Leçons pour l’agrégation de mathématiques

Didier Lesesvre

« *Notre connaissance sera toute morte dès lors que sera fermée la porte du futur.* »
Dante, *Enfer*, Chant X

Préface

Cette version de `god.pdf` est peu ou prou telle qu'elle était lors de la fin de mon année de préparation à l'agrégation, bien balbutiante et imparfaite. Si elle peut apporter quelques idées nouvelles, approches originales ou formulations différentes à certains, j'en serai très heureux. Si elle se fait le germe de réflexions et débats autour de ces petits thèmes d'agrégation, j'en serai plus ravi encore.

Pour l'améliorer toujours plus, et tout du moins en faire un travail achevé plutôt que l'actuel chantier, je compte sur vos remarques, critiques et idées, et je serai ravi de les prendre en compte et d'y répondre, concernant les plus profondes approches philosophies, le contenu et les choix mathématiques ou encore les plus ineffables erreurs typographiques. N'hésitez donc pas à m'envoyer un petit message, à `didier@gics.fr`.

Introduction

Table des matières

Rapport du jury. Des exemples de nature différente doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel, sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas. Par ailleurs, il ne faut pas confondre exemples et remarques générales. Les actions naturelles de PGL(2,Fq) sur les droites du plan donnent des injections intéressantes pour q = 2, 3.

Φ L'espace est la condition et le fondement de toute connaissance (Kant, 1781), il importe donc de l'étudier. Cette étude ne doit pas être axiomatique mais interne, seul le mouvement permet de comprendre l'espace (Poincaré 1902, Piaget 1937). C'est le fondement du programme d'Erlangen (Klein, 1872) : ce sont les mouvements qui déterminent la géométrie de l'espace : structure (Sylow), incertitude (Galois), etc.

H Opérations naturelles en géométrie depuis les grecs tardifs (considérées comme fonctions ?), action du groupe de permutations sur les racines par Lagrange, puis prise de conscience de la structure de groupe derrière l'opération par Galois.

Avis. Attention à ne pas s'enfermer dans les groupes comme Perrin. C'est une leçon qui mérite des illustrations variées, géométriques notamment. Souligner le caractère très universel de la notion de mouvement dans une structure et d'action de groupe.

⋆ ⋆ ⋆

1 Groupes opérant sur un ensemble – généralités [Alessandri(1999)]

1.1 Actions de groupes et géométries

Δ Une action de groupe $G \curvearrowright X$ est la donnée d'un morphisme $G \to \mathfrak{S}(X)$, *i.e.* d'une opération $G \times G \to X$ vérifiant $g'(gx) = (g'g)x$ et $ex = x$.

E $k \curvearrowright E$ pour tout espace vectoriel E, $A \curvearrowright M$ pour tout module M.

Θ Tout sous-groupe de G agit également sur X par action induite.

Δ Une action est fidèle si $Ker\phi = \{e\}$. On a toujours $G/Ker(\phi) \curvearrowright X$ fidèlement.

E Les actions naturelles $H \curvearrowright X$ où $H \leqslant \mathfrak{S}(X)$ agissent toujours fidèlement. Ainsi $GL(E) \curvearrowright E$, $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [1, n]$

A (Théorème de Cayley) $G \curvearrowright G$ fidèlement par translations. En particulier tout groupe fini G d'ordre n se plonge dans $\mathfrak{S}_n$

1.2 Transitivité et orbites

Δ Une action est transitive si $\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = gx$. Elle est dite K-transitive si $\forall (x_k)_k, (y_k)_k \in X^k, \exists g \in G, \forall k, y_k = gx_k$.

E $\mathfrak{S}(X) \curvearrowright X$ transitivement, $GL(E)$ agit n-transitivement sur les bases

A $\mathfrak{S}_n$ agit n-transitivement et A_n agit $(n-2)$-transitivement. Les 3-cycles sont conjugués dans A_n et A_n est simple pour $n \geqslant 5$.

E $SO(E)$ agit transitivement sur les sphères

E $GA(\mathbf{R}^2)$ agit transitivement sur les triangles, PG agit transitivement sur les coniques

E $Gal(P, k)$ agit transitivement sur les racines de P s'il est irréductible

A
- ⋆ (tiers)
- ⋆ (Pappus)
- ⋆ (ellipse de Steiner)

Δ Les classes de transitivité d'une action, *i.e.* les classes d'équivalence pour la relation $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G, y = gx$, sont appelées orbites. L'orbite de x est $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. Les orbites partitionnent G et G agit transitivement sur chacune d'elles.

E [Caldero-Germoni(2013), Mneimné()]
- ⋆ $GL_n(\mathbf{R}) \curvearrowright M_n(\mathbf{R})$ par conjugaison : $P \cdot M = PMP^{-1}$. Les orbites sont les classes de similitudes et sont caractérisées par les invariants de similitudes.
- ⋆ $GL_n(\mathbf{R})^2 \curvearrowright M_n(\mathbf{R})$ par l'opération de Steiniz : $(P, Q) \cdot M = PMQ^{-1}$. Les orbites sont paramétrées par le rang.
- ⋆ $O_n(\mathbf{R}) \curvearrowright S_n^{++}(\mathbf{R})$ par congruence : $O \cdot M =^t OSO$. Les orbites sont paramétrées par les valeurs propres.
- ⋆ $GL_n(\mathbf{R}) \curvearrowright M_n(\mathbf{R})$ par congruence : $P \cdot M =^t PSP$. Les orbites sont la classification des formes quadratiques.
- ⋆ $GL_3(\mathbf{R}) \curvearrowright P_2(\mathbf{R})$ 3-transitivement + birapport.

A Toute permutation se décompose de manière unique en produit de cyles à supports disjoints. Les classes de conjugaison sont données par les partitions de n.

2 Étude d'ensembles à travers un groupe opérant [Alessandri(1999)]

2.1 Formule des classes et applications

Δ Le stabilisateur de $x \in X$ est $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$. On parle de centralisateur dans le cas de l'action par conjugaison sur G, et de normalisateur dans le cas de l'action par conjugaison sur les sous-groupes de G.

E $(\mathfrak{S}_n)_i \cong \mathfrak{S}_{n-1}$, $(SO_n(\mathbf{R}))_x \cong SO_{n-1}(\mathbf{R})$

Θ Si $y = gx$, alors $G_y = gG_xg^{-1}$. En particulier, les stabilisateurs d'une même orbite sont équipotents.

Θ L'application $gG_x \in G/G_x \mapsto gx \in Gx$ est une bijection. Les espaces homogènes sont le modèle de la transitivité.

Θ (Formule des classes) Si X et G sont finis, $|X| = \sum |Gx| = |G| \sum \frac{1}{|G_x|}$

A (Théorème de Cauchy) Pour tout $p|n$ avec p premier, il existe un élément de G d'ordre p.

A (Théorème de Ore) Si p est le plus petit diviseur premier de n, tout $H \leqslant G$ d'indice p est distingué dans G.

A Il y a toujours des points fixes pour l'action d'un p-groupe. En particulier le centre d'un p-groupe n'est pas trivial. On en déduit que les p-groupes sont les groupes ayant des sous-groupes d'ordres les puissances de p inférieures.

Θ (Théorèmes de Sylow) Si G est un groupe d'ordre $p^a m$ avec p ne divisant pas m, alors :
- ⋆ Il existe un sous-groupe d'ordre p^a
- ⋆ Tous les tels p-Sylow sont conjugués
- ⋆ Le nombre de p-Sylow est congru à 1 modulo p et divise m

Θ (Théorème de Wedderburn) Toute algèbre à division finie est un corps commutatif.

2.2 Formule de Burnside et coloriages [Baumard and Page(2012)]

Θ (Formule de Burnside) Le nombre d'orbites de $G \curvearrowright X$ est $g = \sum |fix(g)|$ où $fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$

A Si l'action est transitive et $|X| > 1$, il existe un g sans point fixe.

Θ Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

Δ Un coloriage est l'orbite de X sous l'action d'un $G \leqslant \mathfrak{S}(X)$ (les symétries).

Δ On définit l'indice d'une permutation τ par $ind(\tau) = \prod x_i^{e_i(\tau)}$ où $e_i(\tau)$ est le nombre de i-cycles dans τ.

Θ Le nombre de (q, G) coloriages de X est $\frac{1}{|G|} \sum ind(g) = P_G(x_1, \ldots, x_n)$

Θ (Théorème de Polya) Si $G \leqslant \mathfrak{S}_n$, $|X| = n$, $|C| = q$ et $\sigma_i = \sum c_j^i$, alors le nombre de (q, G)-coloriages de X avec f_r éléments de couleur c_r est le coefficient de $\prod c_i^{f_i}$ dans $P_G(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

A Coloriages de polyèdres

3 Actions topologiques et différentiables [R. Mneimné(2009)]

3.1 Actions continues et homéomorphismes

3.2 Résultats de connexité

4 Représentations linéaires de groupes [Serre(1998)]

4.1 Actions linéaires

On se place dans un $\mathbf{C}$-ev V et un groupe fini G.

Δ Une représentation linéaire est une action linéaire $G \curvearrowright V$, *i.e.* un morphisme $G \to GL(E)$.

E Représentation unité, représentation de permutation

Δ Une sous-représentation $W \leqslant V$ est un sous-espace stable par l'action.

Θ Toute sous-représentation admet une sous-représentation supplémentaire.

A Toute représentation est somme directe d'irréductibles

4.2 Théorie des caractères

Δ Le caractère d'une représentation $\rho : G \curvearrowright V$ est $\chi_\rho : g \mapsto Tr(\rho_g)$.

E Les caractères classiques $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$, $\chi_{V\otimes W} = \chi_V\chi_W$, $\chi_{Hom(V,W)} = \chi_V\chi_W^\star$

Δ Un G-morphisme est une application vérifiant $f(gx) = gf(x)$.

Θ (Lemme de Schur) Tout G-morphisme entre représentations irréductibles est une homothétie.

A La moyenne sur G d'une application linéaire h est soit nulle, soit égale à $\frac{1}{n}Tr(h)$.

Δ On définit un produit scalaire hermitien par $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum \phi(t)\psi(t)^\star$.

Θ Pour deux représentations irréductibles ρ et π, $\langle \chi_\rho, \chi_\pi \rangle = \delta_{\rho\cong\pi}$, *i.e.* les caractères irréductibles forment une famille orthonormale.

Θ Si $W = \bigoplus W_i^{\oplus a_i}$, alors $a_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$. Il est en particulier indépendant de la décomposition.

A Les représentations sont déterminées par leurs caractères

A L'irréductibilité est caractérisée par $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

4.3 Espace des fonctions centrales et nombre d'orbites

Θ Chaque sous-représentation irréductible est contenue le nombre de fois égal à son degré, et $\sum n_i\chi_i(s) = \delta_{s=e}$.

Δ Une fonction est centrale si elle est constante sur les classes de conjugaison.

Θ Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur le groupe G.

Θ Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes.

A On a $\sum_i \chi_i(s)\chi_i(s)^\star = g/c(s)$.

Autres idées à explorer...

Groupe symétrique

Produits semi-directs

Plus de géométrie : Steiner

• **Développements.**

⋆ **Action de $PSL_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré, [Alessandri(1999)]**

⋆ **Théorème de Polya, [Baumard and Page(2012)]**

⋆ **Sous-groupes finis de SO_3, [Combes(2003)]**

⋆ **Théorème $p^a q^b$ de Burnside, [G. James(2004)]**

⋆ **Théorème de Wedderburn, [Perrin(1996)]**

⋆ **Simplicité de A_n**

Références

[Alessandri(1999)] pour la théorie générale des actions de groupes et pour de belles applications : le point de vue est parfait, c'est exactement une théorie vivante et géométrique des actions de groupes à la Klein. [Mneimné()] pour un petit panorama, puis l'excellent [Caldero-Germoni(2013)] pour de nombreux exemples d'actions très variées. [Perrin(1996)] et les livres d'exercices attachés pour ce qui est application interne aux groupes, [Alessandri(1999)] pour le produit semi-direct. La géométrie trouve une bonne inspiration dans [Berger()] pour ce qui est affine et des applications. Les actions topologiques dans [R. Mneimné(2009)]. Les représentations linéaires dans [Serre(b)] et les autres.

102. Groupes de nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Rapport du jury. Les propriétés des polynômes cyclotomiques doivent être énoncées. Leur irréductibilité sur Z doit être maîtrisée. Il est tout à fait possible de parler d'exponentielle complexe, de théorème du relèvement ou de séries de Fourier tout en veillant à rester dans le contexte de la leçon. Les polynômes cyclotomiques (programme 2009) trouveront naturellement leur place dans cette leçon. Leur irréductibilité doit être maîtrisée. Il y a trois réalisations de ce groupe, SO(2), U(1) et $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Chacune est reliée à un aspect géométrique, algébrique, arithmétique. C'est l'occasion de s'interroger sur l'exponentielle complexe, ce qu'est le nombre π, la mesure des angles. Quelle place trouve la suite exacte $2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ U(1) ? Y-a-t-il une section continue ?

Φ Les nombres complexes sont un outil puissant, en géométrie comme en algèbre. La richesse de leur direction est entièrement déterminée par la sphère unité et les propriétés de ses éléments, notamment de ses sous-groupes, interviennent donc fréquemment.

H

Avis. Ne pas dévier dans l'étude des nombres complexes en général.

⋆ ⋆ ⋆

1 Nombres complexes de module 1 et géométrie [?]

1.1 Le groupe $\mathbf{U}$

Δ L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbf{U}$.

Θ $\mathbf{U}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{C}^\star$, noyau du morphisme $z \mapsto |z|$.

Θ $\mathbf{U}$ est le plus grand sous-groupe borné de $\mathbf{C}^\star$, et $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}_+ \times \mathbf{U}$.

Θ $\mathbf{U}$ est un connexe compact.

1.2 L'exponentielle complexe [Rudin(2009)]

Δ L'exponentielle est définie sur $\mathbf{C}$ par $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, série entière qui a un rayon de convergence infini.

Θ L'exponentielle est un morphisme surjectif de $(\mathbf{C}, +)$ dans $(\mathbf{C}^\star, \times)$.

Θ L'application $F : t \in (\mathbf{R}, +) \mapsto e^{it} \in (\mathbf{U}, \times)$ est un morphisme surjectif mais non injectif, On note π le réel positif tel que $Ker(f) = 2\pi\mathbf{Z}$. En particulier $\exp(i\mathbf{R}) = \mathbf{U}$ et $\mathbf{U} \cong \mathbf{R}/2i\pi\mathbf{Z}$.

A Tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique sous forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Θ Tout morphisme continu de $(\mathbf{R}, +)$ dans $\mathbf{U}, \times)$ est de la forme $t \mapsto e^{i\theta t}$.

Θ (relèvement)

1.3 Angles et rotations

Δ La détermination principale de l'argument d'un complexe z est l'unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$.

Δ $SO_2(\mathbf{R})$ est l'ensemble des isométries positives du plan.

Θ $e^{i\theta} \in (\mathbf{U}, \times) \mapsto R_\theta \in SO_2(\mathbf{R})$ est un isomorphisme topologique de groupes. En particulier, $SO_2(\mathbf{R})$ est commutatif et connexe.

Δ On définit sur les couples de vecteurs (u, v) la relation $(u, v)R(u', v')$ s'il existe $R_\theta \in SO_2(\mathbf{R})$ telle que $u' = R_\theta u$ et $v' = R_\theta v$. La classe d'équivalence de (u, v) est appelé l'angle orienté entre les vecteurs u et v.

Θ Si on oriente E, ...

Δ Cet angle θ est appelé mesure de l'angle orienté entre u et v.

1.4 Trigonométrie

Δ Le cosinus est $\cos = Re(\exp)$. Le sinus est $\sin = Im(\exp)$.

Θ Le cosinus est la partie paire de l'exponentielle. Le sinus est sa partie impaire.

Θ (Euler) $\forall x \in \mathbf{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Θ (Moivre) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

A Le noyau de Dirichlet est $D_n(x) =$ et le noyau de Féjer est $F_n(x) =$

A (Tchebicheff) Il existe un unique polynôme de degré n vérifiant $\forall x \in \mathbf{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

1.5 Géométrie projective [?]

2 Racines de l'unité

2.1 Sous-groupes de $\mathbf{U}$

Θ Les sous-groupes de $\mathbf{R}$ sont soit denses dans $\mathbf{R}$ soit monogènes.

A Si a et b sont incommensurables, alors $A\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Θ Les sous-groupes de $\mathbf{U}$ sont soit fini, auquel cas ce sont des groupes de racines n-ièmes de l'unité pour un certain n, soit dense dans $\mathbf{U}$.

A Les sous-groupes finis de $\mathbf{C}$ sont les $\mathbf{U}_n$.

2.2 Racines n-ièmes de l'unité

Δ L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est $\mathbf{U}_n = \{x \in \mathbf{C} \mid x^n = 1\}$.

Θ $\mathbf{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![1, n]\!]\}$, en particulier est un groupe cyclique d'ordre n.

A Un nombre complexe non nul $\rho e^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes, à savoir les $\sqrt[n]{\rho} e^{2ik\pi/n}, k \in [\![1, n]\!]$.

Δ L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est l'ensemble $P_n \setminus \bigcup_{d|n, d\neq n} \mathbf{U}_d$ des racines primitives n-ièmes de l'unité qui ne sont pas racines primitives d-ièmes de l'unité pour $d|n, d \neq n$.

Θ $P_n = \mathbf{U}_n^\star$ est de cardinal $\phi(n)$.

2.3 Sommes de Gauss [Hindry(2008)]

2.4 Racines primitives de l'unité

3 Polynômes cyclotomiques [Gozard(2009)]

3.1 Premières propriétés

Δ Le n-ième polynôme cyclotomique est $\Phi_n = \prod_{\zeta \in \mathbf{U}_n^\times} (X - \zeta) \in \mathbf{C}_n[X]$.

Θ Φ_n est unitaire de degré $\phi(n)$ dans $\mathbf{Z}[X]$.

E ⋆
⋆
⋆

Θ $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

E $\Phi_{4,k} = X^2 + 1$.

Θ (Dirichlet) Il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n.

Θ (Kronecker)

Θ $\Phi_{n,\mathbf{Q}} \in \mathbf{Z}[X]$.

Θ $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et sur $\mathbf{Z}$.

Θ Si $car(k) = 0$ et $\zeta \in \mu_n^\star(k)$, son polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ est Φ_n dont $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}] = \phi(n)$.

Θ (Wedderburn) Toute algèbre à division finie est commutative, *i.e.* est un corps.

3.2 Corps cyclotomiques et conjugués

Δ Déf

Θ Le polynôme minimal est phi n

Θ degré, applications à des degrés particuliers

Θ les conjugués sont encore des racines nièmes, en particulier... (propriétés pré-Burnside)

Θ ($p^a q^b$ de Burnside)

Δ Un nombre est constructible en une étape par X à partir de nombres x_i s'il est intersection de deux éléments de X construits sur les x_i. Un élément est constructible par X s'il est constructible en un nombre fini d'étapes à partir de $(0,0)$ et $(1,0)$.

Θ (Gauss-Wantzel) Un nombre est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, il est au sommet d'une tour quadratique au-dessus de $\mathbf{Q}$.

A La trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle sont des problèmes impossibles.

Θ (Videla) Un nombre est constructible par droites, cercles et coniques si, et seulement si, il est au sommet d'une tour de corps sur $\mathbf{Q}$ dont les extensions intermédiaires sont de degré 2, 3 ou 4.

A La trisection de l'angle et la duplication sont possibles pour la construction conique, mais pas la quadrature du cercle.

Autres idées à explorer...

Fourier discret
Relèvement
Groupes duaux, caractères EDP, équation de la chaleur, méthodes finies
Tranformée de Fourier discrète Codes correcteurs BCH
Géométrie projective, 6 birapports, etc.

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème $p^a q^b$ de Burnside, [G. James(2004)]**
  - ⋆ **Théorème de Kronecker, [S. Francinou(2007a)]**
  - ⋆ **Théorème de Dirichlet, [S. Francinou(2007a)]**
  - ⋆ **Irréductibilité de Φ_n**

Références

La partie géométrique et élémentaire est faite dans le [**?**], peut-être le prologue de [Rudin(2009)] pour l'exponentielle complexe. Pour tout ce qui est cyclotomie et racines de l'unité, voir le [Gozard(2009)]. Les codes correcteurs dans [**?**]. Il y a peut-être des choses à prendre dans le Mérindol.

103. Exemples et applications des notions de sous-groupes distingués et de groupe quotient.

Rapport du jury. Les candidats parlent de groupes simples et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Il faudrait savoir par exemple que- tout morphisme de source un groupe simple est soit injectif soit trivial ; - dans un groupe simple, toute réunion de classes de conjugaison non triviale engendre le groupe (par exemple les éléments de la forme x²yx) ; - tout morphisme d'un groupe G vers un groupe abélien se factorise via Gab :=G/D(G). La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée il faut savoir la définir proprement. Seuls les candidats solides pourront s'y aventurer. La notion de quotient est importante en mathématiques et peut être utilement illustrée dans cette leçon, notamment au travers du sous-groupe dérivé. Des exemples et applications en géométrie élémentaire sont nécessaires. Il faut bien connaitre le cas du groupe S4, notamment V4 s'injecte dans A4 s'injecte dans S4 et faire le lien avec le tétraèdre. En général le stabilisateur d'un élément n'est pas un sous-groupe distingué, contrairement 'a ce que le jury a pu entendre.

Φ Recherche de groupes atomiques permettant de décomposer les groupes en suites de quotients successifs, et de dévisser ainsi un groupe en parties et morphismes plus simples.

H cf. Anne-Marie Aubert, Un peu d'histoire des groupes finis et quelques exemples simples, X-UPS.

Avis. Ne pas demeurer dans les résultats théoriques, mettre en application la notion dans de nombreuses situations, notamment explorer les groupes classiques, classifier les groupes de petits ordres ou d'ordres de type particulier, ou encore faire du Galois et de la résolubilité.

⋆ ⋆ ⋆

G désigne un groupe, K, H des sous-groupes de G.

1 Sous-groupes distingués et groupes quotients [calais(1984)]

1.1 Classes modulo H

Δ La classe de $x \in G$ à gauche (resp. à droite) modulo H est xH (resp. Hx). L'ensemble des classes à gauche (resp. à droite) de G est G/H (resp. $H\backslash G$).

E
- ⋆ Les classes d'entiers modulo n est $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Θ Toutes les classes à droite et à gauche sont équipotentes.

Δ L'indice de H dans G est $|G/H| = [H : G]$.

Θ Si R est une relation d'équivalence sur G, alors les propisitions suivantes sont équivalentes :

- ⋆ $\forall g, x, x' \in G, xRx' \Longrightarrow gxRgx'$, *i.e.* la loi de G respecte la relation R
- ⋆ Il existe sur G/R une loi de groupe telle que la projection canonique soit un morphisme
- ⋆ H est distingué dans G

1.2 Sous-groupes distingués et quotients

Θ Un groupe H distingué dans G, noté $H \triangleleft G$, est un groupe vérifiant les propriétés équivalentes quivantes :

- ⋆ $\forall x \in G, xHx^{-1} \subseteq H$, *i.e.* H stable par automorphismes intérieurs
- ⋆ $\forall x \in G, xH = Hx$, *i.e.* les éléments ont mêmes classes à gauche qu'à droite
- ⋆ $\forall x \in G, xHx^{-1} = H$

E
- ⋆ Les sous-groupes triviaux G et $\{e\}$ sont distingués dans G
- ⋆ les sous-groupes caractéristiques sont distingués
- ⋆ Le noyau d'un morphisme de groupes $\phi : GtoG'$ est distingué dans G
- ⋆ Le centre d'un groupe est distingué
- ⋆ Tous les sous-groupes d'un groupe abélien sont distingués
- ⋆ $\langle\tau\tau'\rangle \triangleleft V_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4$ mais $\langle\tau\tau'\rangle \ntriangleleft \mathfrak{A}_4$, en particulier la relation $\triangleleft$ n'est pas transitive

1.3 Propriétés des sous-groupes distingués

Θ Une intersection de sous-groupes distingué est distingué.

Δ La cloture normale d'un sous-groupe H de G est le plus petit sous-groupe distingué de G contenant H, *i.e.* l'intersection des sous-groupes distingués de G contenant H.

Θ Un sous-groupe d'indice 2 est distingué.

Θ L'image réciproque par un morphisme de groupe d'un sous-groupe distingué est un sous-groupe distingué. S'il est surjectif, l'image directe d'un sous-groupe distingué est un sous-groupe distingué.

Δ Le normalisateur de H dans G est $N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} \subseteq H\}$.

Θ $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.

Θ Si G est un p-groupe, alors

- ⋆ Si H est un sous-groupe strict de G, alors $H \neq N_G(H)$
- ⋆ Si K est un sous-groupe d'indice p, alors il est distingué dans G
- ⋆ Tout sous-groupe strict est inclus dans un sous-groupe d'indice p

Θ (Frattini)

A

2 Propriétés du quotient [calais(1984)]

2.1 Théorèmes de factorisation

Θ (correspondance) Si H est distingué dans G, alors $K \mapsto K/H$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes K de G contenant H sur l'ensemble des sous-groupes du quotient G/H, qui est aussi une bijection entre les groupes normaux vérifiant les mêmes hypothèses.

Θ (premier théorème de Noether) Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes et si H est distingué dans G, alors si $H \subseteq Ker(f)$, alors f passe au quotient, *i.e.* il existe $\overline{f} : G/H \to G'$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$. On peut en particulier toujours factoriser par le noyau, obtenant ainsi un isomorphisme.

Θ (deuxième théorème de Noether) Si H et K sont des sous-groupes de G, avec K distingué dans G, alors $H \cap K$ distingué dans H et $H/H \cap K \cong HK/K$.

Θ (troisième théorème de Noether) Si K et H sont deux sous-groupes distingués de G, avec $K \subseteq H$, alors H/K distingué dans G/K et $(G/K)/(H/K) \cong G/H$.

2.2 Simplicité

Δ Un groupe est simple s'il est non trivial et n'a pas de sous-groupes distingués non triviaux.

Θ Pour tout $n \geqslant 5$ et pour $n = 3$, $\mathfrak{A}_n$ est simple.

Beaucoup plus d'exemples ! les groupes classiques, les PSL, O3, An, etc.
Autres critères de simplicité ou de non simplicité : p-groupes, pq, p3 etc.

Θ avant Burnside

Θ ($p^a q^b$ de Burnside)

2.3 Commutateurs, centre et groupe dérivé

Δ Le commutateur de deux éléments $x, y \in G$ est $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Le groupe dérivé $D(G)$ de G est le groupe engendré par les commutateurs.

Θ On a les formules suivantes sur les commutateurs :

- ⋆
- ⋆
- ⋆

Θ $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G, en particulier distingué.

Θ $G/D(G)$ est le plus grand quotient commutatif de G, *i.e.* $G/D(G)$ est abélien et si G/H est abélien, alors $D(G) \subseteq H$.

Δ $G/D(G)$ est appelé l'abélianisé de G.

Θ Tout morphisme de G dans un groupe abélien se factorise par $D(G)$.

A (Frobenius-Zolotarev) $\forall u \in GL_n(\mathbf{F}_p) \subseteq \mathfrak{S}_{p!}, \varepsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$.

3 Produits direct, semi-direct, classification de groupes finis [Perrin(1996), Alessandri(1999)]

3.1 Produits directs

3.2 Produit semi-direct

Δ Si N et H sont deux sous-groupes de G, $H \curvearrowright N$ via $\phi : H \to Aut(N)$, le produit semi-direct NH est l'ensemble $N \times H$ muni de la loi $(n,h)(n',h') = (n\phi(h)(n'), hh') = (nh \cdot n', hh')$.

R Le produit est direct si, et seulement si, $\phi = id$.

Θ Si H et K sont deux sous-groupes de G vérifiant :

- ⋆ H distingué dans G
- ⋆ $H \cap K = \{e\}$
- ⋆ $HK = G$

Alors $G \cong H \times_\tau K$ via $(h,k) \mapsto hk$.

