quantité diverge vers l'infini en 0. Elle n'est a fortiori pas lipschitzienne, mais elle l'est dès que l'on retire un voisinage de zéro.

$x \ln x$ est prolongeable par continuité en 0. On obtient donc une fonction continue sur un segment, donc uniformément continue par le théorème de Heine.

Exercice 8. La fonction $x \mapsto f(x) + tg(x)$ est continue sur un segment donc admet une borne supérieure qu'elle atteint, disons en x_t. On a alors $\phi(t) - \phi(t') = f(x_t) + tg(x_t) - f(x_{t'}) - t'g(x_{t'})$. Puisque $f(x_{t'}) + tg(x_{t'}) \leq f(x_{t'}) + t'g(x_{t'})$ par définition, il vient $\phi(t) - \phi(t') \leq (t-t')g(x_t) \leq \|g\|_\infty (t-t')$. On obtient ainsi la lipschitzianité.

Exercice 9. La fonction est uniformément continue, donc si deux éléments sont proches d'au plus δ, alors leurs images sont proches d'au plus ε. L'hypothèse de convergence donne $f(n\delta)$ convergeant vers 0. Vient alors l'idée de découper la droite réelle en segments $[n\delta, (n+1)\delta]$: pour n suffisamment grand, les $f(n\delta)$ sont inférieurs à ε. Les x suffisamment grands sont proches de ces $n\delta$ de moins de δ, donc les $f(x)$ sont proches de certains $f(n\delta)$ de moins de ε, et ceux-ci sont proches de 0 à moins de ε. Cela prouve le résultat : les $f(x)$ sont proches de 0 à moins de 2ε pour x suffisamment grand, ce qui traduit bien la convergence vers 0.

On obtient un contre exemple avec $f(x) = n$ si $x = \pi^n$ et 0 sinon. La fonction le converge pas vers 0 puisqu'elle diverge suivant la suite π^n qui tend vers l'infini, mais elle tend vers 0 suivant les suites arithmétiques, une seule valeur des $k\pi^n$ pouvant être non nulle : si $k\pi^n = k'\pi^{n'}$, alors $\pi^{n-n'}$ serait rationnel, ce qui n'est pas puisque π est transcendant.