E
- ⋆ Le groupe diédral est $D_n \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}sd\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
- ⋆ $\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{A}sd\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathfrak{A}_4 \cong V_A sd\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
- ⋆ $GA(\mathcal{E}) \cong EsdGL(E)$
- ⋆ Le groupe des quaternions $\mathbf{H}$ n'est pas un produit semi-direct

3.3 Quelques classifications

Rappels sur les Sylow

Θ Les groupes d'ordre pq avec p et q premiers distincts sont $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ et, si $p|q-1$, $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}sd\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ qui n'est pas commutatif.

Θ Les groupes d'ordre 8 sont $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$, D_4 et $\mathbf{H}$.

Θ Les groupes d'ordre 12 sont...

Θ Isomorphismes de produits semi-directs...

Groupes d'ordre p^2, pq, p^2q, p^3, etc. cf. FG

4 Groupes nilpotents et résolubles [Delcourt(2007), Rotman(1995)]

4.1 Suites de compositions

Δ Une suite de composition de G est une suite $(G_i)_i$ telle que $\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$ et H_i distingué dans H_{i+1} pour tout i. Les H_i sont les termes de la suite, les $H_{i/1}/H_i$ en sont les facteurs. La suite est abélienne si les facteurs sont abéliens, cyclique si les facteurs sont cycliques, de Jordan-Hölder si les facteurs sont simples et non triviales.

E
- ⋆ Les suites de Jordan-Hölder des groupes simples sont triviales $\{e\} \leqslant G$
- ⋆ Les suites de Jordan-Hölder des groupes cycliques $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont les
- ⋆ Les suites de Jordan-Hölder de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \neq 4$ sont seulement $\{e\} \leqslant \mathfrak{A}_n \leqslant \mathfrak{S}_n$

Δ Un raffinement d'une suite de composition $(G_i)_i$ est une suite $(G'_i)_i$ dont $(G_i)_i$ est une sous-suite.

Θ (Zassenhaus) Si on a des sous-groupes de G tels que $H_1 \triangleleft H_2$ et $K_1 \triangleleft K_2$, alors $H_1(H_2 \cap K_1) \triangleleft H_1(H_2 \cap K_2)$ et $K_1(K_2 \cap H_2)$, de plus les quotients sont isomorphes entre eux et à $(H_2 \cap K_2)/(H_1 \cap K_2)(H_2 \cap K_1)$.

Δ Deux suites de compositions sont équivalentes si elles ont même longueur et si les facteurs isomorphes sont isomorphes entre eux, quitte à les permuter.

Θ (Schreier) Deux suites de composition d'un groupe G admettent des raffinements équivalents.

Θ (Jordan-Hölder) Si G admet une suite de Jordan-Hölder, alors toute suite de composition se raffine en une suire de Jordan-Hölder et toutes les suites de Jordan-Hölder sont équivalentes.

4.2 Suite centrale descendante et groupes nilpotents

Δ La suite centrale descendante de G est $(C^n(G))_n$ définie par $C^1(G) = G$ et $C^{n+1}(G) = [G, C^{n+1}(G)]$.

Θ Pour tout n, $C^n(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G, en particulier distingué.

Δ G est nilpotent s'il existe $n \in N$ tel que $C^{n+1}(G) = \{e\}$. Le plus petit entier n tel que cette situation a lieu est la classe de nilpotence de G.

E
- ⋆ Un groupe nilpotent de classe 0 est $\{e\}$, un groupe nilpotent de classe 1 est abélien
- ⋆ Le groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures est nilpotent de classe n

Θ Un sous-groupe d'un groupe nilpotent est nilpotent de classe inférieure.

Θ Tout p-groupe fini est nilpotent.

Θ Si G est un groupe d'ordre p^n et H un sous-groupe d'ordre p^k, alors il existe une suite de sous-groupes $(G_i)_i$ avec $\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$, et pour tout i, G_i distingué d'indice p dans G_{i+1}, et $G_k = H$.

4.3 Suite dérivée et groupes résolubles

Δ La suite dérivée de G est la suite $(D^n(G))_n$ définie par $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$.

Θ Pour tout n, $D^n(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G, en particulier distingué.

Δ G est résoluble s'il existe $n \in N$ tel que $D^n(G) = \{e\}$. Le plus petit entier n tel que cette situation a lieu est la classe de résolubilité de G.

E
- ⋆ Un groupe résoluble de classe 0 est $\{e\}$, un groupe résoluble de classe 1 est abélien
- ⋆ Le groupe des matrices triangulaire supérieures est résoluble non nilpotent

Θ Tout sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble de classe inférieure.

Θ Un groupe nilpotent de classe inférieure à $2^n - 1$ est résoluble de classe inférieure à n.

Θ Un p groupe fini est résoluble.

Θ (Remarque : Feit-Thomson) Tout groupe d'ordre impair est résoluble, donc un groupe simple non commutatif est d'ordre pair.

Θ Un groupe de torsion de type fini et résoluble est fini.

4.4 Résolubilité par radicaux

Θ Si K est de caractéristiquer nulle et $P \in K[X]$, alors P est résoluble par radicaux si, et seulement si, $Gal(P/K)$ est résoluble.

E $P = X^5 - 6X + 3 \in \mathbf{Q}[X]$ n'est pas résoluble par radicaux.

Autres idées à explorer...

PLUS D'EXEMPLES ET D'APPLICATIONS !
Du galois : distingué = extension normale ?
Beaucoup plus de géométrie !
Des p-groupes

- **Développements.**

  ⋆ **An est simple pour n5, [Perrin(1996)]**

  ⋆ **Théorème $p^a q^b$ de Burnside, [G. James(2004)]**

  ⋆ **Théorème de Jordan-Hölder-Schreier, [Delcourt(2007)]**

Références

[calais(1984)] ou [Rotman(1995)] pour la structure générale du plan et de nombreux exemples. Voir [Gozard(2009)] et [Rotman(1998), 71-75] pour la résolubilité des équations par radicaux et pour la théorie de Galois. Des approfondissements et compléments dans [Gorenstein(2000)], notamment sur les p-groupes.

Rapport du jury. Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries A4, S4, A5 et relier sur ces exemples géométrie et algèbre. La structure des groupes abéliens finis doit être connue. Il semble important de connaitre les classes d'isomorphismes des groupes de cardinal inférieur à 6, et de savoir démontrer que tous les groupes finis se plongent dans un Sn. Un minimum de connaissance est exigible sur les groupes diédraux (description, présentation en terme de générateurs et relation).

Φ Les groupes finis sont naturellement les groupes les plus aisément manipulables de manière immédiate et sans outils supplémentaires. Plusieurs de ces groupes interviennent naturellement en arithmétique, en combinatoire ou encore en géométrie, et il est étonnant de constater l'omniprésence de ces groupes élémentaires comme constituants de nombreux groupes plus généraux. Se pose alors naturellement la question de leur classification, dont un premier aspect est, en analogie avec la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, de trouver des groupes atomiques en un certain sens et qui constituent tous les autres. Les groupes simples sont ici l'analogue des nombres premiers, et le théorème de Jordan-Hölder-Schreier l'analogue de la factorialité de **Z**. La finitude de ces groupes ouvre les portes à de nombreux autres résultats qui leurs sont propres : la théorie des actions de groupes donne des résultats propres aux groupes finis, notamment les théorèmes de Sylow qui permettent de connaître des éléments de structure d'un groupe à partir de son seul ordre ; et la théorie des représentations voit toute son information condensée en très peu d'information, les caractères des groupes finis.

H Les premières manifestation de groupes apparaissent dans les travaux de Lagrange sur la résolubilité d'équations polynomiales, et la notion est réellement identifiée et exploitée par Galois qui en développe largement la théorie sur le cas du groupe symétrique. C'est Cayley qui peu après dégage la notion générale de groupe. La géométrie est alors un terrain fécond pour la théorie des groupes qui trouve en le programme d'Erlangen une motivation féconde. La théorie des groupes se structure avec Jordan et von Dyck, avant de connaître un incroyable essor au XXe siècle, d'abord avec les travaux sur les représentations de Burnside et Frobenius, puis avec les nombreux travaux aboutissant à la classification des groupes simples finis en 1982.

Avis. Une leçon qui doit être bien illustrée mais qui ne doit pas être une leçon d'exemples non plus, ni dévier vers une théorie des groupes généraux ! Souligner la particularité de ce cas fini, dans les actions de groupes, dans les représentations, etc. Les nombreuses propriétés particulières des p-groupes notamment sont les bienvenues.

⋆ ⋆ ⋆

G désigne un groupe fini et n son ordre.

1 Premiers pas dans le monde des groupes finis : le cas abélien [Delcourt(2007)]

1.1 Premières propriétés

Θ (Lagrange) Si $H \leqslant G$, alors $|G|/|H| = |G/H|$, en particulier $|H| \mid |G|$.

A Un groupe G est fini si, et seulement si, il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

Δ L'exposant d'un groupe abélien fini est le PPCM des ordres de ses éléments.

1.2 Les $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Θ Les sous-groupes de $\mathbf{Z}$ sont les $n\mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$, ce sont également les idéaux.

Δ Le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est le groupe additif des classes d'entiers modulo n. C'est l'unique groupe cyclique d'ordre n à isomorphisme près.

Θ Un groupe d'ordre $p \in ¶$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Θ Les sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont les $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ avec $d \mid n$.

Θ L'ordre de m dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est $n \wedge m$.

Θ $x \wedge n = 1 \iff \overline{x} \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times \iff x$ engendre $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.

A $\phi(n)$ est le cardinal de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$

Θ
- ⋆ Si $p \geq 3, k \geq 1$, $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/p^{k-1}(p-1)\mathbf{Z}$
- ⋆ Si $p = 2, k \geq 3$, $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2^{k-2}\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
- ⋆ Si $p = 2, k = 2$, $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/2$

A $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ est cyclique si, et seulement si, $n \in \{2, 4, 2p^\alpha\}$ pour p premier impair.

1.3 Structure des groupes abéliens finis

Θ (lemme chinois) Si $n = n_1 \cdots n_p$ où les n_i sont premiers entre eux, alors $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/n_p\mathbf{Z}$.

Θ Tout groupe commutatif fini G est isomorphe à un $\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/d_p\mathbf{Z}$ où $d_i \mid d_{i+1}$.

Θ (facteurs invariants) Tout groupe commutatig fini G est isomorphe à un $\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/d_p\mathbf{Z}$ où $d_i \mid d_{i+1}$.

A Il y a autant classes d'isomorphismes de groupes abéliens d'ordre n que de partitions de n.

Θ Si $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, alors tout sous-groupe de G est abélien si, et seulement si,

- ⋆ $\forall i \in [\![1, r]\!], a_i \in \{1, 2\}$
- ⋆ $\forall i, j \in [\![1, r]\!], p_i \nmid p_j - 1$
- ⋆ $\forall i, j \in [\![1, r]\!], p_i$
  $not \mid p_j + 1$ si $a_j = 2$

Θ Un groupe d'exposant 2 est abélien.

Θ Si G/H est monogène, alors G est abélien.

Parler d'automorphismes

2 Groupes finis classiques [Delcourt(2007), Fresnel(2001)]

2.1 Les groupes symétriques

Δ Pour un ensemble E, on note $\mathfrak{S}(E)$ le groupe symétrique de E, c'est le groupe des permutations de E, *i.e.* le groupe des bijections de E dans E.

Θ Si $f : E \to E'$ est une bijection, alors $\sigma \mapsto f\sigma f^{-1}$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(E')$. Si E est de cardinal n, on note $\mathfrak{S}_n$ un représentant de sa classe d'isomorphisme, qui est de cardinal $n!$.

Θ Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$. Plus précisément on a les systèmes minimaux de générateurs de $\mathfrak{S}_n$ suivants :

- ⋆ $(1, i)$
- ⋆ $(i, i+1)$
- ⋆ $(1, 2), (1, 2, \ldots, n)$

Δ Une inversion de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Θ Il existe un unique morphisme de groupes non trivial $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$, appelé signature.

Δ Une permutation de signature 1 est paire, une permutation de signature -1 est impair. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est l'ensemble des permutations paires.

Θ Pour $n \geqslant 4$, $Z(\mathfrak{A}_n) = \{id\}$.

Θ $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Θ Pour $n = 3$ ou $n \geqslant 5$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple.

Θ Le seul groupe simple d'ordre 60 est $\mathfrak{A}_5$.

2.2 Les groupes diédraux

Δ Le groupe diédral D_n est le groupe des isométries laissant invariantes le polygône régulier à n côtés.

Θ D_n est composé de n réflexions et de n rotations.

Θ Si r est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et si s est une réflexion, alors $D_n = \langle r, s\rangle$.

2.3 Le groupe des quaternions

Θ Le groupe des quaternions est est...

Θ Tous les sous-groupes de $\mathbf{H}$ sont distingués.

2.4 Groupes linéaires [Perrin(1996), S. Francinou(2008a)]

Θ (Burnside) Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ d'exposant fini est fini.

Θ Tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$ est un conjugué de $O_n(\mathbf{R})$.

Θ GLn et GLm sont isomorphe si, et seulement si, n=m.

Θ On a les cardinaux :

- ⋆ $|GL_n(\mathbf{F}_q)| = (q^n - 1 = (q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$
- ⋆ $|SL_n(\mathbf{F}_q)| = (q^n - 1 = (q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2})q^{n-1}$

Tout groupe fini se plonge dans un groupe de Lie linéaire sur un corps fini, application Sylow

Θ On a les isomorphismes :

- ⋆ $GL_2(\mathbf{F}_2) = SL_2(\mathbf{F}_2) = PSL_2(\mathbf{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$
- ⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$, $PSL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$
- ⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$
- ⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5$, $PSL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{A}_5$

3 Actions de groupes [Delcourt(2007), Perrin(1996)]

3.1 Actions de groupes finis

Θ (Théorème de Cayley) $G \curvearrowright G$ fidèlement par translations. En particulier tout groupe fini G d'ordre n se plonge dans $\mathfrak{S}_n$

Θ L'application $gG_x \in G/G_x \mapsto gx \in Gx$ est une bijection. Les espaces homogènes sont le modèle de la transitivité.

Θ (Formule des classes) Si X et G sont finis, $|X| = \sum |Gx| = |G| \sum \frac{1}{|G_x|}$

A (Théorème de Cauchy) Pour tout $p|n$ avec p premier, il existe un élément de G d'ordre p.

A (Théorème de Ore) Si p est le plus petit diviseur premier de n, tout $H \leqslant G$ d'indice p est distingué dans G.

A Il y a toujours des points fixes pour l'action d'un p-groupe. En particulier le centre d'un p-groupe n'est pas trivial. On en déduit que les p-groupes sont les groupes ayant des sous-groupes d'ordres les puissances de p inférieures.

3.2 Formule de Burnside et coloriages

Θ (Formule de Burnside) Le nombre d'orbites de $G \curvearrowright X$ est $g = \sum |fix(g)|$ où $fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$

A Si l'action est transitive et $|X| > 1$, il existe un g sans point fixe.

Θ Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

Δ Un coloriage est l'orbite de X sous l'action d'un $G \leqslant \mathfrak{S}(X)$ (les symétries).

Δ On définit l'indice d'une permutation τ par $ind(\tau) = \prod x_i^{e_i(\tau)}$ où $e_i(\tau)$ est le nombre de i-cycles dans τ.

Θ Le nombre de (q, G) coloriages de X est $\frac{1}{|G|} \sum ind(g) = P_G(x_1, \dots, x_n)$

Θ (Théorème de Polya) Si $G \leqslant \mathfrak{S}_n$, $|X| = n$, $|C| = q$ et $\sigma_i = \sum c_j^i$, alors le nombre de (q, G)-coloriages de X avec f_r éléments de couleur c_r est le coefficient de $\prod c_i^{f_i}$ dans $P_G(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.

3.3 Théorèmes de Sylow

Δ Un p-groupe est un groupe de cardinal une puissance de p. Un p-sous-groupe de Sylow est un groupe d'ordre p^a où $a = v_p(n)$.

Θ (Théorèmes de Sylow) Si G est un groupe d'ordre $p^a m$ avec p ne divisant pas m,

- ⋆ Il existe un sous-groupe d'ordre p^a
- ⋆ Tous les tels p-Sylow sont conjugués
- ⋆ Le nombre de p-Sylow est congru à 1 modulo p et divise m

3.4 Produits semi-directs

Δ Si N et H sont deux sous-groupes de G, $H \curvearrowright N$ via $\phi : H \to Aut(N)$, le produit semi-direct NH est l'ensemble $N \times H$ muni de la loi $(n, h)(n', h') = (n\phi(h)(n'), hh') = (nh \cdot n', hh')$.

R Le produit est direct si, et seulement si, $\phi = id$.

Θ Si H et K sont deux sous-groupes de G vérifiant :

- ⋆ H distingué dans G
- ⋆ $H \cap K = \{e\}$
- ⋆ $HK = G$

Alors $G \cong H \times_\tau K$ via $(h, k) \mapsto hk$.

E
- ⋆ Le groupe diédral est $D_n \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}sd\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
- ⋆ $\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{A}sd\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathfrak{A}_4 \cong V_A sd\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
- ⋆ $GA(\mathcal{E}) \cong EsdGL(E)$
- ⋆ Le groupe des quaternions $\mathbf{H}$ n'est pas un produit semi-direct

3.5 Classification des groupes finis

Δ Graphe des cycles

Θ Le graphe des cycles caractérise la classe d'isomorphisme d'un groupe d'ordre $n \leqslant 16$.

Θ Les groupes d'ordre pq avec p et q premiers distincts sont $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ et, si $p|q-1$, $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}sd\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ qui n'est pas commutatif.

Θ Les groupes d'ordre 8 sont $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$, D_4 et $\mathbf{H}$.

Θ Les groupes d'ordre 12 sont...

Θ Isomorphismes de produits semi-directs...

4 Représentations de groupes finis, [Serre(1998)]

4.1 Représentations de groupes

4.2 Actions linéaires

On se place dans un $\mathbf{C}$-ev V et un groupe fini G.

Δ Une représentation linéaire est une action linéaire $G \curvearrowright V$, *i.e.* un morphisme $G \to GL(E)$.

E Représentation unité, représentation de permutation

Δ Une sous-représentation $W \leqslant V$ est un sous-espace stable par l'action.

Θ Toute sous-représentation admet une sous-représentation supplémentaire.

A Toute représentation est somme directe d'irréductibles

4.3 Théorie des caractères

Δ Le caractère d'une représentation $\rho : G \curvearrowright V$ est $\chi_\rho : g \mapsto Tr(\rho_g)$.

E Les caractères classiques $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W, \chi_{V\otimes W} = \chi_V\chi_W, \chi_{Hom(V,W)} = \chi_V\chi_W^\star$

Δ Un G-morphisme est une application vérifiant $f(gx) = gf(x)$.

Θ (Lemme de Schur) Tout G-morphisme entre représentations irréductibles est une homothétie.

A La moyenne sur G d'une application linéaire h est soit nulle, soit égale à $\frac{1}{n}Tr(h)$.

Δ On définit un produit scalaire hermitien par $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g}\sum \phi(t)\psi(t)^\star$.

Θ Pour deux représentations irréductibles ρ et π, $\langle \chi_\rho, \chi_\pi \rangle = \delta_{\rho\cong\pi}$, *i.e.* les caractères irréductibles forment une famille orthonormale.

Θ Si $W = \bigoplus W_i^{\oplus a_i}$, alors $a_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$. Il est en particulier indépendant de la décomposition.

A Les représentations sont déterminées par leurs caractères

A L'irréductibilité est caractérisée par $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

4.4 Espace des fonctions centrales et nombre d'orbites

Θ Chaque sous-représentation irréductible est contenue le nombre de fois égal à son degré, et $\sum n_i\chi_i(s) = \delta_{s=e}$.

Δ Une fonction est centrale si elle est constante sur les classes de conjugaison.

Θ Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur le groupe G.

Θ Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes.

A On a $\sum_i \chi_i(s)\chi_i(s)^\star = g/c(s)$.

Autres idées à explorer...
Polyèdres réguliers, décomposition des groupes abéliens, représentations, caractérisation des $Gl_n(K)$ en termes de groupes avec les involutions.
Parler plus de classification des groupes (cf. ancienne leçon 149 : Groupes finis de petit ordre
Groupes résolubles, Jordan-Hölder, Galois
Automorphismes
Transformée de Fourier discrète, dual

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème p^aq^b de Burnside, [G. James(2004)]**
  - ⋆ **Théorème de Burnside, [S. Francinou(2008a)]**
  - ⋆ **Sous-groupes finis de SO3, [Combes(2003)]**
  - ⋆ **Simplicité de An, [Perrin(1996)]**

Références
[Delcourt(2007)] pour les parties les plus élémentaires, puis [Rotman(1995)] pour des outils élémentaires plus élaborés, éventuellement [Gorenstein(2000)] pour aller plus loin. Pour les actions de groupes, [Delcourt(2007), Perrin(1996)] est une bonne base, compléter avec [Mneimné(1997)]. Pour les représentations linéaires, reprendre le plan de [Serre(1998)] et compléter éventuellement avec un peu de [W. Fulton(2004)].

Rapport du jury. Le groupe symétrique n'est pas spécialement plus facile à comprendre que les autres groupes. Il faut relier rigoureusement les notions d'orbites et d'action de groupe et savoir décomposer une permutation en cycles disjoints. Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations. Par ailleurs un candidat qui se propose de démontrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à A5 devrait aussi montrer que A5 est simple. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Les applications du groupe symétrique ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers.

Φ Le groupe symétrique d'un ensemble est naturellement un groupe agissant le plus général. Cette richesse s'illustre par la grande diversité de ses sous-groupes ainsi que sur ses représentations.

H premières considérations géométriques (?), puis formelles avec les permutations de lettres (dico arabe), puis essentiellement par Laplace(?) et Galois

Avis. Montrer une maîtrise assez profonde et logique du groupe pour lui-même, puis montrer en quoi la connaissance de ce groupe si riche apporte tant d'informations pour d'autres groupes et surtout dans d'autres domaines.

⋆ ⋆ ⋆

On considère un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}$.

1 Groupes symétriques et générateurs [Perrin(1996), Delcourt(2007)]

1.1 Le groupe symétrique

Δ Pour un ensemble E, on note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E, *i.e.* l'ensemble des bijections de E dans E.

Θ $\mathfrak{S}(E)$ est un groupe.

Θ $\mathfrak{S}(E)$ agit naturellement sur E.

Θ Si $f : E \to E'$ est une bijection, alors $\sigma \mapsto f\sigma f^{-1}$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(E')$. Si E est de cardinal n, on note $\mathfrak{S}_n$ tout représentant de sa classe d'isomorphisme, appelé groupe symétrique de degré n. Il est de cardinal $n!$.

R On note une permutation de $\mathfrak{S}_n$ sous la forme $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

A Tout algorithme de tri par comparaison en est $\Omega(n \ln n)$ [**?**].

Θ (Cayley) Tout groupe d'ordre n s'injecte dans $\mathfrak{S}_n$, par l'action par translation.

A (Sylow)

Θ $\mathfrak{S}_3$ n'est pas commutatif, et $\forall n \geqslant 3$, $\mathfrak{S}_n$ n'est pas commutatif.

1.2 Cycles et transpositions

Δ Le support d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des points mobiles sous l'action de σ, *i.e.* $Supp(\sigma) = \{i \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(i) \neq i\}$.

Θ Deux permutations à supports disjoints commutent.

Δ Un cycle de longueur p est une permutation σ telle qu'il existe des i_k tels que $\sigma(i_k) = i_{k+1}$, les indices étant considérés modulo l. On note $\sigma = (i_1, \dots, l_p)$ un tel cycle, et l est sa longueur.

Θ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un cycle si, et seulement si, les orbites de $[\![1, n]\!]$ sous l'action du groupe engendré par σ sont réduites à un singleton sauf une.

Θ Toute permutation est produit de cycles à supports disjoints. Ce produit est commutatif et cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. En particulier, les cycles engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Δ On appelle type de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la suite croissante des longueurs des cycles qui la composent.

Δ Une transposition est un cycle d'ordre 2.

Θ Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$. Plus précisément on a les systèmes minimaux de générateurs de $\mathfrak{S}_n$ suivants :

- ⋆ $(1, i)$
- ⋆ $(i, i+1)$
- ⋆ $(1, 2), (1, 2, \dots, n)$

R Ces générateurs donnent des algorithmes de tris : recherche du maximum et tri à bulle.

A Pour $n \geqslant 3$, $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}$.

Θ Si $c = (1, 2, \ldots, p)$ est un cycle d'ordre p, alors $c = (1,2)(2,3)\cdots(p-1,p)$, et c est produit d'au moins $p-1$ traspositions.

1.3 Conjugaison

Θ Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors on a la formule de conjugaison $\sigma(i_1, \ldots, i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_r))$.

Θ La classe de conjugaison de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est entièrement déterminée par son type. En particulier, il y en a autant que de partitions de n.

Θ (Brauer)

Applications au centre, aux morphismes ?

2 Groupe alterné et signature [Perrin(1996), Delcourt(2007)]

2.1 Inversions et signature

Δ Une inversion de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Θ Il existe un unique morphisme de groupes non trivial $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$, appelé signature. Plus précisément, $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

Δ Une permutation de signature 1 est paire, une permutation de signature -1 est impaire. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est l'ensemble des permutations paires, il est d'indice 2.

E
- ⋆ les transpositions sont impaires
- ⋆ si σ est un l-cycle, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{l+1}$
- ⋆ si σ possède r orbites, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m}$

A (Frobenius-Zolotarev) Si V est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\forall u \in GL(V), \varepsilon(u) = \left(\dfrac{\det(u)}{p}\right)$.

Θ $\mathfrak{A}_n = Ker(\varepsilon) \triangleleft \mathfrak{S}_n$.

Θ On a les systèmes de générateurs de $\mathfrak{S}_n$ suivants :

- ⋆ $(1, i)(1, j)$
- ⋆ $(i, i+1)$
- ⋆ les carrés de $\mathfrak{S}_n$

Θ Pour $n \geqslant 4$, $Z(\mathfrak{A}_n) = \{id\}$.

2.2 Simplicité

Θ Pour $n = 3$ ou $n \geqslant 5$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple.

A Pour $n \geqslant 5$, $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ et pour $n \geqslant 2$, $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$.

A Le seul groupe simple d'ordre 60 est $\mathfrak{A}_5$.

Θ Pour $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{1\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{A}_n$.

A Tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

2.3 Automorphismes

Θ On a $Aut(\mathfrak{S}_n) = Int(\mathfrak{S}_n) \Longleftrightarrow n \neq 6$.

Θ On a les isomorphismes :

- ⋆ $GL_2(\mathbf{F}_2) = SL_2(\mathbf{F}_2) = PSL_2(\mathbf{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$
- ⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4,\ PSL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$
- ⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$
- ⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5,\ PSL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{A}_5$

3 Représentations et géométrie

3.1 Représentation du groupe symétrique [W. Fulton(2004)]

Sagan ou Fulton-Harris avec les tableaux d'Young, plus cas particuliers

3.2 Géométrie [J.-M. Arnaudiès()]

Θ Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

Δ Un simplexe régulier t_n de $\mathbf{R}^n$ est une partie de la forme $\{A_0, \ldots, A_n)$ où les A_i sont affinement indépendants et $d(A_i, A_j) = 1$ pour tous $i \neq j$.

Θ On a $Isom(t_n) = S_{n+1}$ et $Isom^+(t_n) = A_{n+1}$.

Autres idées à explorer...

Galois, résolutbilité Algorithmique, combinatoire

- **Développements.**

  - ⋆ **Théorème de Brauer, [S. Francinou(2004)]**
  - ⋆ **Théorème de Bruhat, [V. Beck(2005)]**
  - ⋆ **Simplicité de An, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Automorphismes de Sn, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Table de caractères S_5 [W. Fulton(2004)]**

Références

[Delcourt(2007), Fresnel(2001)] ets [Perrin(1996)] pour la base du plan.
[S. Francinou(2007a)] pour des illutrations. [?] pour un traitement avancé des représentations du groupe symétrique et de problèmes combinatoires associés.

106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie, sous groupes et applications.

Rapport du jury. Il faut savoir réaliser Sn dans GL(n,R) et faire le lien entre signature et déterminant. Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur GL(E) Il faudrait que les candidats sachent faire correspondre, sous-groupes et noyaux ou stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). A quoi peuvent servir des générateurs du groupe GL(E) ? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral. Les applications topologiques sont acceptables dans la leçon d'algèbre. Cette leçon peut être traitée, ou comprise de plusieurs façons. En général on attend que le candidat précise à chaque instant quelle structure il considère sur l'espace vectoriel E ; au départ E n'a pas de structure et on peut parler de SL(E), k_Id, des sous-groupes finis, du groupe dérivé en fonction du corps. Quand le corps est R on peut interpréter SL(E) comme transformation conservant le volume et l'orientation. On peut ensuite considérer ce qui se passe si on choisit une base, un drapeau, une structure euclidienne, un produit hermitien. On peut traiter aussi le cas des sous-groupes finis de SO(3).

Φ On s'intéresse naturellement aux groupes linéaires comme groupes d'automorphismes linéaires, qui est suffisamment intuitif du fait du caractère très géométrique des espaces vectoriels, et qui est toutefois suffisamment général pour être intéressant pour lui même. En effet, tous les groupes finis s'y représentent et les représentations de groupes apportent de nombreuses informations sur les groupes généraux qui s'y plingent.

H

Avis. Insister sur les applications et ne pas exposer seulement des propriétés des groupes linéaires sans plus d'aboutissement. Les systèmes linéaires, les équations différentielles, l'analyse numérique, le calcul différentiel exploitent de nombreux résultats ici. Cela donne de belles illustrations, mais cette leçon doit garder une ligne de conduite algébrique : ce sont les actions et les résultats de décomposition et de réduction qui doivent aboutir à ces applications, et non celles-ci qui doivent motiver celles-là.

⋆ ⋆ ⋆

K est un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E.

1 Le groupe linéaire et ses sous-groupes [Perrin(1996)]

1.1 Le groupe linéaire

Δ Le groupe des inversibles de $L(E)$ est noté $GL(E) \cong GL_n(k)$ et appelé groupe linéaire sur E. Deux bases étant choisies, il est en bijection avec le groupe linéaire matriciel d'ordre n noté $GL_n(K)$.

Θ Il y a équivalence entre les propositions suivantes :
- ⋆ u est inversible dans $L(E)$
- ⋆ u est injectif
- ⋆ u est surjectif
- ⋆ $rg(u) = sim(E)$
- ⋆ u est inversible à gauche
- ⋆ u est inversible à droite
- ⋆ u est régulier à gauche
- ⋆ u est régulier à droite
- ⋆ $det(u) \neq 0$

Δ Le groupe spécial linéaire est $SL(E) = Ker(det)$, l'ensemble des endomorphismes de déterminant 1.

Θ $SL(E) \triangleleft GL(E)$ et $GL(E) \cong SL(E) \rtimes K^\star$.

Θ $GL_n(K)$ et $GL_m(K)$ sont isomorphes si, et seulement si, $n = m$.

Θ Tout groupe fini G s'injecte dans un $GL(E)$.

A Toute groupe fini admet un p-Sylow, pour tout $p \in$ ¶.

Θ (Burnside) Tout sous-groupe d'exposant fini de GL est fini.

1.2 Générateurs

Θ Si H est un hyperplan de E et $u_H = id$, les conditions suivantes sont équivalentes :
- ⋆ $u \notin SL(E)$ *i.e.* $det(u) = \lambda \neq 1$
- ⋆ u est diagonalisable et admet une valeur propre $\lambda \neq 1$
- ⋆ $Im(u - id) \nsubseteq H$

Δ Un tel endomorphisme est la dilatation d'hyperplan H, de droite D, de rapport λ.

Θ Si H est un hyperplan de E et $u_H = id$, les conditions suivantes sont équivalentes :
- ⋆ $u \notin SL(E)$ *i.e.* $det(u) = 1$
- ⋆ u n'est pas diagonalisable
- ⋆ $Im(u - id) \subseteq H$
- ⋆ Il existe $a \in H$ tel que $u(x) = x + f(x)a$, $a \neq 0$

Θ Les transvection engendrent SL. Les transvections et les dilatations engendrent GL.

Δ Un tel endomorphisme est la transvection d'hyperplan H et de droite D.

Θ (pivot de Gauss) Les transvections engendrent $SL(E)$, et les transvections et les dialatations engendrent $GL(E)$. Résultats sur le nombre ?

Θ Deux transvections sont conjuguées dans $GL(E)$ et dans $SL(E)$ si $n \geqslant 3$. Si $n = 2$, alors $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées si, et seulement si, $\frac{a}{b}$ est un carré dans $k^\star$.

A Si $n = 2$ et $k = \mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$, alors $D(GL) = GL$. Sinon $D(GL_n(K)) = SL_n(K)$ et $D(SL_n(K)) = SL_n(K)$.

A $PSL_n(K)$ est simple sauf pour $n = 2$ et $k = \mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$.

Θ (Bruhat) $GL_n(k) = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} TS_n(k) P_\sigma TS_n(k)$.

Θ Le centre de $GL_n(k)$ est $k^\star I_n$. Le centre de $SL_n(k)$ est $\mu_n^\star(k) I_n$.

Δ Le quotient $GL(E)/Z(GL(E))$ est le groupe projectif linéaire de E, noté $PGL(E)$.

Θ $PGL(E)$ se plonge dans $GL(P(E))$.

Θ $PSL_2(\mathbf{Z})$ agit sur le demi-plan de Poincaré $H = \{z \in \mathbf{C} \mid Im(z) > 0\}$.

2 Cas particuliers

2.1 Groupes orthogonaux

Δ O, SO

Θ (décomposition polaire) Toute matrice $A \in GL_n(\mathbf{R})$ s'écrit de manière unique $M = OS$ avec $O \in O_n(\mathbf{R})$ et $S \in S_n(\mathbf{R})$, et cette correspondance $M \mapsto (O, S)$ est un homéomorphisme.

Θ Centre

Θ Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

Θ Les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

Θ (John-Loewner) Si K est un compact convexe d'intérieur non vide, alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

Θ Les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$ sont conjugués à un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$. En particulier les sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbf{R})$ sont les conjugués des groupes orthogonaux.

Δ Un renversement est une symétrie par rapport à un sous-espace de codimension 2.

Θ (Cartan-Dieudonné) Toute élément de $O(E)$ est produit d'au plus n réflexions. Tout élément de $SO(E)$ est produit d'au plus n renversements.

Θ $SO(E)$ est simple en dimension impaire supérieure à 3.

Θ Si K est algébriquement clos, tout sous-groupe fini de $GL_n(K)$ simultanément diagonalisable.

2.2 Cas des corps finis

Θ On a les cardinaux :

- ★ $|GL_n(\mathbf{F}_q)| = (q^n - 1 = (q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$
- ★ $|SL_n(\mathbf{F}_q)| = (q^n - 1 = (q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2}) q^{n-1}$

Θ On a les isomorphismes :

- ★ $GL_2(\mathbf{F}_2) = SL_2(\mathbf{F}_2) = PSL_2(\mathbf{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$
- ★ $PGL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$, $PSL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$
- ★ $PGL_2(\mathbf{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$
- ★ $PGL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5$, $PSL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{A}_5$

3 Actions du groupe linéaire sur les espaces de matrices, [Caldero-Germoni(2013)]

Full CG

4 Topologie du groupe linéaire

4.1 Propriétés topologiques [R. Mneimné(2009)]

On rappelle que l'espace vectoriel de dimension finie $M_n(K)$ est muni d'une unique topologie séparée, on s'intéresse naturellement aux propriétés topologiques de $GL_n(K)$.

Θ $GL_n(K)$ est un ouvert de $M_n(K)$. Plus précisément si $A \in GL_n(K)$, alors $B(A, \|A^{-1}\|^{-1}) \subseteq GL_n(K)$.

A

Θ Si K est infini, $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.

A
- ★ $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
- ★ $Z(GL_n(K)) = K^\star I_n$
- ★ Il existe une base de $M_n(K)$ formée d'éléments inversibles

Θ $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe, $GL_n^\pm(\mathbf{R})$ sont les deux composantes connexes de $GL_n(\mathbf{R})$.

A
- ★ L'ensemble des projecteurs de rang p est connexe, en particulier le rang reste constant le long d'une courbe continue de projecteurs

4.2 Groupes de Lie linéaire [Faraut(2006)]

Δ Un groupe de Lie linéaire est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{R})$.

E
- ★
- ★
- ★

Δ Un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$ est un morphisme continue de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbf{R})$.

Θ Si $\gamma : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe à un paramètre, alors γ est analytique et $\forall t \in \mathbf{R}, \gamma(t) = \exp(tA)$ où $A = \gamma'(0)$.

Δ L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire G est $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}$.

E
- ★
- ★
- ★

Θ $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ stable par le crochet de Lie $[X, Y] = XY - YX$.

Θ (Cartan-von Neumann) L'exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans un voisinage de I dans G. Tout groupe linéaire fermé est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, d'espace tangent en l'identité $\mathfrak{g}$.

A $\mathfrak{g}$ détermine la composante neutre de G.

Θ (Burnside) Un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ est fini si, et seulement si, il est d'exposant fini.

E $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ est d'exposant fini mais n'est pas fini.

A Un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{Q})$ est fini si, et seulement si, tous ses éléments sont d'ordre fini.

5 Représentations linéaires de groupes [Serre(1998)]

5.1 Actions linéaires

On se place dans un $\mathbf{C}$-ev V et un groupe fini G.

Δ Une représentation linéaire est une action linéaire $G \curvearrowright V$, *i.e.* un morphisme $G \to GL(E)$.

E Représentation unité, représentation de permutation

Δ Une sous-représentation $W \leqslant V$ est un sous-espace stable par l'action.

Θ Toute sous-représentation admet une sous-représentation supplémentaire.

A Toute représentation est somme directe d'irréductibles

5.2 Théorie des caractères

Δ Le caractère d'une représentation $\rho : G \curvearrowright V$ est $\chi_\rho : g \mapsto Tr(\rho_g)$.

E Les caractères classiques $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W, \chi_{V\otimes W} = \chi_V\chi_W, \chi_{Hom(V,W)} = \chi_V\chi_W^\star$

Δ Un G-morphisme est une application vérifiant $f(gx) = gf(x)$.

Θ (Lemme de Schur) Tout G-morphisme entre représentations irréductibles est une homothétie.

A La moyenne sur G d'une application linéaire h est soit nulle, soit égale à $\frac{1}{n}Tr(h)$.

Δ On définit un produit scalaire hermitien par $\langle\phi,\psi\rangle = \frac{1}{g}\sum\phi(t)\psi(t)^\star$.

Θ Pour deux représentations irréductibles ρ et π, $\langle\chi_\rho,\chi_\pi\rangle = \delta_{\rho\cong\pi}$, *i.e.* les caractères irréductibles forment une famille orthonormale.

Θ Si $W = \bigoplus W_i^{\oplus a_i}$, alors $a_i = \langle\chi,\chi_i\rangle$. Il est en particulier indépendant de la décomposition.

A Les représentations sont déterminées par leurs caractères

A L'irréductibilité est caractérisée par $\langle\chi,\chi\rangle = 1$.

5.3 Espace des fonctions centrales et nombre d'orbites

Θ Chaque sous-représentation irréductible est contenue le nombre de fois égal à son degré, et $\sum n_i\chi_i(s) = \delta_{s=e}$.

Δ Une fonction est centrale si elle est constante sur les classes de conjugaison.

Θ Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur le groupe G.

Θ Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes.

A On a $\sum_i \chi_i(s)\chi_i(s)^\star = g/c(s)$.

Autres idées à explorer...

Parler un peu de groupe linéaire sur un anneau quelconque ($\mathbf{Z}$).

Θ (Burnside) Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ d'exposant fini est fini.

Θ (Frobenius-Zolotarev) $\forall u \in GL_n(\mathbf{F}_p) \subseteq \mathfrak{S}_{p!}, \varepsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$.

Θ (Brauer)

Iwasawa, Cartan, et autres décompositions

- **Développements.**

  - ⋆ **Théorème de Lie-Kolchin, [?]**
  - ⋆ **Théorème de Cartan-von Neumann, [Faraut(2006)]**
  - ⋆ **Théorème de Burnside, [S. Francinou(2004)]**
  - ⋆ **Générateurs de GL, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Théorème de Bruhat, [S. Francinou(2008a)]**
  - ⋆ **Homéomorphisme polaire, [R. Mneimné(2009)]**

[Perrin(1996), ch. 4] pour la génération du groupe linéaire et les isomorphismes et simplicités dans le cas des corps finis. Tout le [Caldero-Germoni(2013)] pour la partie sur les actions sur les espaces de matrices bien sûr. [R. Mneimné(2009)] et [Faraut(2006), ch.1] pour la partie topologie et les groupes de Lie. On peut compléter avec [S. Francinou(2008a), ch. 4].

Rapport du jury.

Φ (Laius sur les actions +) Il est donc naturel de s'intéresser aux actions les plus simples et les mieux manipulées, à savoir les actions linéaires, pour lesquelles les outils de l'algèbre linéaire sont disponibles, ainsi que la vision géométrique des représentations, et heureusement des informations suffisantes s'en tirent (mais pas que, cf. H8 et D4).

Avis. C'est une leçon théorique comparée à la 109, mais il faut conserver des exemples assez riches pour illustrer tout au long les notions et résultats, sans que ce soit prédominant. Les représentations des groupes symétriques sont les bienvenues par exemple. Toutefois conserver l'intérêt de travailler avec des objets simples (représentations, caractères) plutôt qu'avec des groupes : des théorèmes non triviaux et non aisément accessibles autrement sont les bienvenus. Burnside, etc.

⋆ ⋆ ⋆

1 Représentations linéaires de groupes

1.1 Actions linéaires

On se place dans un **C**-ev V et un groupe fini G.

Δ Une représentation linéaire est une action linéaire $G \curvearrowright V$, *i.e.* un morphisme $\rho : G \to GL(E)$. Cela munit V d'une structure de G-ensemble, on note $\rho_g(x) = g \cdot x = gx$. La dimension de V est appelée le degré de la représentation.

E
- ⋆ la représentation unité $1 : g \in G \mapsto 1$
- ⋆ la représentation régulière est définie sur $\mathbf{C}^G$ par $ge_h = e_{gh}$

Θ Une représentation ρ vérifie :
- ⋆ $\rho(1) = 1$
- ⋆ $\forall g \in G, \rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$
- ⋆ si $\rho : G \to \mathbf{C}^\star$, alors les $\rho(g)$ sont dans μ_n

Δ Un opérateur d'entrelacement entre deux représentations V et W, ou G-morphisme, est une application $\phi : V \to W$ telle que $\rho_g \phi = \phi \sigma_g$, *i.e.* $\forall g \in G, \forall x \in V, \phi(gx) = g\phi(x)$.

Δ Deux représentations sont isomorphes s'il existe un G-isomorphisme entre elles. Elles ont alors même degré.

1.2 Sous-représentations et irréductibilité

Δ Une sous-représentation $W \leqslant V$ est un sous-espace stable par l'action, *i.e.* un sous-espace tel que $\forall w \in W, gw \in W$. La représentation induit alors une représentation de G sur W.

E
- ⋆ pour la représentation régulière, $Vect(\sum_g e_g)$ est une sous-représentation

Θ Toute sous-représentation admet une sous-représentation supplémentaire, *i.e.* un supplémentaire de W qui est une sous-représentation.

Δ Une représentation est dite irréductible si ses seules sous-représentations sont triviales, *i.e.* $\{0\}$ et V.

E
- ⋆ toute représentation de degré 1 est irréductible

Θ (Mashcke) Toute représentation est somme directe d'irréductibles.

1.3 Opérations sur les représentations

2 Théorie des caractères

2.1 Caractères

Δ Le caractère d'une représentation $\rho : G \curvearrowright V$ est $\chi_\rho : g \mapsto Tr(\rho_g)$.

R Cela revient à connaître les sommes de Newton des valeurs propres des éléments de g, *i.e.* les valeurs propres, et on peut donc espérer obtenir des informations intéressantes.

E
- ⋆ $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
- ⋆ $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$
- ⋆ $\chi_{Hom(V,W)} = \chi_V \chi_W^\star$

Θ Un caractère χ d'une représentation de degré n vérifie :

- ⋆ $\chi(1) = n$
- ⋆ $\forall g \in G, \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$
- ⋆ les caractères sont centraux : $\forall g, hinG^2, \chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$

Θ On a les rapports entre caractères :

- ⋆
- ⋆
- ⋆

2.2 Relations d'orthogonalité

Θ (lemme de Schur) Tout G-morphisme entre représentations irréductibles est une homothétie.

A La moyenne sur G d'une application linéaire h est $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$. Elle est soit nulle, soit égale à $\frac{1}{n}Tr(h)$.

Δ On définit un produit scalaire hermitien par $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g}\sum \phi(t)\psi(t)^{\star}$.

Θ Pour deux représentations irréductibles ρ et π, $\langle \chi_\rho, \chi_\pi \rangle = \delta_{\rho\cong\pi}$, *i.e.* les caractères irréductibles forment une famille orthonormale.

Θ Si $W = \bigoplus W_i^{\oplus a_i}$, alors $a_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$. Ce nombre est en particulier indépendant de la décomposition.

A Les représentations sont déterminées par leurs caractères.

R Mais les caractères ne déterminent pas le groupe, ainsi H et D_8 ont mêmes caractères mais ne sont pas isomorphes.

A Une représentation associée à un caractère χ si, et seulement si, $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

2.3 Nombre de représentations irréductibles

Θ Pour tout caractère irréductible χ, on a $\langle \chi, \chi_{reg} \rangle = d(\chi)$, donc $\chi_{reg} = \sum_\chi \chi(1)\chi$. En particulier $n^2 = \sum_\chi \chi(1)^2$.

Θ Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur le groupe G.

A Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes.

Θ On obtient grâce à ces relations la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$.

Θ (orthogonalité des colonnes) On a $\sum_i \chi_i(s)\chi_i(t)^{\star} = \frac{|G|}{|c_s|}\delta_{s=t}$.

Θ On obtient grâce à ces relations la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

2.4 Simplicité et représentations

Θ Si $H \triangleleft G$ et si les χ_i sont les caractères irréductibles de G, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $N = \bigcap_i Ker(\chi_i)$.

Θ G est simple si, et seulement si, tout caractère irréductible non trivial est tel que $\forall g \neq 1, \chi(g) \neq 1$.

A A_4 n'est pas simple.

3 Représentations linéaires de groupes particuliers

3.1 Groupes abéliens

Θ Un groupe est abélien si, et seulement si, toutes ses représentations sont de degré 1.

R Cela légitime de se concentrer sur les caractères pour étudier les groupes abéliens ?

Δ On note $\hat{G}$ l'ensemble des représentations de degré 1 de G, qui est aussi l'ensemble des caractères de G.

Δ La transformation de Fourier est définie sur $\hat{G}$ par $\hat{\phi} : \chi \mapsto \langle \chi, \phi \rangle$.

Θ (inversion de Fourier) On a $\phi = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{\phi}(\chi)\chi = |G|\hat{\hat{\phi}}$.

Θ Si G est un groupe abélien fini, alors G et $\hat{G}$ sont isomorphes par l'application $x \in G \mapsto (\chi \mapsto \chi(x)) \in \hat{G}$.

Θ Si G est un groupe abélien fini, alors G et $\hat{G}$ ont même exposant.

Θ (structure des groupes abéliens finis) Si G est un groupe abélien fini, alors il existe $r \in \mathbf{N}$ et $n_1, \ldots, n_r \in \mathbf{N}$ avec $n_{i+1} \mid n_i$ et $n_r = exp(G)$, tels que $G \cong \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/n_r\mathbf{Z}$.

Θ L'ensemble des représentations de degré 1 de G est en bijection avec l'ensemble des représentations de degré 1 de $G/D(G)$. Il y en a extacmement $G/D(G)$.

3.2 Autres exemples

À compléter avec des exemples de 109

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de structure des groupes abéliens finis, [Colmez(2011), p. 249]**
  - ⋆ **Caractères irréductibles et fonctions centrales, [W. Fulton(2004)]**
  - ⋆ **Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, [G. James(2004)]**
  - ⋆ **Théorème $p^a q^b$ de Burnside, [G. James(2004)]**
  - ⋆ **Orthogonalité des caractères, [Serre(1998)]**

Références

[Serre(1998)] est une bonne base qui traite efficacement l'intégralité de la leçon, [?] et [W. Fulton(2004)] complètent parfaitement. Quelques résultats supplémenaires et plus précis dans [G. James(2004)], qui est un bon livre pour pratiquer.

Rapport du jury. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes. Il est important de réfléchir à l'utilisation des générateurs d'un groupe pour établir des propriétés de certains morphismes (automorphismes du groupe diédral par exemple). La leçon ne se limite pas aux groupes finis (on peut penser à certains groupes libres) ou à la simplicité de An, n >4.

Φ Connaître les générateurs revient à condenser la comportement d'un groupe en celle de quelques éléments. En effet, ces éléments et leurs relations déterminent entièrement le groupe, ainsi que ses automorphismes, et donne des informations sur ses sous-groupes. On s'intéresse alors à la présentation des groupes en un nombre restreint d'éléments.

H

Avis. Il faut que tous les groupes classiques soient présents et que leurs générateurs soient explicités, mais également souligner en permanence l'utilité de cette notion par la fécondité des résultats que l'on obtient en traitant uniquement avec des générateurs.

⋆ ⋆ ⋆

1 Présentations de groupes

1.1 Groupe libre

Δ Si X est un ensemble non vide, et si X^{-1} désigne une copie de X formellement représentée par des éléments x^{-1}. Un mot sur $X \cup X^{-1}$ est une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$. La longueur de cette suite est appelée longueur du mot. Le mot de longueur nulle est le mot vide ε. On note $(X \cup X^{-1})^\star$ l'ensemble des ots sur $X \cup X^{-1}$. On écrit donc un mot sous la forme $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, avec $s_{i_k} \in X \cup X^{-1}$ et $\varepsilon_k = \pm 1$.

Δ On dit que deux mots $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ et $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ sont égaux si $n = m$, et pour tout k $x_{i_k} = x_{j_k}$ et $\varepsilon_k = \varepsilon'_k$. On définit le produit de deux mots par $\varepsilon x = x\varepsilon = x$ et $xy = x_1^{\varepsilon_1}(\tilde{x}_1 y)$.

Δ On définit sur l'ensemble des mots la relation xRy s'il existe une décomposition de mots $x = x_1x_2$ et $y = y_1aa^{-1}y_2$ ou $x = x_1aa^{-1}x_2$ et $y = y_1y_2$, en notant $a^{-1})^{-1}$.

Θ La relation R est compatible avec le produit de mots, et le quotient $(X \cup X^{-1})^\star/R$ est un groupe.

Δ On dit qu'un mot est réduit s'il ne peut s'écrire $x_1aa^{-1}x_2$.

Θ Chaque classe d'équivalence pour R admet un unique représentant réduit, appelé mot réduit.

Δ Le groupe $(X \cup X^{-1})/R$ est le groupe libre engendré par X.

Θ (propriété universelle) G est libre sur une partie $X \subseteq G$ si, et seulement si, pour tout groupe G' et pour toute application $\sigma : X \to G'$, il existe un unique morphisme $\phi : X \to G'$ prolongeant σ, *i.e.* tel que $\phi \circ i = \sigma$.

Θ Si X et Y sont équipotents, alors les groupes libres engendrés sont équipotents.

Θ Tout groupe est quotient d'un groupe libre.

1.2 Générateurs et relations

R En général, des éléments générateurs sont liés par des relations non triviales.

Δ Si G est engendré par un ensemble X vérifiant un ensemble de relations non triviales R, alors $(X \mid R)$ est une présentation de G si G est isomorphe à $F_X/(R)$, où (R) est la clôture normale de R.

E
- ⋆ $(x \mid x^n)$ est une présentation du groupe cyclique $C_n(x)$
- ⋆ $(a, b \mid a^n, b^2, abab)$ est une présentation du groupe diédral D_n
- ⋆ $(X \mid \emptyset)$ est une présentation du groupe libre sur X

Θ L'abélianisé $G/D(G)$ de G admet pour présentation $(X \mid [x, y], x, y, \in X)$.
Autres applications, topologie algébrique Nielsen-Schreier ?

2 Générateurs d'un groupe

2.1 Groupe engendré

Δ Un groupe G est engendré par une partie $X \subseteq G$ s'il est le plus petit groupe contenant X *i.e.* l'intersection des sous-groupes de G contenant X.

Θ Un morphisme est entièrement déterminé par l'image d'un système générateur.

2.2 Groupes cycliques

Θ (élément primitif)

2.3 Le groupe symétrique

Θ Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$. Plus précisément on a les systèmes minimaux de générateurs de $\mathfrak{S}_n$ suivants :

- ⋆ $(1, i)$
- ⋆ $(i, i+1)$
- ⋆ $(1,2), (1,2,\dots,n)$

Θ Pour $n \geqslant 3$, $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}$.

A Il existe un unique morphisme de groupes non trivial $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$, appelé signature.

A Pour $n \geqslant 4$, $Z(\mathfrak{A}_n) = \{id\}$.

Θ $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

A Pour $n = 3$ ou $n \geqslant 5$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple.

A Le seul groupe simple d'ordre 60 est $\mathfrak{A}_5$.

A $D(S_n) = A_n$.

2.4 Groupes diédraux

2.5 Groupes linéaires

SL, GL, O, etc.
Classification des isométries affines, etc ?

Autres idées à explorer...

Théorème de la base de Burnside
$SL_2(\mathbf{Z})$
Graphes de Cayley ? trouver référence
Action de $PSL_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré [Alessandri(1999)]

- **Développements.**
  - ⋆ **Simplicité de An, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Automorphismes de Sn, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Générateurs de GL, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Théorème de Cartan-Dieudonné, [Perrin(1996)]**

Références

[calais(1984), ch. 9] pour les générateurs et relations, [Perrin(1996)] pour le groupe linéaire.

Rapport du jury.

Φ

H

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

1 Représentations linéaires de groupes et théorie des caractères

1.1 Représentations linéaires

On se place dans un $\mathbf{C}$-ev V et un groupe fini G.

Δ Une représentation linéaire est une action linéaire $G \curvearrowright V$, *i.e.* un morphisme $\rho : G \to GL(E)$. Cela munit V d'une structure de G-ensemble, on note $\rho_g(x) = g \cdot x = gx$. La dimension de V est appelée le degré de la représentation.

E
- ⋆ la représentation unité $1 : g \in G \mapsto 1$
- ⋆ la représentation régulière est définie sur $\mathbf{C}^G$ par $ge_h = e_{gh}$

Δ Un opérateur d'entrelacement entre deux représentations V et W, ou G-morphisme, est une application $\phi : V \to W$ telle que $\rho_g \phi = \phi \sigma_g$, *i.e.* $\forall g \in G, \forall x \in V, \phi(gx) = g\phi(x)$.

1.2 Sous-représentations et irréductibilité

Δ Une sous-représentation $W \leqslant V$ est un sous-espace stable par l'action, *i.e.* un sous-espace tel que $\forall w \in W, gw \in W$. La représentation induit alors une représentation de G sur W.

Θ Toute sous-représentation admet une sous-représentation supplémentaire, *i.e.* un supplémentaire de W qui est une sous-représentation.

Δ Une représentation est dite irréductible si ses seules sous-représentations sont triviales, *i.e.* $\{0\}$ et V.

Θ (Mashcke) Toute représentation est somme directe d'irréductibles.

1.3 Théorie des caractères

Δ Le caractère d'une représentation $\rho : G \curvearrowright V$ est $\chi_\rho : g \mapsto Tr(\rho_g)$.

Θ (lemme de Schur) Tout G-morphisme entre représentations irréductibles est une homothétie.

A La moyenne sur G d'une application linéaire h est $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$. Elle est soit nulle, soit égale à $\frac{1}{n}Tr(h)$.

Δ On définit un produit scalaire hermitien par $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g}\sum \phi(t)\psi(t)^\star$.

Θ Pour deux représentations irréductibles ρ et π, $\langle \chi_\rho, \chi_\pi \rangle = \delta_{\rho\cong\pi}$, *i.e.* les caractères irréductibles forment une famille orthonormale.

Θ Si $W = \bigoplus W_i^{\oplus a_i}$, alors $a_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$. Ce nombre est en particulier indépendant de la décomposition.

A Les représentations sont déterminées par leurs caractères.

R Mais les caractères ne déterminent pas le groupe, ainsi H et D_8 ont mêmes caractères mais ne sont pas isomorphes.

A Une représentation associée à un caractère χ si, et seulement si, $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Θ Pour tout caractère irréductible χ, on a $\langle \chi, \chi_{reg} \rangle = d(\chi)$, donc $\chi_{reg} = \sum_\chi \chi(1)\chi$. En particulier $n^2 = \sum_\chi \chi(1)^2$.

Θ Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur le groupe G.

A Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes.

Θ On obtient grâce à ces relations la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$.

Θ (orthogonalité des colonnes) On a $\sum_i \chi_i(s)\chi_i(t)^\star = \frac{|G|}{|c_s|}\delta_{s=t}$.

Θ On obtient grâce à ces relations la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

2 Représentations linéaires de groupes particuliers

2.1 Groupes abéliens

Θ Un groupe est abélien si, et seulement si, toutes ses représentations sont de degré 1.

R Cela légitime de se concentrer sur les caractères pour étudier les groupes abéliens ?

Δ On note $\hat{G}$ l'ensemble des représentations de degré 1 de G, qui est aussi l'ensemble des caractères de G.

Δ La transformation de Fourier est définie sur $\hat{G}$ par $\hat{\phi} : \chi \mapsto \langle \chi, \phi \rangle$.

Θ (inversion de Fourier) On a $\phi = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{\phi}(\chi)\chi = |G|\hat{\hat{\phi}}$.

Θ Si G est un groupe abélien fini, alors G et $\hat{G}$ sont isomorphes par l'application $x \in G \mapsto (\chi \mapsto \chi(x)) \in \hat{G}$.

Θ Si G est un groupe abélien fini, alors G et $\hat{G}$ ont même exposant.

Θ (structure des groupes abéliens finis) Si G est un groupe abélien fini, alors il existe $r \in \mathbf{N}$ et $n_1, \ldots, n_r \in \mathbf{N}$ avec $n_{i+1} \mid n_i$ et $n_r = exp(G)$, tels que $G \cong \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/n_r\mathbf{Z}$.

Θ L'ensemble des représentations de degré 1 de G est en bijection avec l'ensemble des représentations de degré 1 de $G/D(G)$. Il y en a extacmement $G/D(G)$.

2.2 Groupes cycliques

2.3 Groupes diédraux

2.4 Groupes symétriques et alternés

Autres idées à explorer...

Groupes d'ordre pq, 168, etc.

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de structure des groupes abéliens finis, [Colmez(2011), p. 249]**
  - ⋆ **Caractères irréductibles et fonctions centrales, [W. Fulton(2004)]**
  - ⋆ **Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, [G. James(2004)]**
  - ⋆ **Théorème p^aq^b de Burnside, [G. James(2004)]**

Références

[Serre(1998)] est une bonne base qui traite efficacement l'intégralité de la partie théorique, avec quelques exemples. Les exemples foisonnent dans [G. James(2004)] et [W. Fulton(2004)], utiles pour la seconde partie. Surtout le tableau des tables de caractères de groupes d'ordres inférieurs à 32, [G. James(2004), p. 307].

Rapport du jury. Ccette leçon classique demande toutefois une préparation minutieuse. Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux Z/nZ, telles l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les idempotents. On attend la description des sous-groupes additifs de Z/nZ. Attention en général si d|n, Z/dZ n'est pas un sous-ensemble de Z/nZ. La description des éléments inversibles pour la structure multiplicative doit être connue. La structure des groupes abéliens de type fini doit être connue, il y a deux présentations distinctes (diviseurs élémentaires ou via les pSylow) ; il faut savoir passer de l'une à l'autre.

Φ On construit une structure riche et maniable pour faire de l'arithmétique.

H Gauss est le premier à introduire formellement la notion de calcul modulaire, donnant à l'arithmétique une notation fonctionnelle

Avis. Il y a de nombreuses applications et il ne faut pas s'enfermer dans le théorique. L'arithmétique, la cryptographie, les formes quadratiques entières, etc. sont à exploiter. De nombreuses structures interviennent ici et font la richesse du sujet : groupes (racines de l'unité par exemple), anneaux, corps, etc.

⋆ ⋆ ⋆

1 Propriétés de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [Hindry(2008)]

1.1 Congruences et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Δ On considère les classes d'entiers modulo n, que l'on munit des opérations :
- ⋆ $[a+b]_n = [a]_n + [b]_n$
- ⋆ $[ab]_n = [a]_n[b]_n$

Θ Muni de ces opérations, l'ensemble des classes d'entiers modulo n est muni d'une structure d'anneau, noté $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

A (preuve par 9) Si $\sum a_i 10^i + \sum b_i 10^i = \sum c_i 10^i$, alors $\sum a_i + \sum b_i = \sum c_i$.

1.2 Propriétés propres au groupe additif $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$

Θ $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est l'unique groupe cyclique à n élémens à isomorphisme près, il a exactement un sous-groupe d'ordre d pour tout $d \mid n$, qui est cyclique engendré par $\frac{n}{d}$.

A Un groupe d'ordre premier p est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Θ $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est simple si, et seulement si, n est premier.

Θ Si G est un groupe abélien fini, il existe des entiers $n_1|n_2|\cdots|c_k$ tels que $G \cong \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \times \cdots \mathbf{Z}/n_k\mathbf{Z}$.

Θ $Aut(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est un groupe abélien de cardinal $\phi(n)$ et isomorphe à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.
Nilpotents, idempotents ?

1.3 Propriétés propres à l'anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \times)$

Θ Les idéaux de $\mathbf{Z}$ sont les $n\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Ses idéaux sont les $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ pour $d|n$.

Θ $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre si et seulement si n est nul ou premier, et c'est un corps si n est premier.

Θ (théorème chinois) Si $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers premiers entre eux, et si $n = n_1 \cdots n_r$, alors $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong \prod \mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z}$ via l'isomorphisme $[x]_n \mapsto ([x]_{n_1}, \ldots, [x]_{n_r})$.

E $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ne sont pas isomoprhes.

A Résolution d'un système congruent...

1.4 Propriétés propres au groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ et corps finis

Θ Pour $s \in \mathbf{N}$, on a équivalence entre :
- ⋆ s est premier avec n
- ⋆ $[s]$ est un générateur de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$
- ⋆ $[s] \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\star$

Δ L'indicatrice d'Euler $\phi(n)$ est le nombre d'entiers inférieurs et premiers à n. Donc $\phi(n)$ est le cardinal de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.

Θ ϕ est multiplicative. En particulier, si $n = \prod p_i^{a_i}$, on a $\phi(n) = n\prod(1 - \frac{1}{p_i})$.

Θ On a $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\star = \prod_i (\mathbf{Z}/p_i^{a_i}\mathbf{Z})^\times$.

Θ
- ⋆ Si $p \geq 3, k \geq 1$, $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/p^{k-1}(p-1)\mathbf{Z}$
- ⋆ Si $p = 2, k \geq 3$, $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2^{k-2}\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
- ⋆ Si $p = 2, k = 2$, $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/2$

A $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\times}$ est cyclique qi, et seulement si, $n \in \{2, 4, 2p^{\alpha}\}$ pour p premier impair.

CORPS FINIS

2 Arithmétique sur Z/nZ [Hindry(2008)]

2.1 Résultats généraux

Θ (Wilson) Un entier $\geqslant 2$ est premier si, et seulement si, $(p-1)! \equiv -1[p]$.

Θ (Fermat) Si $p \nmid a$, alors $a^p \equiv 1\ [p]$.

Δ Un nombre de Carmichael est un entier composé n tel que pour tout $A \in [1, n-1]$, $a^n \equiv a[n]$.

Θ (Korselt, 1899) Un nombre composé est de Carmichael si, et seulement si, il est sans facteur carré et si pour tout $p|n$, $p-1|n-1$.

A Les nombres de Carmichael sont impairs et ont au moins trois facteurs premiers.

Θ (Euler) Pour tous a et n, on a $a^{\phi(n)} \equiv 1\ [n]$.

Θ Si $a \wedge n = 1$, n est premier si et seulement si $(X+a)^n \equiv X^n + a[n]$. Ce résultat est à la base de la preuve de *PRIMES is in P*.

Θ Si pour tout $a \in [1, n-1]$, $a^{n-1} \equiv a[n]$, alors n est premier.

2.2 Congruences et équations diophantiennes

Θ (triplet pythagoricien) Les triplets d'entiers solution de $x^2 + y^2 = z^2$ sont de la forme ...

Θ L'équation de Fermat $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solution non triviale.

Δ Les nombres de Sophie Germain sont les premiers p impairs tels que $2p+1$ soit premier. On ne sait s'il y en a une infinité.

Θ (Théorème de Sophie Germain) Si p est un nombre de Sophie Germain, il n'existe pas d'entiers x, y, z tels que $xyz \not\equiv 0[p]$ et $x^p + y^p + z^p = 0$.

Θ (Liouville) L'équation $(p-1)! + 1 = p^m$ n'a pas de solution pour $p > 5$.

Équations de Pell

2.3 Résidus quadratiques dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Δ Pour x entier et p premier supérieur à 3, on définit le symbole de Legendre $(\frac{x}{p})$ par 1 si x est un carré modulo p, -1 sinon.

Θ Le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x^p \equiv a$ dans $\mathbf{F}_p$ est $\left(\dfrac{a}{p}\right)$.

Θ (multiplicativité) $(\frac{xy}{p}) = (\frac{x}{p})(\frac{y}{p})$.

Θ $(\frac{x}{p}) = 1$, $(\frac{x}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, $(\frac{x}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Θ (Loi de réciprocité quadratique) Si p et q sont premiers distincts et distincts de 2, alors $(\frac{q}{p})(\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Symbole de Jacobi et applications

3 Algèbre effective [Hindry(2008), Demazure(2008)]

3.1 Tests de primalité

Θ Si $m^n + 1$ est premier avec $m, n \geqslant 2$, alors n est une puissance de 2 et m est pair.

E Les nombres de Fermat sont les $F_n = 2^{2^n} + 1$. Ils sont premiers pour $0 \leqslant n \leqslant 4$ et ce sont les seuls connus.

Θ propriétés sur les Fermat

A (Test de primalité de Pépin) F_k est un nombre premier si, et seulement si, $3^{\frac{F_k-1}{2}} \equiv -1[F_k]$.

Θ Si $m^n - 1$ est premier avec $m, n \geqslant 2$, alors $m = 2$ et n est premier.

E Les nombres de Mersenne sont les $M_p = 2^p - 1$ avec p premier. On ne sait s'il y en a une infinité.

Θ Si p est de la forme $4k+3$ et si $2p+1$ est premier, alors M_p n'est pas premier.

Θ Les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^n M_{n+1}$ avec $M_{n+1} \in ¶$

Θ (Dirichlet faible) Pour tout $n \geq 1$, il existe une infinite de nombres premiers de la forme $an+1$ avec a entier.

3.2 Polynômes irréductibles

3.3 Cryptographie RSA (1977)

Le système de codage est asymétrique si les différentes parties n'ont pas les mêmes informations. De manière générale, il s'agit de méthodes de codages peu coûteuses dont le décodage est très difficile à obtenir à partir de la seule connaissance de la fonction de codage. Mettons-nous en situation : Alice souhaite envoyer le message x à Bob. Un annuaire *public* de fonctions de codage est disponible, donnant pour tout individu X une méthode de codage, que l'on représente par une fonction f_X qui code un message x en un message $f_X(x)$. Alice code le message x en $y = f_B(x)$, ce qui fait que le message est illisible par un espion malveillant que nous appellerons Oscar. En effet, Oscar connaît la fonction qui a été utilisée pour coder x en y mais... il n'a aucune idée de comment faire le chemin inverse ! C'est ici qu'il importe que les fonctions soient difficiles à inverser. Lorsque Bob reçoit le message, il va pouvoir le décoder grâce à une information que lui seul connaît : l'inverse de f_B. Le grand avantage est qu'aucune information n'a besoin de circuler en ce qui concerne les clés secrètes – ici ce sont les inverses des fonctions de codage.
Un autre avantage est que ce système permet de *signer* le message. En effet, si au lieu d'envoyer $f_B(x)$ à Bob, Alice lui envoie $f_A^{-1} \circ f_B$, alors Bob peut décoder le message en appliquant $f_B^{-1} \circ f_A$ (ce qui est possible car f_A est publique), et il aura la garantie que l'expéditeur est bien Alice : personne d'autre ne peut connaître f_A^{-1} qui est gardée secrètement par Alice. Or, si Oscar tente de se faire passer pour Alice, il devra coder son message par $f_O^{-1} \circ f_B$, qui donnera sûrement un message sans grand sens aux yeux de Bob, puisque personne ne sait quel est l'effet de $f_A \circ f_O^{-1}$, si ce n'est qu'elle n'est pas l'identité et que l'on ne retombe pas sur le message initial. Il y a alors fort à parier que le message ne voudra plus rien dire une fois décodé.
Le codage RSA utilise ce principe, et est basé sur la difficulté supposée à décomposer un nombre n qui est produit de deux grands nombres premiers. Alice choisit donc

deux *grands* nombres premiers p et q, et note $n = pq$. C'est là un premier problème, généralement résolu en générant de grands entiers aléatoires jusqu'à tomber sur un premier ou un pseudo-premier. Plusieurs algorithmes de détermination de pseudo-primalité sont connus et peu coûteux, notamment les tests probabilistes de Fermat et de Pollard ; l'algorithme exact AKS est également en temps polynomial.

Alice pose alors $m = (p-1)(q-1) = \phi(n)$. Puis elle choisit un entier c premier avec m. Le couple (n, c), que l'on notera (n_A, c_A) si plusieurs couples apparaissent, est la clé publique d'Alice. Le fait que c est premier avec m a une conséquence importante qui est la clé du décodage : il existe une identité de Bézout $cu + mv = 1$, autrement dit un inverse u de c modulo m. Le nombre u est la clé publique d'Alice. Elle peut aisément l'obtenir car elle connaît p et q, donc m, et donc peut appliquer l'algorithme d'Euclide pour trouver un u convenable. Mais Oscar, qui ne connait que n, peut difficilement trouver $\phi(n)$ en un temps raisonnable, et c'est un problème qui revient pour l'essentiel à déterminer la décomposition en facteurs premiers de n puisque $\phi(n) = n - (p+q) + 1$ et connaître $\phi(n)$ serait connaître pq et $p+q$, donc p et q.

3.4 La transformée de Fourier rapide (FFT)

Autres idées à explorer...

Plus de crypto et de codes correcteurs : Berlekamp, Pollard, code Minitel, etc. Parler de corps finis ?

- **Développements.**

  ⋆ **Théorème de Sophie Germain, [S. Francinou(2007a)]**

  ⋆ **Loi de réciprocité quadratique par les coniques, [Caldero-Germoni(2013), p. 182]**

  ⋆ **Théorème des deux carrés, [Perrin(1996)]**

  ⋆ **Théorème de Dirichlet faible, [S. Francinou(2007a)]**

  ⋆ **Algorithme de Berlekampp, [V. Beck(2005)]**

Références

[Hindry(2008)] et [Demazure(2008)] sont d'excellentes références qui permettent de faire une leçon riche et variée.

Rapport du jury. Il faut savoir si 113 est un nombre premier ! Attention aux choix des développements, ils doivent être pertinents (l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant !). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'Agrégation.

Φ Décomposition atomique des nombres pour la relation de divisibilité. Leur connaissance apporte donc beaucoup d'informations quant à la structure et au comportement des nombres et des objets construits sur eux, ainsi l'ordre d'un groupe, la caractéristique d'un anneau, etc. Cela motive la recherche d'informations sur leur répartition, et en particulier les nombreux résultats analytiques associés...

H cf. [**?**]

Avis. La leçon peut et doit brasser aussi large que les développements sur le sujet depuis l'arithmétique grecque. Ainsi les premiers intérêts purement arithmétiques et sont à évoquer, puis les équations diophantiennes, l'artihémtique et Gauss, et tout l'élan moderne de la cryptographie, puis des courbes algébriques. Ne pas laisser de côté toute la partie analytique, tout en n'en faisant qu'une partie de taille modeste et dûment motivée par l'intérêt constaté des nombres premiers.

⋆ ⋆ ⋆

1 Rôle fondamental des nombres premiers [?]

1.1 Théorème fondamental

- **Δ** Un entier $p \geqslant 2$ est premier si ses diviseurs dans $\mathbf{N}$ sont 1 et lui-même. On note ¶ leur ensemble.
- **Θ** (Lemme d'Euclide) Si $p \in$ ¶ divise bc, alors p divise b ou c
  - **A** $\sqrt{d}$ est rationnel si, et seulement si, d est un carré parfait.
- **Θ** (Théorème fondamental) Tout entier se décompose de manière unique à l'ordre près en produit de premiers
  - **A** (codage de Gödel) Les suites finies de $\mathbf{N}$ s'injectent dans $\mathbf{N}$ par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto 2^{x_1}3^{x_2}\cdots p_n^{x_n}$.
- **Θ** (deux carrés) Les entiers somme de deux carrés sont les entiers sont les entiers dont la valuation p-adique des p cong 3 mod 4 est paire.

1.2 Résultats généraux

- **Θ** (Wilson) Un entier $\geqslant 2$ est premier si, et seulement si, $(p-1)! \equiv -1[p]$.
- **Θ** (Fermat) Si $p \nmid a$, alors $a^p \equiv 1\ [p]$.
- **Δ** Un nombre de Carmichael est un entier composé n tel que pour tout $A \in [1, n-1]$, $a^n \equiv a[n]$.
- **Θ** (Korselt, 1899) Un nombre composé est de Carmichael si, et seulement si, il est sans facteur carré et si pour tout $p|n$, $p-1|n-1$.
  - **A** Les nombres de Carmichael sont impairs et ont au moins trois facteurs premiers.
- **Θ** (Euler) Pour tous a et n, on a $a^{\phi(n)} \equiv 1\ [n]$.
- **Θ** Si $a \wedge n = 1$, n est premier si et seulement si $(X+a)^n \equiv X^n + a[n]$. Ce résultat est à la base de la preuve de *PRIMES is in P*.
- **Θ** Si pour tout $a \in [1, n-1]$, $a^{n-1} \equiv a[n]$, alors n est premier.

1.3 Cryptographie RSA (1977)

Le système de codage est asymétrique si les différentes parties n'ont pas les mêmes informations. De manière générale, il s'agit de méthodes de codages peu coûteuses dont le décodage est très difficile à obtenir à partir de la seule connaissance de la fonction de codage. Mettons-nous en situation : Alice souhaite envoyer le message x à Bob. Un annuaire *public* de fonctions de codage est disponible, donnant pour tout individu X une méthode de codage, que l'on représente par une fonction f_X qui code un message x en un message $f_X(x)$. Alice code le message x en $y = f_B(x)$, ce qui fait que le message est illisible par un espion malveillant que nous appellerons Oscar. En effet, Oscar connaît la fonction qui a été utilisée pour coder x en y mais... il n'a aucune idée de comment faire le chemin inverse ! C'est ici qu'il importe que les fonctions soient difficiles à inverser. Lorsque Bob reçoit le message, il va pouvoir le décoder grâce à une information que lui seul connaît : l'inverse de f_B. Le grand avantage est qu'aucune information n'a besoin de circuler en ce qui concerne les clés secrètes – ici ce sont les inverses des fonctions de codage.
Un autre avantage est que ce système permet de *signer* le message. En effet, si au lieu d'envoyer $f_B(x)$ à Bob, Alice lui envoie $f_A^{-1} \circ f_B$, alors Bob peut décoder le message en appliquant $f_B^{-1} \circ f_A$ (ce qui est possible car f_A est publique), et il aura la garantie que l'expéditeur est bien Alice : personne d'autre ne peut connaître f_A^{-1} qui est gardée secrètement par Alice. Or, si Oscar tente de se faire passer pour Alice, il devra coder son message par $f_O^{-1} \circ f_B$, qui donnera sûrement un message sans grand sens aux yeux de Bob, puisque personne ne sait quel est l'effet de $f_A \circ f_O^{-1}$, si ce n'est qu'elle n'est pas l'identité et que l'on ne retombe pas sur le message initial. Il y a alors fort à parier que le message ne voudra plus rien dire une fois décodé.
Le codage RSA utilise ce principe, et est basé sur la difficulté supposée à décomposer un nombre n qui est produit de deux grands nombres premiers. Alice choisit donc deux *grands* nombres premiers p et q, et note $n = pq$. C'est là un premier problème, généralement résolu en générant de grands entiers aléatoires jusqu'à tomber sur un premier ou un pseudo-premier. Plusieurs algorithmes de détermination de pseudo-primalité sont connus et peu coûteux, notamment les tests probabilistes de Fermat et de Pollard ; l'algorithme exact AKS est également en temps polynomial.
Alice pose alors $m = (p-1)(q-1) = \phi(n)$. Puis elle choisit un entier c premier avec m. Le couple (n, c), que l'on notera (n_A, c_A) si plusieurs couples apparaissent, est la clé publique d'Alice. Le fait que c est premier avec m a une conséquence importante qui est la clé du décodage : il existe une identité de Bézout $cu + mv = 1$, autrement dit un inverse u de c modulo m. Le nombre u est la clé publique d'Alice. Elle peut aisément l'obtenir car elle connaît p et q, donc m, et donc peut appliquer l'algorithme d'Euclide pour trouver un u convenable. Mais Oscar, qui ne connait que n, peut difficilement trouver $\phi(n)$ en un temps raisonnable, et c'est un problème qui revient pour l'essentiel à déterminer la décomposition en facteurs premiers de n puisque $\phi(n) = n - (p+q) + 1$ et connaître $\phi(n)$ serait connaître pq et $p+q$, donc p et q.

2 Les nombres premiers au cœur de l'arithmétique [Hindry(2008)]

2.1 Congruences et équations diophantiennes

- **Θ** (triplet pythagoricien) Les triplets d'entiers solution de $x^2 + y^2 = z^2$ sont de la forme ...
- **Θ** L'équation de Fermat $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solution non triviale.
- **Δ** Les nombres de Sophie Germain sont les premiers p impairs tels que $2p+1$ soit premier. On ne sait s'il y en a une infinité.
- **Θ** (Théorème de Sophie Germain) Si p est un nombre de Sophie Germain, il n'existe pas d'entiers x, y, z tels que $xyz \not\equiv 0[p]$ et $x^p + y^p + z^p = 0$.
- **Θ** (Liouville) L'équation $(p-1)! + 1 = p^m$ n'a pas de solution pour $p > 5$.

Équations de Pell

2.2 Résidus quadratiques dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

- **Δ** Pour x entier et p premier supérieur à 3, on définit le symbole de Legendre $(\frac{x}{p})$ par 1 si x est un carré modulo p, -1 sinon.
- **Θ** Le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x^p \equiv a$ dans $\mathbf{F}_p$ est $\left(\dfrac{a}{p}\right)$.
- **Θ** (multiplicativité) $(\frac{xy}{p}) = (\frac{x}{p})(\frac{y}{p})$.
- **Θ** $(\frac{x}{p}) = 1$, $(\frac{x}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, $(\frac{x}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Θ (Loi de réciprocité quadratique) Si p et q sont premiers distincts et distincts de 2, alors $(\frac{q}{p})(\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Θ (deux carrés)

Θ (quatre carrés)

Symbole de Jacobi et applications

3 Applications algébriques [Perrin(1996)]

3.1 Théorie des groupes

On s'intéresse naturellement aux p-Sylow.

Θ (Cauchy)

Θ (Théorèmes de Sylow) Si G est un groupe d'ordre $p^a m$ avec p ne divisant pas m, alors :

- ⋆ Il existe un sous-groupe d'ordre p^a
- ⋆ Tous les tels p-Sylow sont conjugués
- ⋆ Le nombre de p-Sylow est congru à 1 modulo p et divise m

Classification de groupes d'ordres particuliers, Burnside, etc.

3.2 Irréductibilité des polynômes

Θ (Eisenstein) Si A est factoriel de corps de fractions K, si p est un premier de A tel que $p|a_i$ pour tout $i < n$, $p \not| a_n$ et $p^2 \not| a_0$, alors P est irréductible dans $K[X]$.

E
- ⋆ Si $a \neq \pm 1$ est quadratfrei, alors $X^n - a$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$
- ⋆ Si p est premier, alors $X^{p-1} + \cdots + X + 1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$

Θ (Réduction) Si A et B sont intrèges de corps de fractions K et L, si $\phi : A \to B$ est un morphisme, et si $f \in A[X]$ est tel que $\phi(f) \neq 0$ et $d(f) = d(\phi(f))$, alors si $\phi(f)$ est irréductible dans $L[X]$, alors il en va de même dans $A[X]$.

E
- ⋆ Si p est premier, $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbf{Z}/p$ et donc sur $\mathbf{Q}$.

Θ (Butler)

Θ (Rabin)

Θ (Berlekampp)

3.3 Théorie des corps

Θ La caractéristique d'un corps, si elle n'est pas nulle, est un nombre premier. En particulier les corps finis ont pour cardinal une puissance de p.

A (Wedderburn) Tout corps fini est commutatif.

3.4 Corps p-adiques et formes quadratiques sur $\mathbf{Q}$

4 Localisation et répartition des nombres premiers [Hindry(2008)]

Θ (crible d'Ératosthène) Mais l'algorithme est exhaustif et coûteux.

4.1 Exemples de classes de premiers

Θ Si $m^n + 1$ est premier avec $m, n \geqslant 2$, alors n est une puissance de 2 et m est pair.

E Les nombres de Fermat sont les $F_n = 2^{2^n} + 1$. Ils sont premiers pour $0 \leqslant n \leqslant 4$ et ce sont les seuls connus.

Θ propriétés sur les Fermat

Θ Si $m^n - 1$ est premier avec $m, n \geqslant 2$, alors $m = 2$ et n est premier.

E Les nombres de Mersenne sont les $M_p = 2^p - 1$ avec p premier. On ne sait s'il y en a une infinité.

Θ Les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^n M_{n+1}$ avec $M_{n+1} \in ¶$

4.2 Résultats de répartition

Θ ¶ est infini

Θ (bof) $\sum \frac{1}{p}$ diverge

Θ (postulat de Bertrand)

A (Théorème de Miller)

Δ La fonction de répartition des nombres premiers est $\pi(x) = |\{p \in ¶ | 0 \leqslant x\}|$

Θ (des nombres premiers de Hadamard-de la Vallée Poussin) On a l'estimation $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ et donc $p_n \sim n \log n$.

A (Mertens faible) $\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \sim \log \log n$.

Θ (Dirichlet faible)

Θ (Dirichlet) Pour m et n premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à m modulo n.

Θ (Chebotarev)

4.3 Tests de primalité

Θ Si $m^n + 1$ est premier avec $m, n \geqslant 2$, alors n est une puissance de 2 et m est pair.

E Les nombres de Fermat sont les $F_n = 2^{2^n} + 1$. Ils sont premiers pour $0 \leqslant n \leqslant 4$ et ce sont les seuls connus.

Θ propriétés sur les Fermat

A (Test de primalité de Pépin) F_k est un nombre premier si, et seulement si, $3^{\frac{F_k - 1}{2}} \equiv -1[F_k]$.

Θ Si $m^n - 1$ est premier avec $m, n \geqslant 2$, alors $m = 2$ et n est premier.

E Les nombres de Mersenne sont les $M_p = 2^p - 1$ avec p premier. On ne sait s'il y en a une infinité.

Θ Si p est de la forme $4k+3$ et si $2p+1$ est premier, alors M_p n'est pas premier.

Θ Les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^n M_{n+1}$ avec $M_{n+1} \in ¶$

Θ (Test de primalité de Lucas-Lehmer) Soit $s_n = (2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}$. Alors $M_p \in ¶$ si, et seulement si, $M_p | s_{p-2}$.

Probabilistes, Pollard, mais il existe des algorithmes polynomiaux (AKS !).

Autres idées à explorer...

PLUS D'ARITHMÉTIQUE Généralisations en théorie des nombres ? Composantes p-primaires pour les modules plus généraux ? Les connaître : une petite table de nombres premiers ? Quelques conjectures ? Plus de codes et d'effectif, de probabiliste peut-etre ! Probabilité de primalité relative

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème des deux carrés [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Théorème de Sophie Germain, [S. Francinou(2007a)]**
  - ⋆ **Probabilité de primalité relative, [S. Francinou(2007a)]**
  - ⋆ **Théorème de Dirichlet faible, [S. Francinou(2007a)]**

Références

[**?**] pour l'histoire. Concernant l'arithmétique élémentaire, [**?**] est une véritable bible élémentaire et originale, probablement trop peu consultée et qui atteint des summum de clarté et de cohérence du plan ; voir aussi [**?**]. Pour l'utilisation des premiers en théorie des anneaux et des groupes, le [Perrin(1996)] donne de bonnes idées, le [Hindry(2008)] également avec plus d'applications. Le [Samuel(2003)] va plus loin et se sert des mêmes idées en travaillant sur des idéaux premiers, ce peut être une généralisation puissante et naturelle. La cryptographie et les codes correcteurs sont les bienvenus, par exemple [Demazure(2008)], [Hindry(2008)] et [**?**]. De beaux résultats de théorie analytique des nombres feront la leçon changer un peu de paysage, et c'est une bonne chose : [Hindry(2008)] et [**?**] regorgent de matériel.

Rapport du jury. les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que Z et K[X], accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. On pourra aussi penser à des applications en algèbre linéaire. Bien mettre en évidence l'arithmétique sous-jacente. Les applications en algèbre linéaire sont appréciées. Il faudrait savoir pourquoi A[X] est principal si et seulement si A est un corps. Il faut savoir aussi que R[X, Y] est factoriel et non principal et exhibant un idéal non principal. Connaitre les théorèmes de transfert peut être utile.

Φ Généralisation des propriétés arithmétiques fondamentales des propriétés de **Z**.

H [Bourbaki(2007b)] Euler est le premier en 1770 à étendre la notion de divisibilité aux entiers de corps quadratiques, mais Lagrange montre peu après que ces anneaux ne sont pas tous principaux. La généralisation de l'arithmétique sur **Z** est alors sans trop d'espoirs, mais Kummer puis Dedekind et Kronecker éclairent la théorie des nombres d'un jour nouveau en introduisant la notion d'idéaux, et dégageant l'excellente structure arithmétique des anneaux principaux.

Avis. Il faut montrer la possibilité de généraliser sur ces anneaux une arithmétique que l'on connait bien sur **Z**, mais ne pas s'y limiter. Puisqu'il n'y a pas de leçons sur des notions connexes, généralisant ou affaiblissant la principalité, c'est peut-être l'occasion d'introduire les anneaux euclidiens, factoriels, noetheriens, etc. Les modules sur un anneau principal ont des propriétés suffisamment particulières et exploitant bien la spécificité de ces anneaux pour être développés.

⋆ ⋆ ⋆

$(A,+,\times)$ anneau commutatif, $A^\times$ son groupe des unités, K son corps de fractions.

1 Idéaux et arithmétique [?, Samuel(2003)]

1.1 Propriétés des idéaux

Δ Un idéal I de A est un sous-groupe absorbant, *i.e.* $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$.

Δ Un idéal est premier si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
- ⋆ A/I est intègre
- ⋆ si $ab \in I$, alors $a \in I$ ou $b \in I$
- ⋆ $A \backslash I$ est stable par produit

Δ Un idéal est maximal si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
- ⋆ A/I est un corps
- ⋆ si J est un idéal tel que $I \subseteq J$, alors $J = I$ ou $J = A$

Θ (Krull) Tout idéal est contenu dans un idéal maximal.

1.2 Divisibilité associés

Δ Pour $a, b \in K$, on dit que a divise b (dans A), et on note $a|b$, s'il existe $q \in A$ tel que $b = aq$, *i.e.* si $(b) \subseteq (a)$.

Δ On dit que a et b sont associés si$a|b$ et $b|a$, *i.e.* si $(a) = (b)$. Ils sont indistingables du point de vue de la divisibilité.

Θ Si A est intègre, a et b sont associés si, et seulement si, $\exists u \in A^\times, a = bu$.

E Les associés à 1 sont les unités.

1.3 Élements irréductibles et premiers

Δ Un élément $p \in A$ est irréductible si $p \notin A^\times$ et si les seuls diviseurs de p sont ses associés et les unités.

E Dans $\mathbf{Z}$, les irréductibles sont les premiers. Dans $K[X]$, les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Δ Un élément $p \in A$ est premier si $p|ab$ implique $p|a$ ou $p|b$.

E Dans $\mathbf{Z}$, les premiers sont les premiers.

Θ Si A est intègre, premier implique irréductible.

Θ $p \in A$ est premier si, et seulement si, (p) est premier.

Θ Si I est un idéal propre premier, alors A/I est intègre.

2 Arithmétique sur un anneau principal [Perrin(1996)]

2.1 Principalité

Δ Un idéal est principal s'il est engendré par un élément, *i.e.* s'il se met sous la forme $(a) = Aa$.

Δ Un anneau est principal si tout idéal est principal, *i.e.* engendré par un élément.

E
- ⋆ $\mathbf{Z}$
- ⋆ $k[X]$
- ⋆ $k[[X]]$
- ⋆ $H(K)$

Θ $A[X]$ est principal si, et seulement si, A est un corps.

2.2 PGCD et PPCM

Δ On dit que d est un PGCD de a et b si ($u|a$ et $u|b$) $Longrightarrow\ u|d$. On dit que m est un PPCM de a et b si ($a|v$ et $b|v$) $Longrightarrow\ m|v$.

E Mais PGCD et PPCM n'existent pas toujours ! Par exemple dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$...

Θ Soit A un anneau factotiel, on a le PGCD t le PPCM en fonction des décompositions en irréductibles de $a =$ et $b =$: PGCD = ET PPCM=.

Δ Deux éléments sont premiers entre eux si 1 est un PGCD, *i.e.* si les seuls éléments qui divisent a et b sont les unités.

Θ (Lemme de Gauss) Si $a|bc$ avec a et b premiers entre eux, alors $a|c$.

2.3 Factorialité

Δ Si P est un système de représentants des irréductibles de A, A est factoriel s'il est intègre et si tout élément non nul se factorise de manière unique en produits d'irréductibles $a = u\prod_P p^{v_p(a)}$. Les valuations p-adiques de a sont entières et forment une famille presque nulle.

Θ Un anneau principal est factoriel.

E Dans $K[X]$, un système de représentants est formé des polynômes irréductibles unitaires.

E $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ est non factoriel car $6 = 2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5}) \times (1 - i\sqrt{5})$.

E $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas factoriel car 2 et X sont premiers entre eux, mais $1 \notin (2, X)$.

Θ (Gauss) Si A est factoriel, alors $A[X]$ est factoriel.

Θ Dans un factoriel, irréductible est équivalent à premier.

Θ $\mathbf{Z}[i]$ est euclidien donc factoriel.

A (deux carrés) Un nombre n est somme de deux carrés si, et seulement si, ses valuations p-adiques pour $p \equiv 3$ [4] sont paires.

R La factorialité des anneaux principaux permet d'obtenir l'analogue du théorème fondamental de l'arithmétique.

Θ (chinois) Si $I_1, \dots, I_n$ sont des idéaux premiers distincts et $I = I_1 \cdots I_n$, alors $A/I \cong A/I_1 \times \cdots \times A/I_n$.

Voir BMP partie module et Demazure, Berhuy, etc. Applications en algèbre linéaire (Lemme des noyaux, Frobenius, etc.), Berlekampp et autres algorithmes de décomposition ou résultats effectifs

2.4 Euclidianité

Δ Un anneau des euclidien si...

Θ Un anneau euclidien est principal.

3 Théorie des modules sur un anneau principal, [Berhuy(2012)]

Θ Si M est un A-module de rang fini n sur A principal, si M' est un sous module de M alors

- ⋆ M' est libre de rang inférieur à n
- ⋆ Il existe une base $(e_i)_{i\leqslant n}$ de M et des éléments $a_i \in A$ tels que $a_1|\cdots|a_q$ et $(a_ie_i)_{i\leqslant q}$ base de M'

De plus, les a_i sont uniques à association près, ce sont les invariants de Smith de M'.

Autres idées à explorer...

Focus sur plus d'applications : modules, algèbre linéaire, arithmétique, théorie des nombres... Anneaux locaux, idéaux maximaux (Krull) Anneaux de Dedekind, anneaux d'entiers, idéaux premiers et TN sur les idéaux (Samuel) Résultant Algébricité

- **Développements.**

  - ⋆ **Theorème des deux carrés, [Perrin(1996)]**

  - ⋆ $\mathbf{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ **principal non euclidien, [Perrin(1996)]**

Références

[Perrin(1996), ch. 2], [**?**] pour la théorie générale. [Samuel(2003)] pour l'arithmétique et l'utilisation des propriétés plus faibles des anneaux en théorie des nombres. Il traite aussi les modules sur un anneau principal, complété par [Berhuy(2012), ch. 8]. [Hindry(2008), ch. 3] pour l'arithmétique et des applications ?

Rapport du jury. Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers Fq doivent être connues. Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis ne doivent pas être négligées. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé. Il convient de montrer comment l'utilisation des corps de rupture permet de prouver l'irréductibilité d'un polynôme. Comprendre les sous-corps de F64 est un bon exercice, en particulier F_16 n'est pas un sous-corps de F64. Il faut savoir construire un corps de petit cardinal : F4, F8, F9, et mener des calculs dans ce corps.

Φ

H La théorie des corps finis émerge avec les travaux arithmétiques de Gauss ainsi que les travaux sur les groupes de racines de Galois. Si le travail sur les corps s'est alors essentiellement concentré sur l'utilisation d'une structure si riche et de bon comportement, l'avènement de l'informatique et l'importance croissante de la cryptographie comme de la correction d'erreurs est un souffle nouveau pour l'étude, la compréhension et la manipulation des corps finis pour eux-mêmes.

Avis. Il faut insister sur les applications. Les résultats théoriques sont nombreux, il serait bien de ne pas séparer artificiellement cette leçon en une partie de résultats théoriques généraux et une partie sur des corps particuliers et des applications.

⋆ ⋆ ⋆

p désigne un nombre premier, $q = p^n$ pour un entier $n \geqslant 1$, et K est un corps commutatif.

1 Théorie générale des corps [Perrin(1996), Hindry(2008)]

1.1 Corps finis

Δ Un corps fini est un corps ayant un nombre fini d'éléments.

Θ Tout anneau intègre fini est un corps.

Θ Un corps fini n'est jamais algébriquement clos, le polynôme $\prod_K (X-x)+1$ n'ayant pas de racines dans K.

Θ Si k est un corps fini de cardinal q, alors $\forall x \in k, x^q = x$.

A (Chevalley-Warning) Si k est un corps fini de cardinal $q = p^n$, si on a une famille $(P_i)_i \in K[X_1, \dots, X_n]^I$ telle que $\sum_I d(P_i) < n$, alors le nombre de racines communes aux P_i est nul modulo p.

A Une quadrique admet toujours des points rationnels non triviaux sur un corps fini.

Δ L'application $\phi : n \in \mathbf{Z} \mapsto n.1_K \in k$ est un morphisme d'anneaux de noyau $p\mathbf{Z}$ pour $p \in \P \cup \{0\}$. Ce générateur est la caractéristique $car(k)$ de k.

Δ Le sous-corps premier de k est le plus petit corps contenant k : il s'agit de $Frac(Im(\phi))$, qui est $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ en caractéristique p, $\mathbf{Q}$ en caractéristique nulle.

Θ Un corps est un espace-vectoriel sur son corps premier, en particulier son cardinal est une puissance de p.

A (Wedderburn) Toute algèbre à division finie est commutative, *i.e.* est un corps.

1.2 Existence et unicité

Θ Il existe un unique corps fini à p éléments, noté $\mathbf{F}_p \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Θ En caractéristique p, l'application $F : x \in k \mapsto x^p \in k$ est un $\mathbf{F}_p$-morphisme de corps. C'est un automorphisme si k est fini, c'est l'identité sur un corps premier.

A (Fermat) Pour tout $z \in \mathbf{Z}$, $z^p \equiv z \ (mod\ p)$.

A En caractéristique p, tout élément admet une unique racine p-ième.

Θ Il existe un unique corps fini à q éléments à isomorphisme près, c'est le corps de décomposition sur $\mathbf{F}_p$ de $X^q - X$. On le note $\mathbf{F}_q$.

A (Wilson) $p \geqslant 2$ est premier si, et seulement si, $(p-1) \equiv -1 \ (mod\ p)$.

Θ Si $P \in \mathbf{F}_p[X]$ est irréductible de degré n, alors $\mathbf{F}_p[X]/(P) \cong \mathbf{F}_q$. En particulier $\mathbf{F}_{p^n}$ est le corps de rupture de tout polynôme irréductible de degré n de $\mathbf{F}_p$.

E $\mathbf{F}_4[X] \cong \mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X2 + 1)$, *i.e.* $\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_2(\alpha)$ où $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

Θ Les sous-corps de $\mathbf{F}_{p^n}$ sont les $\mathbf{F}_{p^d}$ avec $d|n$. Plus précidément, il s'agit de $\{x \in \mathbf{F}_{p^n} \mid x^{p^d} = x\}$.

Θ Si α est de degré r sur $\mathbf{F}_p$, alors les α^{p^i} sont distincts pour $i < r$ et $\mu_\alpha = \prod_{i<r}(X - \alpha^{p^i})$.

Θ Si F est le morphisme de Frobenius, alors $Aut(\mathbf{F}_q) = \langle F \rangle \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

+ Un peu de Galois et plus de détails sur le extensions de corps finis (parfaits, etc.)

1.3 Structure de $\mathbf{F}_q^\star$ et arithmétique

Θ $\mathbf{F}_q^\star$ est un groupe multiplicatif cyclique, isomorphe à $\mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$.

Θ (élément primitif) Si $\mathbf{F}_q^\star = \langle \alpha \rangle$, alors $\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_p[\alpha]$. En particulier $(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ est une base de $\mathbf{F}_q^\star$.

Δ Un élément primitif est aussi appelé racine primitive de $\mathbf{F}_q$.

Δ Un carré de $\mathbf{F}_q$ est un élément $x \in \mathbf{F}_q$ tel qu'il existe $x_0 \in \mathbf{F}_q$ tel que $x = x_0^2$. On note $\mathbf{F}_q^2$ leur ensemble.

Θ On a les suites exactes $1 \to \pm 1 \to \mathbf{F}_q \to \mathbf{F}_q^2 \to 1$ et $1 \to \mathbf{F}_q^2 \to \mathbf{F}_q \to \pm 1 \to 1$, en particulier $|\mathbf{F}_q^2| = \frac{q+1}{2}$ et $|\mathbf{F}_q^{\star 2}| = \frac{q-1}{2}$.

+ Propriétés des sommes de Gauss

Δ Le symbole de Legendre est $\left(\frac{x}{p}\right)$, qui vaut 0 si $x = 0$, 1 si $x \in \mathbf{F}_q^{\star 2}$, et -1 sinon.

Θ (Loi de réciprocité quadratique) Si p et q sont premiers distincts et distincts de 2, alors $(\frac{q}{p})(\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

+ Et quelques autres propriétés et manipulations

2 Polynômes sur les corps finis [Gozard(2009)]

Θ Toute application $\mathbf{F}_q \to \mathbf{F}_q$ est polynômiale, à savoir $f(x) = \sum_{y \in \mathbf{F}_q} f(x)(1 - (x-u)^{q-1})$.

2.1 Irréductibles

Δ On note $I(m, q)$ l'ensemble des polynômes irréductibles sur $\mathbf{F}_q[X]$ de degré n.

Θ La cloture algébrique de $\mathbf{F}_{p^n}$ est $\overline{\mathbf{F}_p} = \bigcup_n \mathbf{F}_{p^{n!}}$.

Δ La fonction de Möbius $\mu : \mathbf{N}^\star \to \{-1, 0, 1\}$ est définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n admet un facteur carré, $\mu(n) = (-1)^k$ si $n = p_1 \cdots p_k$.

Θ (inversion de Möbius) Si $(G, +)$ est un groupe abélien, $f : \mathbf{N} \to G$ et $g(k) = \sum_{r|k} f(r)$, alors $f(k) = \sum_{r|k} \mu(\frac{k}{r} g(r)$.

Θ $\forall k > 0, X^{q^k} - X = \pi_{Q \in I(k,q)} Q$.

Θ (Gauss) On a $X^{q^n} - X = \prod_{d|n, P \in I(d,q)} P$.

Θ $|I(k,q)| = \frac{1}{k} \sum_{r|k} \mu(\frac{n}{r}) q^r$, en particulier sur un corps fini il existe toujours des polynômes irréductibles de tout degré.

2.2 Quelques critères

Θ (Eisenstein) Si A est factoriel de corps de fractions K, si p est un premier de A tel que $p|a_i$ pour tout $i < n$, $p \not| a_n$ et $p^2 \not| a_0$, alors P est irréductible dans $K[X]$.

E ⋆ Si $a \neq \pm 1$ est quadratfrei, alors $X^n - a$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$
⋆ Si p est premier, alors $X^{p-1} + \cdots + X + 1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$

Θ (Réduction) Si A et B sont intrèges de corps de fractions K et L, si $\phi : A \to B$ est un morphisme, et si $f \in A[X]$ est tel que $\phi(f) \neq 0$ et $d(f) = d(\phi(f))$, alors si $\phi(f)$ est irréductible dans $L[X]$, alors il en va de même dans $A[X]$.

E ⋆ Si p est premier, $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbf{Z}/p$ et donc sur $\mathbf{Q}$.

2.3 Algorithmes de factorisation [Demazure(2008)]

Θ (Butler)

Θ (Rabin)

Θ (Berlekampp)

2.4 Cyclotomie et corps finis

3 Codes correcteurs et cryptographie [Demazure(2008)]

4 Algèbre linéaire sur les corps finis

4.1 Groupe linéaire [Perrin(1996)]

Θ (Frobenius-Zolotarev) $\forall u \in GL_n(\mathbf{F}_p) \subseteq \mathfrak{S}_{p!}, \varepsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$.

A La signature du Frobenius pour p premier impair est $\varepsilon(F) = (-1)^{(p-1)(n+1)/2}$.

Θ On a les cardinaux
⋆ $|GL_n(\mathbf{F}_q)| = (q^n - 1 = (q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$
⋆ $|SL_n(\mathbf{F}_q)| = (q^n - 1 = (q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2})q^{n-1}$

Θ On a les isomorphismes
⋆ $GL_2(\mathbf{F}_2) = SL_2(\mathbf{F}_2) = PSL_2(\mathbf{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$
⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4,\ PSL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$
⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$
⋆ $PGL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5,\ PSL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{A}_5$

4.2 Formes quadratiques, [Perrin(1996), de Seguin-Pazzis()]

Θ (classification)

Θ LRQ

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Polynômes irréductibles sur $\mathbf{F}_q$, [S. Francinou()]**
  - ⋆ **Loi de réciprocité quadratique & sommes de Gauss, [Hindry(2008)]**
  - ⋆ **Théorème de Wedderburn, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques, [Caldero-Germoni(2013), p. 182]**

Références
[Perrin(1996)], [Gozard(2009)] et [Demazure(2008)] ont de très bons plan et l'essentiel du contenu de la leçon. Des compléments à prendre dans [Hindry(2008)].

Rapport du jury. C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, etc.

Φ Les séries formelles sont une généralisation de polynôme à un nombre ifnini de termes. Cela permet d'exploiter la puissance des séries entières tout en s'affranchissant des problèmes de convergence, à condition de ne pas avoir à évaluer mais de simplement condenser l'informations dans les coefficients – c'est le cas avec toute série génératrice notamment.

H Les premières manipulations de séries infinies surviennent avant un développement rigoureux de l'analyse, et les manipulations sont essentiellement formelles comme en témoignent les nombreuses séries étudiées par Euler, les développements de MacLaurin, les séries de Bernoulli, etc.

Avis. De nombreuses applications en combinatoire, une bonne possibilité de travailler un peu avec les nombres p-adiques. L'essentiel est de souligner la grande facilité obtenue grâce à l'affranchissement des problèmes analytiques accompagnant les sries entières.

⋆ ⋆ ⋆

A est un anneau commutatif.

1 Séries formelles

1.1 Espace vectoriel des séries formelles

Δ Un polynôme est une suite presque nulle, *i.e.* un élément de $A[X] = A^{(\mathbf{N})}$. Une série formelle est une suite, *i.e.* un élément de $A[[X]] = A^{\mathbf{N}}$.

Δ La somme de deux séries $\sum a_n X^n$ et $\sum b_n X^n$ est $\sum (a_n + b_n) X^n$, leur produit externe est $\lambda \sum a_n X^n = \sum (\lambda a_n) X^n$.

Θ $A[[X]]$ est une algèbre.

Δ La valuation d'une suite $(a_n)_n$ est $v(a) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$.

Θ L'application $d(a,b) = e^{-v(a-b)}$ est une distance ultramlétrique sur $A^{\mathbf{N}}$.

Θ $A^{\mathbf{N}}$ est le complété de $A^{(\mathbf{N})}$ pour d. C'est l'ensemble des séries formelles sur A, noté $A[[X]]$.

1.2 Produit de séries formelles et inversion

Δ Le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n X^n$ et $\sum b_n X^n$ est la série $\sum c_n X^n$ où $c_n = \sum_{p+q \leqslant n} a_p b_q$.

Θ $A[[X]]$ est une algèbre pour ces lois, intègre si A l'est.

Θ L'algèbre $A[[X]]$ est intègre si A l'est.

Θ L'ordre d'un produit est la somme des ordres.

Θ L'inverse de $1 - Y$ dans $K[[Y]]$ est $\sum Y^n$.

Θ Une série possède un inverse dès que $a_0 \in A^{\times}$.

1.3 Substitutions de séries formelles et réciproque

Θ Si $T = \sum b_n Y^n$, la famille $a_n T(X)^n$ est sommable si $b_0 = 0$.

Δ La série obtenue par subtitution de $T(Y)$ à X dans $\sum a_n X^n$ est la série $\sum a_n T(Y)^n$.

Θ La composition est associative et multiplicative à gauche

Θ Une série formelle admet une réciproque si, et seulement si, $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Elle est alors donnée par...

Θ (Lagrange-Schur) Si k est un corps de caractéristique nulle, pour toute $S \in k([x]), val(S) = 1$ on a $c_k(S^{-1}) = \frac{1}{k} c_{k-1}\left(\left(\frac{S}{X}\right)^{-k}\right)$.

A Un mouvement elliptique d'excentricité e et de période de révolution 2π donne bien l'équation de Képler $t = \theta - e \sin\theta$. On peut alors exprimer θ en fonction de t grâce à la formule de Lagrange : $\theta = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dx^k} \sin^k x\right)_{x=t}$.

1.4 Propriétés générales des séries formelles

Θ On a les propriétés de transfert suivantes :

- ⋆ Si A est local, il en va de même pour $A[[X]]$
- ⋆ Si A est noetherien, il en va de même pour $A[[X]]$
- ⋆ Si A est intègre, il en va de même pour $A[[X]]$

Mais il existe des A intégralement clos tels que $A[[X]]$ ne le soit pas (article Samuel), de même pour la factorialité.

Θ Propriété universelle des séries formelles

Θ Les idéaux de $K[[X]]$ sont les (X^i). En particulier $K[[x]]$ est principal.

Θ Le seul irréductible est X. En particulier, $K[[X]]$ est local.

2 Application des séries formelles

2.1 Fractions rationnelles

Θ Une série entière $S = \sum a_k X^k$ est une fraction rationnelle si, et seulement si, $\exists m \in \mathbf{N}, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^m, \exists n \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant 0, a_{n+N} = \lambda_1 a_{n+N-1} + \cdots + \lambda_N a_n$.

Θ Si $\Delta_n = det(a_{i+j})_{ij}$, alors S est une fraction rationnelle si, et seulement si, les Δ_n sont nuls à partir d'un certain rang.

2.2 Suites récurrentes

Δ La série génératrice d'une suite $(u_n)_n$ est la série formelle $\sum u_n X^n$. La série génératrice exponentielle de $(u_n)_n$ est $\sum \frac{u_n}{n!} X^n$.

Θ Une suite récurrente linéaire a pour terme général...

E Fibonacci

E Nombres de Catalan

2.3 Dénombrement

Θ Le nombre de Bell-Stirling, *i.e.* le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments est $\sum_k \frac{n^k}{k!}$.

2.4 Équations différentielles du type de Fuchs

Δ Une équation différentielle du type de Fuchs est une équation en y de la forme $\sum a_i(x) x^{n-i} y^{(n-i)} = 0$ avec $a_0 = 1$ et les a_i analytiques au voisinage de 0.

Θ Il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ et Φ développable en série entière au voisinage V de 0 telle que $\Phi(0) \neq 0$ et $x^\lambda \Phi$ est solution pour $x > 0$ et $x \in V$.

E

Autres idées à explorer...
Plusieurs variables !
p-adiques
Théorème de Puiseux (Bourbaki, Algèbre, V)
$exp(M_n) = GL_n$
Séries de Bernoulli
Formule d'inversion de Lagrange
Algèbre homologique, séries de Poincaré
Théorie des nombres, séries formelles p-adiques

Θ (Représentation de Borel) $f \in C^\infty \mapsto \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X \in \mathbf{R}[[X]]$ est un morphisme d'algèbre stable par dérivation, non injectif et surjectif.

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Hankel-Bourbaki, [Chenciner()]**
  - ⋆ **Théorème de division de Weierstrass, [Chenciner()]**
  - ⋆ **Nombres de Bell ou problème de dénombrement, [S. Francinou(2007a)]**

Références

CAPES externe 2010 math 2 ! ! !

[Chenciner()] est très bien et va loin, il est autosuffisant pour la théorie générale. Sinon : [Cartan(1961)] fait la partie algébrique et la construction extérieure. [**?**] ou [Aigner(2007)] pour tout ce qui est séries génératrices et applications au dénombrement (trouver une bonne référence pour les probabilités, notamment Galton-Watson ou n'importe quel processus discret, [Toulouse()]).

Rapport du jury.

Φ

H

Avis. Ne pas faire un catalogue de propriétés d'extensions de corps, mais motiver les propriétés par les problèmes posés par celles déjà introduites et leur insuffisance pour d'autres objectifs. Les corps de rupture et de décomposition méritent une place de choix. La théorie de Galois est évidemment une mine de développements avancés.

⋆ ⋆ ⋆

1 Extensions de corps [Perrin(1996), Carrega(1981)]

1.1 Extensions et degrés

Δ L'application $\phi : n \in \mathbf{Z} \mapsto n.1_K \in k$ est un morphisme d'anneaux de noyau $p\mathbf{Z}$ pour $p \in ¶ \cup \{0\}$. Ce générateur est la caractéristique $car(k)$ de k.

Δ Le sous-corps premier de k est le plus petit corps contenu dans k : il s'agit de $Frac(Im(\phi))$, qui est $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ en caractéristique p, $\mathbf{Q}$ en caractéristique nulle.

Δ Une extension de corps de K à L est un morphisme de corps $i : K \to L$. On note $L : K$. C'est alors une injection, et on identifie souvent K et $i(K) \subseteq L$.

Θ Si $L : K$ est une extension de corps, alors L est naturellement muni d'une structure de K-espace vectoriel. On note $dim_K(L) = [L : K]$ sa dimension En particulier, un corps est un espace-vectoriel sur son corps premier, en particulier son cardinal est une puissance d'un nombre premier p.

Θ (Wedderburn) Toute algèbre à division finie est commutative, *i.e.* est un corps.

Θ (base télescopique) Si $(e_i)_i$ est une base de L sur K et si $(f_j)_j$ est une bas e de M sur L, alors $(e_i f_j)_{ij}$ est une base de M sur K.

Θ (multiplicativité des degrés) Si $M : L : K$, alors $[M;K] = [M : L][L : K]$.

Δ Si on a deux extensions $i : K \to L$ et $i' : K' \to L'$, on dit qu'elles sont isomorphes s'il existe deux morphismes de corps $a : K \to K'$ et $b : L \to L'$ tels que $i' \circ a = b \circ i$.

1.2 Extensions engendrées

Δ L est engendrée par A sur K si L est le plus petit surcorps de K contenant A.

Δ Une extension est de type fini si elle est engendrée par un nombre fini d'éléments. Elle est monogène si elle est engendrée par un seul élément.

1.3 Constrcutibilité

Δ Un nombre est constructible en une étape par X à partir de nombres x_i s'il est intersection de deux éléments de X construits sur les x_i. Un élément est constructible par X s'il est constructible en un nombre fini d'étapes à partir de $(0,0)$ et $(1,0)$.

Θ (Gauss-Wantzel) Un nombre est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, il est au sommet d'une tour quadratique au-dessus de $\mathbf{Q}$.

A La trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle sont des problèmes impossibles.

Θ (Videla) Un nombre est constructible par droites, cercles et coniques si, et seulement si, il est au sommet d'une tour de corps sur $\mathbf{Q}$ dont les extensions intermédiaires sont de degré 2, 3 ou 4.

A La trisection de l'angle et la duplication sont possibles pour la construction conique, mais pas la quadrature du cercle.

2 Théorie des nombres [Perrin(1996), Samuel(2003)]

2.1 Algébricité

Δ Soit $a \in L$ et $L : K$. On dit que a est algébrique sur K s'il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que $P(a) = 0$. Si a n'est pas algébrique sur K, il est transcendant sur K.

Θ Si a est transcendant sur K, alors on a $K[a] \cong K[X] \subsetneq K(a) \cong K(X)$.

Δ Si a est algébrique sur K, on peut définir son polynôme minimal $\mu_{a,K}$ comme l'unique générateur unitaire de l'idéal des annulateurs de a.

Θ Si a est algébrique sur K, alors $K[a] \cong K[X]/\mu_{a,K}$ et $[K(a):K] = deg(\mu_{a,k})$.

Θ Soit $a \in L$ et $L : K$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :
- ⋆ a est algébrique sur K
- ⋆ $K[a] = K(a)$
- ⋆ $[K[a]:K] < \infty$

Θ L'ensemble des éléments de L algébriques sur K forment un sous-corps de L, appelé fermeture algébrique de K dans L.

Θ (paqb de Burnside)

Δ On dit que $L : K$ est finie si $[L : K]$ est fini. On dit que $L : K$ est algébrique si tout élément de L est algébrique sur K.

E Il existe des extensions algébriques infinies, ainsi la fermeture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$.

Θ Une extension finie est algébrique. Une tour finie d'extensions algébriques est algébriques.

Θ (Lüroth) Si L est une extension intermédiaire de $K(X) : K$, alors il existe $F \in K(X)$ tel que $L = K(F)$.

Δ K est algébriquement clos si tout polynôme de $K[X]$ admet une racine dans L. Une clôture algébrique de K est une extension algébrique $L : K$ telle que L soit algébriquement clos.

Θ (Steiniz) Tout corps admet une clôture algébrique, unique à isomorphisme près.

2.2 Extensions quadratiques

2.3 Corps fini

Θ Il existe un unique corps fini à p éléments, noté $\mathbf{F}_p$.

Θ En caractéristique p, l'application $F : x \in k \mapsto x^p \in k$ est un $\mathbf{F}_p$-morphisme de corps. C'est un automorphisme si k est fini, c'est l'identité sur un corps premier.

Θ Il existe un unique corps fini à q éléments à isomorphisme près, c'est le corps de décomposition sur $\mathbf{F}_p$ de $X^q - X$.

Θ Si $P \in \mathbf{F}_p[X]$ est irréductible de degré n, alors $\mathbf{F}_p[X]/(P) \cong \mathbf{F}_q$. En particulier $\mathbf{F}_{p^n}$ est le corps de rupture de tout polynôme irréductible de degré d de $\mathbf{F}_p$.

E $\mathbf{F}_4[X] \cong \mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X2 + 1)$, *i.e.* $\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_2(\alpha)$ où $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

Θ Les sous-corps de $\mathbf{F}_{p^n}$ sont les $\mathbf{F}_{p^d}$ avec $d \mid n$. Plus précidément, il s'agit de $\{x \in \mathbf{F}_{p^n} \mid x^{p^d} = x\}$.

Θ Si α est de degré r sur $\mathbf{F}_p$, alors les α^{p^i} sont distincts pour $i < r$ et $\mu_\alpha = \prod_{i<r}(X - \alpha^{p^i})$.

Θ $Aut(\mathbf{F}_q) = \langle F \rangle \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

2.4 Extensions cyclotomiques

Δ L est une extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$ si c'est un corps de décomposition de $X^n - 1$ sur $\mathbf{Q}$.

Θ Si $\mu_n(K)$ est l'ensemble des racines n-ième de l'unité dans K, et $\mu_n^\star(K)$ l'ensemble des racines n-ièmes primitives de l'unité, on a :
- ⋆ $K = \mathbf{Q}(\mu_n(K)) = \mathbf{Q}(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mu_n^\star(K)$
- ⋆ $\mu_n(L) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mu_n^\star(L) \cong (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\star$
- ⋆ $\phi_{n,\mathbf{Q}}$ est de degré $\phi(n)$ et est irréductible sur $\mathbf{Q}$

Θ $Gal(\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}) \cong (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.

3 Polynômes

3.1 Corps de rupture [Perrin(1996), Gozard(2009)]

Δ Un polynôme $\in K[X]$ est irréductible si $P \notin A^\star$ et dès que $P = QR$ pour $Q, R \in K[X]$, alors $d(P) = 0$ ou $d(R) = 0$, *i.e.* s'il n'a pas de diviseurs non triviaux.

Δ Un corps de rupture de $P \in k[X]$ est une extension K de k telle que P ait une racine α dans K et $K = k(\alpha)$.

Θ Tout polynôme non constant admet un corps de rupture., et il est unique à isomoprhisme près.

E
- ⋆ $X^2 - 2$ a pour corps de rupture $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
- ⋆ $X^3 - 2$ a pour corps de rupture $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ mais aussi $\mathbf{Q}(j\sqrt[3]{2})$.

Θ Si P est irréductible sur K et $P(\alpha) = 0$ avec $\alpha \in L : K$, alors P est le polynôme minimal de α sur K et $K(\alpha) \cong \frac{K[X]}{(P)}$ et $[K(\alpha) : K] = d$.

E P n'est pas toujours scindé sur un corps de rupture, ainsi $X^3 - 2$ n'est pas scindé sur $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}$.

3.2 Corps de décomposition

Δ Un corps de décomposition de $P \in k[X]$ est une extension K telle que P soit scindé sur K et que K soit engendré sur k par les racines de P, *i.e.* que K soit minimal pour cette propriété.

Θ Tout polynôme non constant admet un corps de décomposition, unique à isomorphisme près, noté $D_k(P)$.

E
- ⋆ $X^3 - 2$ a pour corps de décomposition $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{2})$.
- ⋆

4 Théorie de Galois [Gozard(2009)]

4.1 Extensions séparables

Δ Un polynôme $P \in K[X]$ est séparable s'il n'a pas de racines multiples dans un corps de décomposition. Autrement, il est inséparable. Un élément est séparable sur K si son polynôme minimal est séparable sur K. Une extension est séparable si elle est algébrique et si tout élément est séparable.

Θ $P \in K[X]$ est séparable si, et seulement si, P et P' sont premiers entre eux, *i.e.* si, et seulement si, $disc(P) \neq 0$. En particulier, un polynôme irréductible P est séparable si, et seulement si, P' est non nul. En caractérisque nulle, toute extension algébrique est donc séparable.

E Le polynôme $P = Y^p - X^p \in K[X]$ où $K = \mathbf{F}_p(X^p)$ est irréductible mais inséparable.

Θ Si $M : L : K$ et $M : K$ séparable, alors $M : L$ et $L : K$ sont séparables.

Θ (élément primitif) Si $L : K$ est séparable et finie, alors elle est monogène.

E $\mathbf{Q}(i, j, \sqrt{2}) : \mathbf{Q}$ est monogène et engendrée par $i + j + \sqrt{2}$.

4.2 Extensions normales

Δ Une extension $L : K$ est normale si tout polynôme $P \in K[X]$ admettant une racine dans L est scindé sur L. Autrement dit, dès que L est un corps de rupture, c'est un corps de décomposition.

E
- ⋆ $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}$ n'est pas normale
- ⋆ une extension d'un corps algébriquement clos est normale
- ⋆ une extension quadratique est normale

Θ Toute extension normale finie de K est corps de décomposition d'un polynôme unitaire sur K.

Δ Clôture normale

4.3 Groupe de Galois

Δ Une extension est galoisienne si elle est normale et séparable.

Δ La groupe de Galois d'une extension $L : K$ est le groupe des K-automorphismes de L.

Θ Si G est un groupe fini d'automorphismes de L, alors $L^G = \{x \in L \mid\}$

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Wedderburn, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Théorème de Gauss-Wantzel-Videla, [Carrega(1981)]**
  - ⋆ **Théorème de l'élément primitif, [Gozard(2009)]**
  - ⋆ **Théorème de Lüroth, [S. Francinou(), ?]**
  - ⋆ **Polynômes irréductibles sur Fq, [S. Francinou()]**

Références

Un bon livre de théorie de Galois tel [Gozard(2009)] fait l'affaire, [Perrin(1996)] est également bien pour la théorie de base ! Le [Carrega(1981)] pour ce qui concerne la constructibilité proprement faite. [Samuel(2003)] pour la théorie des nombres.

140. Le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Rapport du jury. ?

Φ L'omniprésence des polynômes comme objets algébriques de base, en théorie des corps comme en théorie des anneaux, en théorie des nombres et en géométrie algébrique, pousse à la considération des corps de fractions de ces polynômes : ce sont les corps de fractions rationnelles.

H

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

K est un corps commutatif.

1 Le corps $K(X)$

1.1 Construction

Δ Le corps des fractions rationnelles $K(X)$ est l'ensemble des quotients $\frac{P}{Q}$ avec $Q \neq 0$, muni des opérations...

Θ $K(X)$ est le corps des fractions de $K[X]$. Il est constitué des classes d'équivalences $\frac{P}{Q}$ de (P, Q) avec $Q \neq 0$.

Θ Pour tout $F \in K(X)$, on peut trouver $P \wedge Q = 1$ tel que $F = \frac{P}{Q}$, unité à des unités près.

Θ Tous les représentant de F s'obtiennent à partir du représentant irréductible par multiplication au numérateur et au dénominteur par un $R \in K[X] \backslash \{0\}$.

1.2 Degré

Δ Degré de F

Θ Propriétés du degré

A $K(X)$ n'est pas algébriquement clos.

1.3 Racines et pôles

Δ Racines et pôles, ordre

1.4 Dérivation

Δ Dérivation

Θ

2 Décomposition en éléments simples

2.1 Théorie

Θ (DES) Si $F =$ avec Q normalisé, si $Q = \prod_i Q^{\alpha_i}$ est la décomposition de Q en facteurs irréductibles, les Q_i étant deux à deux premiers entre eux, alors F s'écrit de manière unique sous la forme $F = E + \sum_i P_i$ où E est un pôlynome (c'est la partie entière de F) et $P_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{ij}}{Q_i^j}$, les P_{ij} et les Q_i étant des polynômes tels que $d(P_{ij}) \leqslant d(Q_i)$.

2.2 Pratique

3 L'extension $K(X) : K$

3.1 Le groupe de Galois

Θ L'extension $K(X) : K$ est galoisienne.

Θ Les automorphismes de l'algèbre de $K(X)$ sont les applications $G(X) \in K(X) \mapsto G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$ avec $a, b, c, d, \in A$ et $ad - bc \neq 0$. Ainsi, $Gal(K(X) : K) \cong PGL_2(K)$.

3.2 Le théorème de Lüroth

Θ (Lüroth) Si $K : M : K(X)$ avec $M \neq K$, alors $K(X) : M$ est algébrique et $M = K(B)$ pour un certain $B \in K(X)$, *i.e.* M est primitive.

A Toute courbe unicursale ($x = r(t), y = s(t), r, s \in K(X)$), admet une représentation propre.

Autres idées à explorer...

Déterminants (Cauchy), [Gourdon(2009)]
Recherche de projecteurs spectraux (DES) [Gourdon(2009)]
Artin-Cassels-Pfister

- **Développements.**

  ⋆ **Théorème de Lüroth, [S. Francinou(), ?]**

  ⋆ **Automorphismes de K(X), [S. Francinou(2007a)] ou [S. Francinou()]**

  ⋆

Références

[?] ou [Chenciner()], il y a de quoi prendre dans les exercices [S. Francinou(2007a)] et [S. Francinou()].

141. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Rapport du jury. Les applications ne concernent pas que les corps finis. Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que **C**. Un polynôme réductible n'admet pas forcément de racines. Il est instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$.

Φ Les polynômes interviennent naturellement lorsque l'on considère les extensions transcendantes les plus simples d'un anneau. L'omniprésence des polynômes comme objets algébriques de base, en théorie des corps comme en théorie des anneaux, en théorie des nombres et en géométrie algébrique, montre leur généralité et leur richesse algébrique.

H Premiers polynômes avec les écoles arabes enfantant l'algèbre, puis étude de résolution abstraite jusqu'à l'ordre deux algébriquement. Cardan et Tartaglia s'attaquent aux équations cubiques, puis Ferrari à la quartique. Le problème reste en suspens jusqu'à ce que Ruffini et Abel s'approchent de la solution de degré supérieur à 5, où les idées de Lagrange seront exploitées pleinement par Galois.

Avis. Cette leçon doit montrer – enfin – en quoi un polynôme diffère d'une fonction polynomiale, en quoi il est un objet infiniment plus riche car indépendant du corps sur lequel on le considère. Jongler en permanence entre le flou des corps de rupture que l'on choisit comme on veut, les réalisations particulières des corps de décomposition – par exemple pour la manipulation des corps finis –, et les propriétés que l'on déduit sur le polynôme en lui-même : séparabilité, etc.

⋆ ⋆ ⋆

A est un anneau commutatif unitaire factoriel, K est son corps de fractions, et $P = \sum_i a_i X^i$.

1 Polynômes irréductibles sur un anneau

1.1 Irréductibilité

Δ Un polynôme $\in K[X]$ est irréductible si $P \notin A^\star$ et dès que $P = QR$ pour $Q, R \in K[X]$, alors $d(P) = 0$ ou $d(R) = 0$, *i.e.* s'il n'a pas de diviseurs non triviaux.

E
- ⋆ Les polynômes de degré 1 sont irréductibles sur tout corps K
- ⋆ Les polynômes de degré 2 de discriminant <0 sont irréductibles sur **R**

Δ Le contenu de P est le PGCD de ses coefficients, il est noté $c(P)$. P est primitif si $c(P) = 1$, c'est en particulier vrai s'il est unitaire.

Θ (Lemme de Gauss) $\forall P, Q \in A[X] \backslash \{0\}, c(PQ) = c(P)c(Q) mod A^\star$.

Θ $P \in A[X]$ est irréductible si, et seulement si, $P \in A$ ou $d(P) \geqslant 1$ et P primitif et irréductible dans $K[X]$.

1.2 Théorèmes de transfert

Θ (Gauss) Si A est factoriel, alors $A[X]$ est factoriel.

Θ (Hilbert) Si A est noethérien, alors $A[X]$ est noetherien.

1.3 Critères d'irréductibilité

Θ (Racines fractionnaires) Si $\alpha = \frac{p}{q} \in Frac(A)$, avec p et q premiers entre eux, est racine d'un polynôme P alors $p | a_0$ et $d | a_n$. En particulier si P est unitaire, α est dans A et divise a_0.

Θ (Eisenstein) Si A est factoriel de corps de fractions K, si p est un premier de A tel que $p | a_i$ pour tout $i < n$, $p \not| a_n$ et $p^2 \not| a_0$, alors P est irréductible dans $K[X]$.

E
- ⋆ Si $a \neq \pm 1$ est quadratfrei, alors $X^n - a$ est irréductible sur **Q**
- ⋆ Si p est premier, alors $X^{p-1} + \cdots + X + 1$ est irréductible sur **Q**

Θ (Réduction) Si A et B sont intrèges de corps de fractions K et L, si $\phi : A \to B$ est un morphisme, et si $f \in A[X]$ est tel que $\phi(f) \neq 0$ et $d(f) = d(\phi(f))$, alors si $\phi(f)$ est irréductible dans $L[X]$, alors il en va de même dans $A[X]$.

E
- ⋆ Si p est premier, $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbf{Z}/p$ et donc sur **Q**.

Θ Les polynômes irréductibles de $K[X]$ sont les polynômes primitifs irréductibles de $A[X]$ (?)

1.4 Algorithmes de décision

Berlekampp
SFC

2 Corps de rupture et de décomposition

Δ Un corps de rupture de $P \in k[X]$ est une extension K de k telle que P ait une racine α dans K et $K = k(\alpha)$.

Θ Tout polynôme non constant admet un corps de rupture., et il est unique à isomoprhisme près.

E ⋆ X^2-2 a pour corps de rupture $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
⋆ X^3-2 a pour corps de rupture $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ mais aussi $\mathbf{Q}(j\sqrt[3]{2})$.

Θ Si P est irréductible sur K et $P(\alpha)=0$ avec $\alpha\in L:K$, alors P est le polynôme minimal de α sur K et $K(\alpha)\cong\frac{K[X]}{(P)}$ et $[K(\alpha):K]=d$.

E P n'est pas toujours scindé sur un corps de rupture, ainsi X^3-2 n'est pas scindé sur $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Δ Un corps de décomposition de $P\in k[X]$ est une extension K telle que P soit scindé sur K et que K soit engendré sur k par les racines de P, *i.e.* que K soit minimal pour cette propriété.

Θ Tout polynôme non constant admet un corps de décomposition, unique à isomorphisme près, noté $D_k(P)$.

E ⋆ X^3-2 a pour corps de décomposition $\mathbf{Q}(j,\sqrt[3]{2})$.
⋆

2.1 Polynômes irréductibles sur les corps finis

p est un nombre premier et $q=p^n$.

Θ Il existe un unique corps à q élément à isomorphisme près, c'est $\mathbf{F}_q=D_{\mathbf{F}_p}(X^q-X)$.

Δ On note $I(m,q)$ l'ensemble des polynômes irréductibles sur $\mathbf{F}_q[X]$ de degré n.

Δ La fonction de Möbius $\mu:\mathbf{N}^\star\to\{-1,0,1\}$ est définie par $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$ si n admet un facteur carré, $\mu(n)=(-1)^k$ si $n=p_1\cdots p_k$.

Θ (Formule d'inversion de Möbius) Si $(G,+)$ est un groupe abélien, $f:\mathbf{N}\to G$ et $g(k)=\sum_{r|k}f(r)$, alors $f(k)=\sum_{r|k}\mu(\frac{k}{r}g(r)$.

Θ $\forall k>0, X^{q^k}-X=\pi_{Q\in I(k,q)}Q$.

Θ (Gauss) $|I(k,q)|=\frac{1}{k}\sum_{r|k}\mu(\frac{n}{r})q^r$.

2.2 Polynômes cyclotomiques

Soit k un corps, $n\in\mathbf{N}^\star$, $P_n(X)=X^n-1$, $K_n=D_k(P_n)$ et $car(k)\not| n$.

Δ On note $\mu_n(k)$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans k, *i.e.* $\{\zeta\in k\mid\zeta^n=1\}$, et $\mu_n^\star$ l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité, *i.e.* $\{\zeta\in\mu_n(k)\mid\forall d<n,\zeta^d\neq1\}$.

Θ On a les propriétés suivantes :
⋆ $\mu_n(k)$ est cyclique
⋆ $\mu_n(K_n)\cong\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
⋆ $|\mu_n^\star(K_n)|=\phi(n)$

Δ Le n-ième polynôme cyclotomique est $\Phi_{n,k}=\prod_{\zeta\in\mu_n^\star(K)}(X-\zeta)\in K_n[X]$.

Θ $\Phi_{n,k}$ est unitaire de degré $\phi(n)$.

Θ Si k_0 est le corps premier de K et $K_0=D_{k_0}(X^n-1)$, alors $\Phi_{n,k}\in K_0[X]$, on peut donc supposer $k=k_0$.

Θ $X^n-1=\prod_{d|n}\Phi_{d,k}(X)$.

E $\Phi_{4,k}=X^2+1$.

Θ $\Phi_{n,\mathbf{Q}}\in\mathbf{Z}[X]$.

Θ Si $\sigma:\mathbf{Z}\to k$ est le morphisme canonique, $\Phi_{n,k}=\sigma(\Phi_{n,\mathbf{Z}})$. En particulier, $\Phi_{n,\mathbf{F}_p}$ s'obtient par réduction modulo p de $\Phi_{n,\mathbf{Z}}$.

Θ $\Phi_{n,k}\in\mathbf{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et sur $\mathbf{Z}$.

Θ Si $car(k)=0$ et $\zeta\in\mu_n^\star(k)$, son polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ est Φ_n dont $[\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q}]=\phi(n)$.

Θ Les conditions suivantes sont équivalentes :
⋆ Il existe p premier et premier avec n, tel que $\Phi_{n,\mathbf{F}_p}$ irréductible sur $\mathbf{F}_p$
⋆ $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\star$ est cyclique
⋆ $n\in\{1,2,4,q^\alpha,2q^\alpha\mid q$ premier impair, $\alpha\in\mathbf{N}^\star\}$

3 Théorie de Galois

Autres idées à explorer...

Parler de morphismes, de groupe de Galois...
Coeff-racines ? Résultant ?
Codes correcteurs

- **Développements.**

⋆ **Dénombrement des polynômes irréductibles sur un corps fini, [Mignotte()]**

⋆ **Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, [Perrin(1996)]**

⋆ **Automorphismes de K(X), [S. Francinou()]**

Références

[Lang(), ch. 4] et [Perrin(1996), ch. 2 et 3] pour la théorie générale. [Demazure(2008)] pour les nombreuses interventions en codes correcteurs. [?, ch. 2] pour la théorie de Galois, complété par les usuels [?], etc.

142. Algèbre des polynômes à n indéterminées. Polynômes symétriques. Applications.

Rapport du jury. La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ni sur les les polynômes symétriques. Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur Z. L'algorithme peut être présenté sur un exemple. Les applications aux quadriques, aux relations racines coefficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe GL(n,R) sur les polynômes de degré inférieur à 2.

Φ L'idée fondamentale de l'algèbre est d'abstraire les données en des variables formelles, et un polynôme peut par exemple être considéré comme polynôme à coefficients ou à racines qui sont également des indéterminées polynomiales : cela mène à l'intérêt pour les polynômes en plusieurs indéterminées.

H Lagrange puis Galois

Avis. Exploiter la liberté que l'on a avec les variables, en en fixant certaines pour après revenir à des propriétés générales. Les développements sur les résolutions d'équations polynomiales et la théorie de Galois méritent d'être évoqués. cf. RMS

⋆ ⋆ ⋆

A est un anneau commutatif unitaire.

1 Polynômes à plusieurs indéterminées

1.1 Polynômes à n indéterminées

- **Δ** L'ensemble des polynômes à n indéterminées est $A[X_1,\dots,X_n] = A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$.
- **Δ** Un polynôme est homogène de degré d s'il est somme de monomes de degrés totaux égaux à d. On note $A[X_1,\dots,X_n]_d$ leur ensemble.
- **Θ** On a la décomposition en algèbre graduée $A[X_1,\dots,X_n] = \bigoplus_d A[X_1,\dots,X_n]_d$.
- **Θ** (propriété universelle) Pour tout morphisme d'algèbres $\phi : A \to B$, il existe un unique morphisme d'algèbres $A[X_1,\dots,X_n] \to B$ qui prolonge A et qui envoie X_i sur $b_i \in B$.

1.2 Degrés

- **Δ** Le degré partiel en X_k de $P \in A[X_1,\dots,X_n]$ est le degré de P comme polynôme à une indéterminée en X_k.

Des propriétés

- **Θ** La dimension de $A[X_1,\dots,X_n]_d$ est $\binom{m+p-1}{m}$.

1.3 Propriétés de transfert

- **Θ** $A[X_1,\dots,X_n]$ est principal si, et seulement si, A est un corps et $n=1$.
- **Θ** (Gauss) Si A est factoriel, alors il en va de même de $A[X_1,\dots,X_n]$.
- **Θ** (Hilbert) Si A est noetherien, alors il en va de même de $A[X_1,\dots,X_n]$.

1.4 Zéros de polynômes à plusieurs indéterminées

- **A** (Chevalley-Warning) Si k est un corps fini de cardinal $q=p^n$, si on a une famille $(P_i)_i \in K[X_1,\dots,X_n]^I$ telle que $\sum_I d(P_i) < n$, alors le nombre de racines communes aux P_i est nul modulo p.
- **A** Une quadrique admet toujours des points rationnels non triviaux sur un corps fini.

2 Polynômes symétriques

2.1 Polynômes symétriques

- **Δ** Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $A[X_1,\dots,X_n]$ via $\sigma\cdot(\sum a_I X^I) = \sum a_I X^{\sigma(I)}$. Un polynôme est symétrique s'il est fixe par cette action, *i.e.* si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma\cdot P = P$, soit encore $P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(p)}) = P(X_1,\dots,X_n)$. On note S_n l'ensemble des polynômes symétriques.
- **Θ** S_n est une sous-algèbre de $A[X_1,\dots,X_n]$.
- **Θ** Si $P=\sum_d P_d$ avec $P_d \in A[X_1,\dots,X_n]_d$, alors $P \in S_n \iff \forall d, P_d \in S_n$.

2.2 Fonctions symétriques élémentaires

- **Θ** Dans $A[X_1,\dots,X_n][X]$, $\prod_{i=1}^n (X-X_i) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \Sigma_i^n X^{n-i}$ où $\Sigma_i^n = \sum_{|I|=k} X_{i_1}\cdots X_{i_k} = \sum_{i_1<\dots<i_k} X_{i_1}\cdots X_{i_k}$.
- **Δ** Les Σ_i^n sont les fonctions symétriques élémentaires, elles sont dans S_n.

Θ Les sommes de Newton $N_k^n = \sum_{i=1}^n X_i^k \in A[X_1, \dots, X_n]_k$ sont dans S_n.

Θ Si $S \in S_n$ est tel que $S(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = 0$, alors il existe $T \in S_n$ tel que $S = T\sigma_n^n$.

Θ L'application $\phi : P(X_1, \dots, X_n) \in A[X_1, \dots, X_n] \mapsto P(\Sigma_1^n, \dots, \Sigma_n^n) \in S_n$ est un isomorphisme d'algèbres.

2.3 Formules de Newton

Θ $N_n^N - \Sigma_1^k N_{n-1}^N + \Sigma_2^N N_{n-2}^N - \dots + (-1)^n n \Sigma_n^N = 0$.

Θ (D'alembert-Gauss)

Θ (Kronecker)

3 Résolution d'équations générales

3.1 Systèmes polynomiaux et élimination

3.2 Résultant

Δ Étant donnés deux polynômes $A = \sum_1^n a_i X^i$ et $B = \sum_1^m b_i X^i$ de $k[X]$, on définit l'application linéaire $\phi_{A,B} : (U, V) \in k_{m-1}[X] \times k_{n-1}[X] \mapsto UA + VB \in k_{n+m-1}[X]$.

Δ La matrice de Sylvester associée à A et B est la matrice de $\phi_{A,B}$ dans les bases $((1,0), \dots, (X^{m-1}, 0), (0,1), \dots, (0, X^{n-1})$ et $(1, X, \dots, X^{n+m-1})$. Plus précisément :

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & \vdots & \ddots & a_0 & b_m & \vdots & & b_0 \\ & a_n & & a_1 & & b_m & & b_1 \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n & & & & b_m \end{pmatrix}$$

Δ Le résultant de A et B est $Res(A, B) = \det \phi_{A,B}$.

3.3 Propriétés algébriques

Θ
- ⋆ $Res(B, A) = (-1)^{nm} Res(A, B)$
- ⋆ $Res(aA, bB) = a^m b^n Res(A, B)$

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ⋆ $\phi_{A,B}$ n'est pas injective
- ⋆ $Res(A, B) = 0$
- ⋆ $A \wedge B \neq 1$ ou $a_n = b_m = 0$
- ⋆ A et B ont une racine commune ou $a_n = b_m = 0$

Θ Il existe $U \in k_{m-1}[X]$ et $V \in k_{n-1}[X]$ tels que $AU + BV = Res(A, B)$.

3.4 Résultant et factorisation

Θ Si $K = k[X]/(A)$ et si $\mu_B = P\overline{B}$, alors $\det \mu_B = Res(A, B)$.

Θ (Loi de réciprocité quadratique) Si p et q sont premiers distincts et distincts de 2, alors $(\frac{q}{p})(\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Θ
- ⋆ $Res(A, B_1 B_2) = Res(A, B_1) Res(A, B_2)$
- ⋆ $Res(A, AQ + R) = Res(A, R)$
- ⋆ Si $A = \prod_i (X - \alpha_i)$, alors $Res(A, B) = \prod_i B(\alpha_i)$
- ⋆ $Res(A, B) = \prod \alpha_i - \beta_j)^2$

3.5 Discriminant

Δ On définit $disc(A) = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2)} Res(A, A')$.

Θ A n'admet que des racines simples si, et seulement si, $disc(A) \neq 0$. Cela revient à dire que A est quadratfrei dans un corps de décomposition.

3.6 Séparation de racines

Minoration des écarts, cf. Koseleff

Θ $\mu(x) = Res_Y(A(x - Y), B(Y)) \in k[x]$.

Θ L'ensemble des nombres de K algébriques sur k forment un corps. Plus précisément, si α et β sont deux algébriques annulés par A et B dans $k[X]$:

- ⋆ $\alpha \pm \beta$ est annulé par $Res_Y(A(x \mp y), B(y))$
- ⋆ $\alpha\beta$ est annulé par $Res_y(A(\frac{x}{y})y^n, B(y))$
- ⋆ $\frac{\alpha}{\beta}$ est annulé par $Res_y(A(xy), B(y))$

Autres idées à explorer...

Les réoslutions par radicaux, cf. RMS sur Galois
Bases de Grobner ?
Résultant
Corbes algébriques ?
Théorème des zéros de Hilbert

Chevalley-Warning
Nullstelensatz

- **Développements.**
  - ⋆ **Nullstellensatz, []**
  - ⋆ **Bézout**
  - ⋆ **Automorphismes de K(X)**
  - ⋆ **Chevalley-Warning et EGZ**
  - ⋆ **Kronecker**

Références

[?, ch. 3] pour les polynômes symétriques. Regarder Arnaudiès-Fraysse et RDO. Peut-être rechercher des résultats de géométrie algébrique.

Rapport du jury. Il faut soigner la présentation et ne pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente (U,V) → AU + BV qui lie le résultant et le PGCD de A et B.

Φ L'existence ou non de racines communes à deux polynômes est un problème important, tant il intervient dans des contextes variés. Le résultant est un outil permettant de caractériser une telle situation, qui plus est un outil qui a de bonnes propriétés algébriques, et qui est effectif.

H

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

A est un anneau, k un corps.

1 Théorie de l'élimination et résultant

1.1 Systèmes polynomiaux et élimination

Δ Un zéro d'un système polynomial $(f_1, \dots, f_s)$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_n]$, est un élément annulant tous les f_i dans un surcorps de k^n. Une fois une clature algébrique de k fixé, il ne dépend que des f_i, et est appelé zéro de l'idéal $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_s)$.

Δ L'idéal d'élimination des variables $X_{r+1}, \dots, X_n$ est $\mathfrak{a} \cap k[X_1, \dots, X_r]$, il ne dépend que de $\mathfrak{a}$.

1.2 Résultant

Δ Étant donnés deux polynômes $A = \sum_1^n a_i X^i$ et $B = \sum_1^m b_i X^i$ de $k[X]$, on définit l'application linéaire $\phi_{A,B} : (U, V) \in k_{m-1}[X] \times k_{n-1}[X] \mapsto UA + VB \in k_{n+m-1}[X]$.

Δ La matrice de Sylvester associée à A et B est la matrice de $\phi_{A,B}$ dans les bases $((1, 0), \dots, (X^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{n-1})$ et $(1, X, \dots, X^{n+m-1})$. Plus précisément :

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & \vdots & \ddots & a_0 & b_m & \vdots & & b_0 \\ & a_n & & a_1 & & b_m & & b_1 \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n & & & & b_m \end{pmatrix}$$

Δ Le résultant de A et B est $Res(A, B) = \det \phi_{A,B}$.

1.3 Propriétés algébriques

Θ
- ⋆ $Res(B, A) = (-1)^{nm} Res(A, B)$
- ⋆ $Res(aA, bB) = a^m b^n Res(A, B)$

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- ⋆ $\phi_{A,B}$ n'est pas injective
- ⋆ $Res(A, B) = 0$
- ⋆ $A \wedge B \neq 1$ ou $a_n = b_m = 0$
- ⋆ A et B ont une racine commune ou $a_n = b_m = 0$

Θ Il existe $U \in k_{m-1}[X]$ et $V \in k_{n-1}[X]$ tels que $AU + BV = Res(A, B)$.

1.4 Résultant et factorisation

Θ Si $K = k[X]/(A)$ et si $\mu_B = P\overline{B}$, alors $\det \mu_B = Res(A, B)$.

Θ (Loi de réciprocité quadratique) Si p et q sont premiers distincts et distincts de 2, alors $(\frac{q}{p})(\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Θ
- ⋆ $Res(A, B_1 B_2) = Res(A, B_1) Res(A, B_2)$
- ⋆ $Res(A, AQ + R) = Res(A, R)$
- ⋆ Si $A = \prod_i (X - \alpha_i)$, alors $Res(A, B) = \prod_i B(\alpha_i)$
- ⋆ $Res(A, B) = \prod \alpha_i - \beta_j)^2$

1.5 Discriminant

Δ On définit $disc(A) = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} Res(A, A')$

.

Θ A n'admet que des racines simples si, et seulement si, $disc(A) \neq 0$. Cela revient à dire que A est quadratfrei dans un corps de décomposition.

1.6 Séparation de racines

Minoration des écarts, cf. Koseleff

Θ $\mu(x) = Res_Y(A(x-Y), B(Y)) \in k[x]$.

Θ L'ensemble des nombres de K algébriques sur k forment un corps. Plus précisément, si α et β sont deux algébriques annulés par A et B dans $k[X]$:

- ⋆ $\alpha \pm \beta$ est annulé par $Res_Y(A(x \mp y), B(y))$
- ⋆ $\alpha\beta$ est annulé par $Res_y(A(\frac{x}{y})y^n, B(y))$
- ⋆ $\frac{\alpha}{\beta}$ est annulé par $Res_y(A(xy), B(y))$

1.7 Courbes algébriques

Θ (Bezout) Si A et B sont premiers entre eux de degrés respectifs n et m, alors $card(V(A) \cap V(B)) \leqslant mn$.

Autres idées à explorer...

- **Développements.**

  ⋆ **Nullstelensatz de Hilbert, []**

  ⋆ **Loi de réciprocité quadratique avec le résultant, [Hindry(2008), p. 70]**

  ⋆ **Théorème de Bézout pour les courbes algébriques, [?]**

Références

[?] pour une bonne introduction. [?] est une bonne référence complète, c'est aussi excellemment fait dans Bourbaki, Algèbre IV, à la fin. Regarder en détails le document de Michel Coste pour la prépa agreg de Rennes. Aller un peu plus loin avec de la géométrie algébrique.

150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Rapport du jury. Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle demande un certain recul.

Φ L'espace est la condition et le fondement de toute connaissance (Kant, 1781), il importe donc de l'étudier. Cette étude ne doit pas être axiomatique mais interne, seul le mouvement permet de comprendre l'espace (Poincaré 1902, Piaget 1937). C'est le fondement du programme d'Erlangen (Klein, 1872), esprit dans lequel se place cette présentation. Pour saisir la portée de ce principe, il est naturel de s'attacher à l'étude des espaces les mieux maîtrisés, à savoir les espaces de matrices.

H

Avis. C'est une leçon d'illustrations de problèmes d'actions de groupes et de classifications, il faut donc varier les exemples et dans l'idéal faire apparaître l'utilisation des propriétés générales des actions de groupes (ainsi les formules des classes ou de Burnside pour des matrices sur les corps finis ?)

⋆ ⋆ ⋆

K est un corps et n un entier.

1 Réduction des systèmes linéaires [Caldero-Germoni(2013)]

1.1 Action par translations

R Puisque $AX = Y$ équivaut à $(PA)X = PY$ pour une matrice inversible P, on peut se ramener à trouver un représentant simple de A pour l'action par translation à gauche.

Θ Deux matrices sont dans la même orbite si, et seulement si, elles ont même rang et même image.

Δ Matrices échelonnées sur les lignes

Θ Deux matrices sont dans la même orbite à gauche (resp. à droit) si, et seulement si, elles ont même noyau (resp. même image). Dans toute orbite il existe une unique matrice échelonnée sur les lignes (resp. sur les colonnes) et réduite.

1.2 Algorithme du pivot de Gauss

Θ Réduction de Gauss, exemple

A Déterminant, inversion

A LU, exemple

A Systèmes linéaires, exemple

1.3 Génération de GL_n

Δ Translations

Δ Transvections, dilatations

Θ Engendrent GL (check ordre)

Θ donc on peut limiter l'étude de l'action par translation aux opérations sur les lignes, déail des opérations

2 Action de Steiniz [Caldero-Germoni(2013)]

2.1 Action et théorème du rang

Δ L'action de Steiniz correspond à l'expression d'un endomorphismes sous forme matricielle dans des bases arbitraires.

Θ (rang) Deux matrices sont équivalentes, *i.e.* appartiennent à la même orbite de Steiniz, si, et seulement si, elles ont même rang.

Θ On a la taille des orbites $|G \cdot I_{m,n,r}| = q^{a_{m,n,r}} \prod_{i=1}^{m-r}(q^{r+i} - 1) \prod_{i=1}^{n-r}(q^{r+i} - 1)$ où $a_{m,n,r} = \frac{1}{2}((m-r)(m-r-1) + (n-r)(n-r-1))$.

2.2 Topologie des orbites

Θ On a $\overline{O_r} = \bigcup_{k \leqslant r} O_k$.

3 Réduction des endomorphismes [Caldero-Germoni(2013)]

R Tout le problème de la réduction consiste en trouver une base dans laquelle un endomorphisme admet une forme simple. Le changement de base est plus contraignant que l'action de Steiniz, mais les propriétés opératoires sont meilleures et les orbites plus représentatives de l'endomorphismes : l'action est un morphisme de groupes.

3.1 L'action par conjugaison sur $D_n(\mathbf{C})$

3.2 L'action sur $N_n(\mathbf{C})$

Δ Le bloc de Jordan de taille m associé à *lambda* est la matrice $J_m(\lambda) = ...$

Θ (Jordan) Le polynôme caractéristique de u est scindé si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est une diagonale de blocs de Jordan. Les valeurs propres de u sont les paramètres des blocs de Jordan, et cette décomposition est unique à l'ordre près des blocs.

3.3 L'action sur $M_n(\mathbf{C})$

Θ (Dunford) Si π_u est scindé, alors il existe un unique couple (d, n) avec d diagonalisable, n nilpotent, $dn = nd$ tel que $u = d + n$. De plus, u et n sont des polynômes en u.

3.4 L'action sur $M_n(k)$

Θ (Frobenius) Il existe $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que :

- ★ $E = \bigoplus_{i=1}^{n} K[u](x_i)$
- ★ Si $P_i = \pi_{x_i} = \pi_{u,x_i}$, alors $P_i \mid P_{i+1}$ pour tout i

De plus, la suite $(P_i)_i$ est unique, ce sont les invariants de similitude de u.

Θ $\mu = P_n$ et $\chi_u = P_1 \cdots P_n$.

Θ Une transversable pour la relation de conjugaison est l'ensemble des matrices $diag(A_1, \ldots, A_s)$ de taille n où les A_i sont des matrices compagnons et où $\pi_{A_1} \mid \cdots \mid \pi_{A_s}$.

A SI $L : K$ est une extension de corps, et si $A, B \in M_n(K)$ sont semblables dans L, alors elles le sont dans K.

4 Réduction des formes quadratiques [Caldero-Germoni(2013)], [Perrin(1996)]

4.1 Action par congruences

Δ L'action par congruence est celle du changement de coordonnées dans une forme quadratique ou bilinéaire, $P \cdot M =^t PMP$.

Θ On a les caractérisations des orbites pour l'action par congruence :

- ★ si $K = \mathbf{C}$, deux matrices sont congruences si, et seulement si, elles ont même rang
- ★ si $K = \mathbf{R}$, deux matrices sont congruentes si, et seulement si, elles ont même signature
- ★ si $K = \mathbf{F}_q$, deux matrices inversibles sont congruentes si, et seulement si, elles ont même discriminant

A (Loi de réciprocité quadratique) Si p et q sont premiers distincts et distincts de 2, alors $(\frac{q}{p})(\frac{p}{q}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

4.2 Groupes orthogonaux

Théorème de Witt, etc.

4.3 Classification des coniques

5 Diviser pour régner : décompositions matricielles

Polaire, Iwasawa, etc.

6 Représentations linéaires [Serre(1998)]

Autres idées à explorer...

De la géométrie, par exemple projective, PSL(2), etc.
Quaternions : cg, Audin, peut etre perrin, mneimne
Plus de corps finis
Centralisateurs, normalisateurs, etc.

- **Développements.**

Essayer d'illustrer des théorèmes fondamentaux ou des applications se servant de la connaissance des orbites dans les cas des différentes actions présentées !

⋆ **Réduction de Frobenius, [Fresnel(2011)]**

⋆ **Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques, [Caldero-Germoni(2013)]**

⋆ **Ellipsoïde de John-Loewner, [Alessandri(1999)]**

Références

Le [Caldero-Germoni(2013)] a un point de vue et un découpage idéaux pour la leçon, qui peut être complété par [Alessandri(1999)] pour quelques points de détails. De nombreux matériaux sont à prendre dans [Mneimné()] et [Serre(b)].
[R. Mneimné(2009)] pour les aspects topologiques, [W. Fulton(2004)] pour les représentations.

Rapport du jury. C'est une leçon qui contrairement aux apparences est devenue difficile pour les candidats. Il faut absolument la préparer avec méthode. Nombre d'entre eux n'ont pas été capable de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ? Contrairement aux apparences, cette leçon classique présente des difficultés sur la logique de présentation, la cohérence du plan et le traitement intégral du sujet ! Il faut présenter une définition cohérente et pratique de la dimension finie. Les exemples doivent mettre en évidence la notion de rang ou dimension, par exemple en dualité, dans les formes quadratiques et bien-sûr sur les matrices. Le jury accepte que soit proposé en développement le traitement précis de points du cours, par exemple on peut proposer "Théorème de la dimension + base incomplète + dimension d'un sous-espace". Ne proposer que le théorème de la base incomplète, ou le théorème du rang, n'est pas suffisant au niveau de l'Agrégation.

Φ Un espace vectoriel de type fini, contrairement à des modules généraux, admet une base, et c'est grâce à une telle base que l'on peut espérer la possibilité de manier et de raisonner simplement sur les applications et propriétés linéaires. L'information codant une application linéaire est alors entièrement codée par l'image d'une base, et les problèmes d'algèbre linéaires se ramènent donc au traitement d'une quantité finie d'information.

H Bolzano (1804) est le premier à considérer des objets géométriques abstraits sans définition précise, Möbius (1827) travaille au prolongement de ces travaux, mais l'essentiel de l'algèbre linéaire naissante sous-tend l'étude des systèmes linéaires avec Cayley. Laguerre et Hermite (1867) développent la théorie générale et unifient les systèmes linéaires, mais c'est Grassmann (1862) qui le premier conçoit la formalisation des notions abstraites des espaces vectoriels, qui sont axiomatisées par Peano peu après (1888).

Avis. La dimension finie permet d'obtenir des propriétés qui vont bien au-delà de la manipulation de bases et l'utilisation de matrices. Les extensions de corps et les degrés associés donnent beaucoup d'informations sur les treillis d'extensions intermédiaires par exemple, et permettent de faire un peu de combinatoire sur les corps finis. Les nombres algébriques et l'algèbre linéaire exploitée en théorie des nombres est un belle application. Les modules libres ne sont pas des espaces vectoriels, mais en son un prolongement naturel qui peut bien mériter un détour, ne serait-ce que pour en souligner les différences. Le rang est plus technique, il faut l'exploiter sur les matrices, les systèmes linéaires, etc.

⋆ ⋆ ⋆

E désigne un k-espace vectoriel avec k commutatif.

1 Bases et dimension [Fresnel(2011)]

1.1 Bases et espaces vectoriels

Δ À une famille $(x_i)_i$ de E on associe l'application $\phi : (\lambda_i)_i \in K^{(I)} \mapsto \sum_i \lambda_i x_i$. On dit que $(x_i)_i$ est
- ⋆ libre si ϕ est injective
- ⋆ génératrice si ϕ est surjective
- ⋆ une base si ϕ est bijective

R Une famille libre ne contient ni 0 ni deux vecteurs colinéaires.

Θ Pour tout famille B de E, il y a équivalence entre
- ⋆ B est une base de E
- ⋆ B est une famille génératrice minimale de E
- ⋆ B est une famille libre maximale de E

Θ (base incomplète) Si L est une famille libre de E et G une famille génératrice contenant L, alors il existe une base B telle que $L \subseteq B \subseteq G$.

Θ (échange) Si $(y_j)_j$ est une famille génératrice finie et $(x_i)_i$ est une famille libre, alors I est fini de cardinal inférieur à J et on peut remplacer $|I|$ vecteurs de $(y_j)_j$ par les x_i de sorte à obtenir une famille génératrice.

Δ Un espace est dit finiment engendré s'il admet une famille génératrice finie.

Θ Tout espace vectoriel finiment engendré admet une base.

Θ Si un espace E est finiment engendré, alors toutes les bases ont même cardinal. La dimension de E est le cardinal de toute base.

E
- ⋆ $\mathbf{R}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, de base $(X^n)_n$
- ⋆ Les solutions de $y'' = y$ est un espace vectoriel de dimension 2, de base $(\cos, \sin)$
- ⋆ $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie, la famille $(\ln p)_{p \in ¶}$ étant libre

A (Carathéodory) En dimension n, l'enveloppe convexe est également l'ensemble des coefficients de $n+1$ points de X à coefficients positifs normalisés.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Θ Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors f est de dimension finie et $dim(F) \leqslant dim(E)$.

Θ Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors il existe un supplémentaire de F dans E.

A Deux sous-espaces de E de même dimension ont un supplémentaire commun.

A Les endomorphismes d'un espace vectoriel sur un corps algébriquement clos sont trigonalisables.

R Ces résultats sont valables en dimension infinie, moyennant le lemme de Zorn.

Θ $dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$ et $dim(E/F) = dim(E) - dim(F)$.

Θ (Grassmann) $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$.

1.3 Réduction

R Les résultats précédents permettent de prouver de nombreux résultats par récurrence sur la dimension, dès que l'on sait se ramener à la même propriété en dimension inférieure.

Θ Tout endomorphisme est trigonalisable dans un corps algébriquement clos.

Θ Tout endomorphisme symétrique réel, ou normal complexe, est diagonalisable en base orthonormale.

Θ Si L est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ avec V de dimension finie non nulle, et si tous les éléments de L sont nilpotents, alors il existe un vecteur propre commun.

Θ (Engel) Une algèbre de Lie est nilpotente si, et seulement si, tout élément est ad-nilpotent.

1.4 Les fruits de la dimension finie

Θ Un espace E est de dimension finie si, et seulement si, il est normé et toutes ses normes sont équivalentes.

A Tous les espaces de dimension finie sont complets.

Θ (Riesz) Un espace E est de dimension finie si, et seulement si, il est normé et ses compacts sont ses fermés bornés.

A l'espace $H(\Omega)$ n'est pas normable.

Θ (John-Loewner) Si K est un compact convexe d'intérieur non vide, alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

2 Applications linéaires et rang [Fresnel(2011)]

2.1 Rang d'une famille de vecteurs

Δ Le rang d'une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est la dimension de $Vect(x_1, \ldots, x_p)$.

Θ Une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de E de dimension n est libre si, et seulement si, son rang est p ; elle est génératrice si, et seulement si, son rang est n.

Θ Une famille de vecteurs est libre si, et seulement si, son déterminant est non nul.

A L'ensemble des points en position générale dans $\mathbf{R}^n$ sont denses dans l'ensemble des familles de $\mathbf{R}^n$.

Θ Le rang d'une famille de vecteurs est la taille maximale d'un mineur non nul.

A Le rang est une fonction semi-continue inférieurement, en particulier on a $\overline{O_r} = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant r} O_k$.

2.2 Applications linéaires

Θ Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Autrement dit, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, l'application $f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est un isomorphisme de $L(E)$ sur E^n.

A $dim(L(E)) = n^2$.

Δ Le rang d'un endomorphisme est $rg(f) = dim(Im(F))$.

Θ (du rang) $dim(Ker(f)) + rg(f) = dim(E)$.

A (borne de Singleton) Si C est un code linéaire non nul de paramètres (n, k, d), alors $n \geqslant d + k - 1$.

Inégalités louches sur le rang

Θ Tous les espaces de dimension n sont isomorphes à $\mathbf{R}^n$, et en particulier isomorphes entre eux. Les classes d'isomorphismes d'espaces vectoriels sont donc classifiés par $\mathbf{N}$.

Θ En dimension n, une famille libre à n éléments est une base, ainsi qu'une famille génératrice à n éléments.

Θ Si $f : E \to E$ est linéaire de dimension finie, alors il y a équivalente entre :
- ⋆ f injective
- ⋆ f surjective
- ⋆ f bijective

A Toute algèbre de dimension finie est un corps.

A Suites récurrentes linéaires

A Interpolation de Lagrange

2.3 Matrices et rang

Δ Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire associée, dans toute base.

Θ Le rang d'une matrice est la taille maximale d'un mineur non nul.

Δ Deux matrices sont équivalentes si elles se déduisent l'une de l'autre par $M = PNQ$.

Θ Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang. Autrement dit, les orbites pour l'action de Steiniz sont paramétrées par le rang.

Θ (réduction de Gauss) pour calculer le rang...

Θ Le rang est égal à la taille maximale d'un mineur non nul.

A Le rang est indépendant du corps de base.

Θ (Rouché-Fontené)

2.4 Dualité et orthogonalité

Δ Le dual de E est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, noté $E^\star$.

Θ Si $(e_i)_i$ est une base de E, alors il existe une unique famille $(e_i^\star)_i$ de $E^\star$ telle que $e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}$. C'est une base de $E^\star$, appelée base duale de e. En particulier $dim(E) = dim(E^\star)$.

Θ L'espace E et son bidual sont isomorphes par $x \mapsto (\phi \mapsto \phi(x))$.

Θ Si $(e_i)_i$ est une base de $E^\star$, alors il existe une unique famille $(e_i)_i$ de E telle que $e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}$. C'est une base de E, appelée base antéduale de $e^\star$.

Δ On définit l'orhtogonalité dans la dualité par $x \perp \phi$ si $\phi(x) = 0$. L'orthogonal d'une partie est $A^\perp = \{\phi \in E^\star \mid \forall a \in A, \phi(a) = 0\}$.

Θ Si E est de dimension finie et F un sous-espace de E, alors $dim(F^\perp) = dim(E) - dim(F)$.

3 Extensions de corps [Perrin(1996), Gozard(2009)]

3.1 Extensions et degrés

Δ S'il existe un morphisme de corps de K dans L, *i.e.* une injection, on dit que L est une extension de K et que K est un sous-corps de L. On note $L : K$.

E $\mathbf{C} : \mathbf{R}$, $\mathbf{R}(T) : \mathbf{R}$

Θ Si K est un sous-corps de L, alors L est un K-espace vectoriel. Sa dimension est notée $[L : K]$, c'est le degré de l'extension. Si le degré est fini et les corps sont finis, on a en particulier $|L| = |K|^{[L:K]}$.

E
- ⋆ $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}) : \mathbf{Q}] = 2$
- ⋆ $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) : \mathbf{Q}] = 4$

Θ (base télescopique) Si on a une tour de corps $M : L : K$, si $(e_i)_i$ est une K-base de L et $(f_j)_j$ est une L-base de M, alors $(e_i f_j)_{ij}$ est une K-base de M. En particulier $[M : K] = [M : L][L : K]$.

Θ (Wedderburn) Tout corps fini est commutatif.

A (Lüroth) Si $K : k$ est une extension transcendante pure vérifiant $deg(tr_k K)) = 1$ et L un sous-corps de K contenant strictement k, alors L est une extension transcendante pure de k telle que $deg(tr_k L)) = 1$.

Θ (Frobenius) Un corps qui est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et qui contient $\mathbf{R}$ dans son centre est isomorphe à $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$.

3.2 Extension monogène et algébricité

Δ Si on note $\phi : P \in K[T] \mapsto P(a)$, onn dit que a est transcendant sur K si ϕ est injectif ; sinon on dit qu'il est algébrique.

Θ Les propositions suivantes sont équivalentes pour $a \in L : K$:
- ⋆ a algébrique sur K
- ⋆ $K[a] = K(a)$
- ⋆ $[K[a] : K] < \infty$

Θ L'ensemble des éléments algébriques de L sur K est un sous-corps de L.

Θ (élément primitif) Si L est une extension de degré fini et séparable sur K, alors L est monogène sur K, *i.e.* il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.

3.3 Constrcutibilité [Carrega(1981)]

Δ Un nombre est constructible en une étape par X à partir de nombres x_i s'il est intersection de deux éléments de X construits sur les x_i. Un élément est constructible par X s'il est constructible en un nombre fini d'étapes à partir de $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

Θ (Gauss-Wantzel) Un nombre est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, il est au sommet d'une tour quadratique au-dessus de $\mathbf{Q}$.

A La trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle sont des problèmes impossibles.

Θ (Videla) Un nombre est constructible par droites, cercles et coniques si, et seulement si, il est au sommet d'une tour de corps sur $\mathbf{Q}$ dont les extensions intermédiaires sont de degré 2, 3 ou 4.

A La trisection de l'angle et la duplication sont possibles pour la construction conique, mais pas la quadrature du cercle.

4 Calcul différentiel

Immersion, submersion, rang constant
Sous-variétés

Autres idées à explorer...

Modules de type fini sur un anneau quelconque, sur un anneau principal
Géométrie affine/projective, carathéodory
Calcul différentiel
Représentations linéaires
De la crypto/codes

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Wedderburn, [Perrin(1996)]**
  - ⋆ **Théorème de Gauss-Wantzel-Videla, [Carrega(1981)]**
  - ⋆ **Théorème d'Engel, [Humphreys(1972)]**
  - ⋆ **Théorème de l'élément primitif, [Gozard(2009), p. 101]**
  - ⋆ **Irréductibles de $\mathbf{F}_q$ [S. Francinou()]**

Références

[**?**] pour le cours sur les espaces vectoriels, puis [Perrin(1996)] pour la partie sur les extensions de corps, complété éventuellement par un livre de théorie de Galois synthétique tel [**?**]. Le théorème de Frobenius est dans [Carrega(1981)], ainsi que les détails des caractérisations de la constructibilité.

Rapport du jury. Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur R ou C il est délicat de définir det(A – X In) avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant en terme de volume est essentielle. Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux. Cette leçon classique a été très mal traitée. Les candidats ont recopié de mauvais plans sur Internet en oubliant les propriétés importantes du déterminant ; volume, orientation, discussion du rang grâce aux bordantes. Signalons que les candidats qui ont proposé comme développement des thèmes trop éloignés de la leçon ont tous été sanctionnés. Par exemple le calcul de la distance à un sous-espace vectoriel ne peut pas constituer un développement substantiel. On ne peut pas présenter le théorème de Müntz sans présenter le calcul du déterminant de Cauchy préalablement. En fait il est inutile de faire tout le calcul, seul importe le quotient entre deux déterminants de Cauchy et celui-ci est très rapide à exposer.

Φ Caractérisation simple de la liberté algébrique de familles, et quantité de volume géométriquement...

H [S. Francinou(2008a)] et [Prasolov(2007)] Leibniz utilise déjà les systèmes linéaires à la fin du XVIIe siècle, mais c'est Cramer qui, en 1754, s'attache à étudier les déterminants en tant que tels, en donnant les formules d'inversion d'un système linéaire notamment. Cauchy est le premier à développer plus avant la théorie des déterminants de manière systématique et autonome.

Avis. Outil simple et puissant, analytique dans son utilisation mais portant de nombreuses informations sur le degré de liberté des familles, le rang, etc. Marier les deux points de vue parait indispensable.

⋆ ⋆ ⋆

A est un anneau intègre de caractéristique différente de 2, K est un corps.

1 Déterminant d'une famille et liberté [Fresnel(2011)]

1.1 Formes multilinéaires et déterminants

Δ Une forme n-linéaire est alternée si dès qu'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Θ Notons e une base de E et pour tout i, $x_i = \sum_j x_{ij}$. L'application $\det_e : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$ engendre l'espace des formes n-linéaires alternées. C'est le déterminant dans la base e.

Θ Si f est une base de E, alors $\det_f(x_1, \dots, x_n) = \det_f(e_1, \dots, e_n) \det_e(x_1, \dots, x_n)$.

A Une famille est liée si, et seulement si, son déterminant est non nul.

1.2 Propriétés analytiques du déterminant

Θ Le déterminant est un polynôme, en particulier il est de classe C^∞.

A L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $M_n(K)$ dès que K est infini.

A L'ensemble des points affinement bien distribués est dense dans l'ensemble des tuples.

Θ La différentielle du déterminant est $d\det_A : H \mapsto Tr({}^t com(A)H)$.

1.3 Systèmes linéaires

Θ (Cramer) Si $\det(A) \neq 0$, alors le système de Cramer $AX = B$ admet une unique solution sur K, donnée par $x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, B_i, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n)}$.

Θ (Pascal)

Θ Le rang d'une matrice est la taille maximale d'un mineur non nul.

A Le rang est semi-continu inférieurement.

A Le rang ne dépend pas du corps de base.

Θ (Rouché-Fontené)

Θ (Hankel-Bourbaki)

1.4 Géométrie [?], [?]

Application à la géométrie affine ! ! ! Points affinement liés, Méléaus, Ceva...
En reprenant un espace vectoriel sans structure particulière, la notion de déterminant a pour objectif de donner un sens intrinsèque au "volume" du parallélotope, sans référence à un produit scalaire par exemple. cf. Wiki, excellente page ! Les propriétés que l'on veut voir vérifiées par une notion de volume d'un parallélotope sont le caractère n-linéaire et alterné.

Θ Si u est en endomorphisme, alors pour tout $A \in B(\mathbf{R}^n)$, $\lambda(u(A)) = |\det(u)|\lambda(A)$.

A Changement de variables

A Si P est un parallélotope construit sur les $(v_i)_i$, alors $\lambda(P) = |\det(v_i)_i|$.

Θ (Hadamard) $|\det(v_i)_i| \leqslant \prod_i \|v_i\|$ avec égalité si, et seulement si, $(v_i)_i$ est orthogonale.

Δ La matrice de Gram de la famille $(x_i)_i$ de l'espace euclidien E est $G((x_i)_i = (\langle x_i, x_j \rangle)_{ij}$.

Θ La distance d de x au sous-espace engendré par la famille libre $(x_i)_i$ est telle que $d^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_n, x)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}$.

A

Θ (Müntz) $Vect(x^{\alpha_n})_n$ est dense dans $C([0,1])$ au sens L^2 si, et seulement si, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

2 Pratique du déterminant [Fresnel(2011)]

2.1 Calcul de déterminants

Θ (Opérations élémentaires) On ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres, ou en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

Θ (Développement) Si on note M_{ij} la matrice obtenue de M en supprimant la ligne i et la colonne j, alors $\det M = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij}$.

Δ Mineurs

Δ La comatrice de M est la matrice $com(M) = (\det M_{ij})$ des cofacteurs de M.

Θ Pour toute $M \in M_n(K)$, on a $M {}^t com(M) = {}^t com(M) M = \det(M) I_n$. En particulier M est inversible si, et seulement si, $\det(M) \in K^\times$, et alors $M^{-1} = \det(M)^{-1} {}^t com(M)$.

A Une matrice de $M_n(\mathbf{Z})$ est dans $GL_n(\mathbf{Z})$ si, et seulement si, $\det(M) = \pm 1$.

Θ (Binet-Cauchy) Si A et B sont des matrices de taille $(n, m$ et (m, n) avec $n \leqslant m$, alors $\det AB = \sum_{k_1 < \dots < k_n} A_{k_1 \cdots k_n} B^{k_1 \cdots k_n}$.

2.2 Calcul par blocs

Θ Diagonal par blocs, triangulaire par blocs
Plein de choses sur le complément de Schur

Θ (Williamson) Si les A_{ij} sont des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ commutant deux à deux, alors $\det((A_{ij})_{ij} = \det \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^m A_{i,\sigma(i)}$.

2.3 Exemples de déterminants [S. Francinou(2008a)]

Θ Le déterminant de Vandermonde est $V((\lambda_i)_i) = \det((\lambda_i^j)_{ij}) = \prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i)$.

A Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont indépendants.

A u est nilpotent si, et seulement si, $Tr(u^p) = 0$ pour tout p. Un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ est fini et, et seulement si, il est d'exposant fini.

Θ (Chebotarev) Si p est premier et $\varepsilon)\exp(2i\pi/p)$, alors tous les mineurs de la matrice de Vandermonde $(\varepsilon^{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant p-1}$ sont non nuls.

Θ Le déterminant de Cauchy est $C((x_i)_i, (y_j)_j) = \det(\frac{1}{x_i + y_j}) = \frac{\prod_{j>i}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j}(x_i + y_j)}$.

A ?

Θ Le déterminant de la matrice compagnon $C(P)$ est χ_P.

Et trouver d'autres rapports, parler d'espaces cycliques, de carac de ce fait, etc.

Θ Le déterminant de Hürwitz est $H(a,b,(r_i)_i) = \frac{b\prod_i(r_i-a)-a\prod_i(r_i-b)}{b-a}$.

Θ Le déterminant de Smith est $S_n = \det(i \wedge j)_{ij} = \prod_{i=1}^n \phi(k)$.

2.4 Algorithme du pivot de Gauss

Θ Le calcul d'un déterminant est donc en $O(n^3)$.

3 Déterminant d'endomorphismes

3.1 Déterminants d'un endomorphisme et d'une matrice carrée [Fresnel(2011)]

Δ Pour $u \in L(E)$, il existe un unique scalaire α tel que $\forall (x_i)_i, \det_e(u(x_1),\ldots,u(x_n)) = \alpha \det_e(x_1,\ldots,x_n)$, appelé déterminant de u, ne dépendant pas de e, et noté $\det(u)$.

Θ On a pour toute base, $\det(u) = \det_e(u(e_1),\ldots,u(e_n))$.

Θ Si $u,v \in L(E), w \in GL(E)$, alors $\det(uv) = \det(u)\det(v), \det(wuw^{-1}) = \det(u), \det(u) \neq 0 \iff u \in GL(E)$. En particulier, det est un morphisme multiplicatifs de groupes, de noyau $SL(E)$, le groupe spécial linéaire.

Δ Le déterminant d'une matrice est le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé.

3.2 Réduction d'endomorphismes [Fresnel(2011)]

Δ Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ est $\det(A - XIn)$.

Θ (Cayley-Hamilton) Pour toute matrice A, $\chi_A(A) = 0$.

John et ellipsoides

3.3 Résultant [Chenciner()]

Δ Le résultant de deux polynômes P et Q est le déterminant de l'application linéaire $(U,V) \mapsto UP + VQ$.

Θ Deux polynômes ont une racine commune si, et seulement si, leur résultant est nul.

Et application à la recherche d'intersections de courbes algébriques ?

3.4 Théorie des nombres [Samuel(2003)]

Δ La norme de a est le déterminant de l'application A-linéaire $x \mapsto ax$.

Δ Le discriminant de la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est le déterminant de la matrice $(Tr_{A/K}(x_ix_j))_{ij}$.

Autres idées à explorer...

Minkowski (?) : concavité de dét et application !
Réseaux
Du numérique et des décompositions
Théorème de Brauer !
Orientation de l'espace
Déterminant de Hankel et récurrences linéaires (circulantes ! ?) Plus de déterminants par blocs : cf. Prasolov, FGN

- **Développements.**

★ **Müntz, [Gourdon(2008)]**

★ **Frobenius-Zolotarev, [V. Beck(2005)]**

★ **John-Loewner, [Alessandri(1999), p. 142]**

★ **Hankel-Bourbaki, [Chenciner()]**

Références

[Fresnel(2011), 1.1]
[S. Francinou(2008a), ch. 1]
[Prasolov(2007), ch. 1]
[Bourbaki(2007a), A.III. 8]

Rapport du jury. Le titre officiel précise que la dimension est finie. Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre K[u], connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de cette algèbre K[u]. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Le jury ne souhaite pas avoir un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme. L'aspect applications est trop souvent négligé. Après avoir élaboré et décrit des outils efficaces, le candidat doit pouvoir décrire les matrices vérifiant par exemple $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ ou $A^3 - 3A + 2I = 0$. Cette leçon ne porte pas uniquement sur la réduction des endomorphismes. Par exemple, le calcul des puissances ou de l'exponentielle d'une matrice peut illustrer cette leçon (sans passer par la décomposition de Dunford). On pourra méditer sur l'exemple suivant en utilisant les projecteurs sur les espaces caractéristiques :
$A^2 - 3A + 2I = 0 \Rightarrow exp(A) = (e^2 - e)A + (2e\breve{\ }e^2)I = P(A)$. On attend aussi pour les meilleurs quelques résultats concernant l'algèbre formée par les polynômes d'une matrice (dimension, commutant etc.). Réduction d'un endomorphisme (2007) : Cette leçon ne peut se réduire à la diagonalisation. Dans la décomposition de Dunford f = d + n, le fait que d et n sont des polynômes en f doit être signalé. L'utilisation des polynômes d'endomorphisme est certainement utile dans cette leçon. On doit savoir que 0 est une racine simple du polynôme minimal si 0 différent de $ker(A) = ker(A^2)$. On pourra s'interroger sur les classes de similitudes de matrices parmi les matrices ayant un polynôme caractéristique donné.

Φ L'idée fondamentale de la réduction des endomorphismes est la recherche de sous-espaces stables sur lesquels l'endomorphisme est plus simple. Les sous-espaces u-stables engendrés font naturellement intervenir les itérés et donc les polynômes en l'endomorphisme. Puis le lemme des noyaux justifie la fécondité de ce choix.

H Réduction tardive, depuis Cayley puis Frobenius...

Avis. Exploiter en particulier les propriétés prores aux polynômes, arithmétiques notamment, une fois que l'utilisation des polynômes d'endomorphismes a été explorée. Souligner le point de vue des K[X]-modules, travailler par exemple le [**?**].

⋆ ⋆ ⋆

E est un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E.

1 Polynômes d'endomorphismes et polynôme minimal [Fresnel(2011)]

1.1 L'algèbre $k[u]$ [V. Beck(2005)]

Δ Le morphisme d'algèbres $\phi_u : P \in k[X] \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre, et son image est $k[u]$, l'algèbre des polynômes en u.

Θ En dimension finie, il existe un unique générateur unitaire de $Ker(\phi_u)$: c'est le polynôme minimal de u, noté π_u, qui est le polynôme unitaire de plus petit degré de $Ker(\phi_u)$.

E
- ⋆ Le polynôme minimal d'un projecteur non trivial est $X(X-1)$
- ⋆ Le polynôme minimal d'une symétrie non triviale est $(X-1)(X+1)$
- ⋆ Le polynôme minimal de la dérivation sur $k_n[X]$ est X^n
- ⋆ En dimension infinie un endomorphisme n'a pas nécessairement de polynôme annulateur, ainsi $P \in k[X] \mapsto P'$ ou $P \in k[X] \mapsto XP'$.

Θ Le polynôme minimal est un invariant de similitude, *i.e.* $\forall v \in GL(E), \forall u \in L(E), \pi_{vuv^{-1}} = \pi_u$.

Θ La dimension de $k[u]$ est $d = dim(k[u]) = deg(\pi_u)$, et $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ en est une base.

Θ (chinois) Si $\pi_u = P_1 \cdots P_n$ est la décomposition de P en irréductibles non associés, alors $k[u] \cong k[X]/(\pi_u) \cong \prod_i [X]/(P_i)$.

Θ (Berlekampp)

1.2 Suites d'endomorphismes itérés [S. Francinou(2007a)]

Θ Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $Ker(u^i)$ est stable par u.

Θ La suite $(Ker(u^i))_i$ est croissante et $(dim(Ker(u^{i+1}) - dim(Ker(u^i))$ est décroissante.

Θ La suite stationne à partir d'un certain rang p. Si $Ker(u^i) = Ker(u^{i+1})$ pour un certain i, alors la suite stationne. On a $E = Ker(u^p) \oplus Im(u^p)$.

Θ Si u est nilpotent, alors les seuls sous-espaces stables par u sont les $Ker(u^i)$.

Θ (Fitting) Tout matrice de $M_n(K)$ est semblable à une diagonale par bloc avec un bloc nilpotent et un bloc inversible.

1.3 Polynôme caractéristique

Δ Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = det(Xid - u)$, c'est un polynôme unitaire de degré n.

Θ Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, *i.e.* $\forall v \in GL(E), \forall u \in L(E), \chi_{vuv^{-1}} = \chi_u$.

Θ Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs avec des blocs diagonaux carrés A_i est $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_s}$.

Θ Le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon est son polynôme minimal, et il s'agit du polynôme associé à la matrice compagnon.

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ⋆ E est $u$cyclique, *i.e.* il existe $x \in E$ tel que $E = K[u](x)$
- ⋆ Il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$
- ⋆ La matrice de u dans une certaine base est une matrice compagnon
- ⋆ $\pi_u = \chi_u$
- ⋆ $deg(\pi_u) = n$

1.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Θ (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique est un annulateur, *i.e.* $\chi_u(u) = 0$, donc $\pi_u \mid \chi_u$. Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont mêmes facteurs irréductibles, en particulier $\chi_u \mid \pi_u^n$.

Θ Les sous-espaces caractéristiques sont également ceux provenant de la décomposition en irréductibles de χ_u...

Θ Pour tous $u, v \in L(E)$, on a $\chi_{uv} = \chi_{vu}$, en particulier $Tr(uv) = Tr(vu)$.

2 Lemme des noyaux et sous-espaces stables [Fresnel(2011)]

2.1 Lemme des noyaux

Θ (lemme des noyaux) Si $P \in k[X]$ et si $P = Q_1 \cdots Q_s$ est une factorisation de P de sorte que les Q_i soient premiers entre eux deux à deux, alors en notant $E_i = Ker(Q_i(u))$:

- ⋆ Pour tout i, E_i est stable par u, *i.e.* $u(E_i) \subseteq E_i$
- ⋆ Pour tout i, E_i est l'image d'un polynôme en u, *i.e.* $\exists S \in k[x], E_i = S(u)(E_i)$
- ⋆ $Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$
- ⋆ Pour tout i, Q_i annule l'endomorphisme induit sur E_i, *i.e.* $Q_i(u_{E_i}) = 0$

E
- ⋆ Si p est un projecteur, alors $E = Ker(p) \oplus Ker(p - id)$
- ⋆ Si s est une symétrie, alors $E = Ker(s - id) \oplus Ker(s + id)$

Θ Si F est un sous-espace stable par u, alors u induit un isomorphisme v sur F et un endomorphisme w sur E/F, et on a $PPCM(\pi_v, \pi_w) \mid \pi_u \mid \pi_v\pi_w$. En particulier π_v et π_w divisent π_u.

Θ Si on a une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$ en somme directe de sous-espaces stables et si on note u_i l'endomorphisme induit sur E_i, alors $\pi_u = PPCM(\pi_1, \dots, \pi_s)$.

2.2 Sous-espaces cycliques et caractéristiques

Θ Si la factorisation de π_u en polynômes irréductibles unitaires distincts est $P_1^{a_1} \cdots P_s^{a_s}$ et si on note $E_i = Ker(P_i^{a_i}(u))$, alors on a :

- ⋆ $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$
- ⋆ Pour tout i, $P_i^{a_i} = \pi_{u_i}$
- ⋆ Pour tout sous-espace F stable par E, $F = \bigoplus_{i=1}^{s}(F \cap E_i)$, $F \cap E_i$ stable par u et $\pi_{u_{F \cap E_i}} = P_i^{b_i}, 0 \leqslant b_i \leqslant a_i$.

Δ Ces E_i relatifs au polynôme minimal sont les sous-espaces caractéristiques de u.

Δ Le sous-espace u-stable engendré par x est le sous-espace $Vect(u^i(x))$. C'est le plus petit sous-espace stable par u contenant x. On note u_x l'endomorphisme induit, et π_x le polynôme minimal de u_x, appelé polynôme minimal pondtuel en x.

Θ Le polynôme minimal est un polynôme minimal ponctuel, *i.e.* il existe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_x$.

2.3 Premières réductions

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :
- ⋆ u est diagonalisable
- ⋆ π_u est scindé à racines simples
- ⋆ u est annulé par un polynôme scindé à racines simples

Θ (Burnside)

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :
- ⋆ u est nilpotent
- ⋆ $\pi_u = X^k$
- ⋆ $\chi_u = X^n$
- ⋆ $Sp(u) = \{0\}$

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :
- ⋆ u est trigonalisable
- ⋆ π_u est scindé
- ⋆ u est annulé par un polynôme scindé

3 Réduction générale [Fresnel(2011)]

3.1 Décomposition de Dunford

Θ (Dunford) Si π_u est scindé, alors il existe un unique couple (d, n) avec d diagonalisable, n nilpotent, $dn = nd$ tel que $u = d + n$. De plus, u et n sont des polynômes en u.

3.2 Réduction de Frobenius

Θ (Frobenius) Il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que :

- ⋆ $E = \bigoplus_{i=1}^{n} K[u](x_i)$
- ⋆ Si $P_i = \pi_{x_i} = \pi_{u,x_i}$, alors $P_i \mid P_{i+1}$ pour tout i

De plus, la suite $(P_i)_i$ est unique, ce sont les invariants de similitude de u.

Θ $\mu = P_n$ et $\chi_u = P_1 \cdots P_n$.

Θ Une transversable pour la relation de conjugaison est l'ensemble des matrices $diag(A_1, \dots, A_s)$ de taille n où les A_i sont des matrices compagnons et où $\pi_{A_1} \mid \cdots \mid \pi_{A_s}$.

A SI $L : K$ est une extension de corps, et si $A, B \in M_n(K)$ sont semblables dans L, alors elles le sont dans K.

3.3 Réduction de Jordan

Δ Le bloc de Jordan de taille m associé à *lambda* est la matrice $J_m(\lambda) = ...$

Θ (Jordan) Le polynôme caractéristique de u est scindé si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est une diagonale de blocs de Jordan. Les valeurs propres de u sont les paramètres des blocs de Jordan, et cette décomposition est unique à l'ordre près des blocs.

Autres idées à explorer...

Commutant

- **Développements.**

  - ⋆ **Réduction de Frobenius et invariants de similitude, [Fresnel(2011)]**
  - ⋆ **Réduction de Jordan, [Fresnel(2011)]**
  - ⋆ **Algorithme de Berlekampp, [V. Beck(2005)]**
  - ⋆ **Théorème de Burnside, [S. Francinou(2008a)]**
  - ⋆ **ÉTude de l'exponentielle**

Références

[Fresnel(2011), ch. 3, 4, 5] pour l'essentiel. [Mneimné()] est plein de bonnes idées et mérite d'être lu... mais reste vague sans vraiment de preuves ni de références.

154. Sous-espaces stables d'un endomorphisme ou d'une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Rapport du jury. Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études de cas détaillées sont les bienvenues.

Φ Étant donné un endomorphisme u, l'objectif général de la réduction est de décomposer l'espace en sous-espaces stables sur lesquels u induit un endomorphisme plus simple.

H

Avis. Plus d'applciations des résultats purement théoriques sur la réduction. Noter la pertinence de la notion de sous-représentations dans cette leçon.

⋆ ⋆ ⋆

E est un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E.

1 Sous-espaces stables [Fresnel(2011)]

1.1 Sous-espaces stables, sous-espaces cycliques

Δ Un sous-espace stable par u, ou u-stable, est un sous-espace F de E tel que $U(F) \subseteq F$. Dans ce cas, u induit en endomorphisme u_F de F. Matriciellement dans une base adaptée F, la matrice de u est triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Θ Si u et v commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre. C'est en particulier le cas des sous-espaces caractéristiques, des sous-espaces propres.

Θ Si K est un corps sur lequel les polynômes irréductibles sont tous de degré inférieur à r, alors u admet un sous-espace stable non trivial de dimension inférieure à r. En particulier il existe toujours une droite stable sur $\mathbf{C}$, et une droite ou un plan stable sur $\mathbf{R}$.

Δ Le sous-espace u-stable engendré par x est le sous-espace $Vect(u^i(x))$. C'est le plus petit sous-espace stable par u contenant x. On note u_x l'endomorphisme induit, et π_x le polynôme minimal de u_x, appelé polynôme minimal pondtuel en x.

Δ Diagonalisable, trigonalisable, drapeaux, etc.

1.2 Endomorphismes induits

Θ Si F est un sous-espace stable par u, alors u induit un isomorphisme v sur F et un endomorphisme w sur E/F, et on a $PPCM(\pi_v, \pi_w) \mid \pi_u \mid \pi_v\pi_w$. En particulier π_v et π_w divisent π_u.

Θ Si on a une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^s E_i$ en somme directe de sous-espaces stables et si on note u_i l'endomorphisme induit sur E_i, alors $\pi_u = PPCM(\pi_1, \dots, \pi_s)$.

Θ Le polynôme minimal est un polynôme minimal ponctuel, *i.e.* il existe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_x$.

Θ Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs avec des blocs diagonaux carrés A_i est $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_s}$.

Θ Le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon est son polynôme minimal, et il s'agit du polynôme associé à la matrice compagnon.

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ⋆ E est $u$cyclique, *i.e.* il existe $x \in E$ tel que $E = K[u](x)$
- ⋆ Il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$
- ⋆ La matrice de u dans une certaine base est une matrice compagnon
- ⋆ $\pi_u = \chi_u$
- ⋆ $deg(\pi_u) = n$

1.3 Dénombrement des sous-espaces stables

Δ Un endomorphisme est simple si ses seuls sous-espaces stables son triviaux, *i.e.* E et $\{0\}$.

Θ Un endomorphisme est simple si, et seulement si, χ_u est irréductible. Dans ce cas, u est cyclique.

Θ (Schur) Sur un corps algébriquement clos, le commutant de $L(E)$ est réduit aux homothéties.

Θ Si u stabilise tous les sous-espaces de dimension k, alors c'est une homothétie.

2 Lemme des noyaux [Fresnel(2011)]

2.1 Lemme des noyaux

Θ (lemme des noyaux) Si $P \in k[X]$ et si $P = Q_1 \cdots Q_s$ est une factorisation de P de sorte que les Q_i soient premiers entre eux deux à deux, alors en notant $E_i = Ker(Q_i(u))$:

- ⋆ Pour tout i, E_i est stable par u, *i.e.* $u(E_i) \subseteq E_i$
- ⋆ Pour tout i, E_i est l'image d'un polynôme en u, *i.e.* $\exists S \in k[x], E_i = S(u)(E_i)$
- ⋆ $Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^s E_i$
- ⋆ Pour tout i, Q_i annule l'endomorphisme induit sur E_i, *i.e.* $Q_i(u_{E_i}) = 0$

E
- ⋆ Si p est un projecteur, alors $E = Ker(p) \oplus Ker(p - id)$
- ⋆ Si s est une symétrie, alors $E = Ker(s - id) \oplus Ker(s + id)$

Θ Si la factorisation de π_u en polynômes irréductibles unitaires distincts est $P_1^{a_1} \cdots P_s^{a_s}$ et si on note $E_i = Ker(P_i^{a_i}(u))$, alors on a :

- ⋆ $E = \bigoplus_{i=1}^s E_i$
- ⋆ Pour tout i, $P_i^{a_i} = \pi_{u_i}$
- ⋆ Pour tout sous-espace F stable par E, $F = \bigoplus_{i=1}^s (F \cap E_i)$, $F \cap E_i$ stable par u et $\pi_{u_{F\cap E_i}} = P_i^{b_i}, 0 \leqslant b_i \leqslant a_i$.

Δ Ces E_i relatifs au polynôme minimal sont les sous-espaces caractéristiques de u.

2.2 Premières réductions

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :

- ⋆ u est nilpotent
- ⋆ $\pi_u = X^k$
- ⋆ $\chi_u = X^n$
- ⋆ $Sp(u) = \{0\}$

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :

- ⋆ u est trigonalisable
- ⋆ π_u est scindé
- ⋆ u est annulé par un polynôme scindé

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :

- ⋆ u est diagonalisable
- ⋆ π_u est scindé à racines simples
- ⋆ u est annulé par un polynôme scindé à racines simples

Θ (Dunford) Pour tout endomorphisme u, il existe un unique d diagonalisable et un unique n nilpotent tels que $u = d + n$ et d et n commutent. De plus, d et n sont des polynômes en u.

2.3 Réduction simultanée [Humphreys(1972), Chambert-Loir(2005)]

Θ (réduction simultanée) Si $(u_i)_i$ est une famille finie d'endomorphismes diagonalisables (resp. trigonalisables), alors elle est simultanément diagonalisable (resp. trigonalisable) si, et seulement si, elle commute.

A (Lie-Kolchin) Tout sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbf{C})$ est simultanément trigonalisable.

Θ Si L est une sous-algèbre de Lie résoluble d'endomorphismes en dimension finie non nulle, alors il existe un vecteur propre commun à L.

A (Lie) Une algèbre de Lie résoluble de $gl(V)$ en dimension finie est simultanément trigonalisable.

2.4 Réduction de Frobenius

Θ (Frobenius) Il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que :

- ⋆ $E = \bigoplus_{i=1}^{n} K[u](x_i)$
- ⋆ Si $P_i = \pi_{x_i} = \pi_{u,x_i}$, alors $P_i \mid P_{i+1}$ pour tout i

De plus, la suite $(P_i)_i$ est unique, ce sont les invariants de similitude de u.

Θ $\mu = P_n$ et $\chi_u = P_1 \cdots P_n$.

Θ Une transversable pour la relation de conjugaison est l'ensemble des matrices $diag(A_1, \dots, A_s)$ de taille n où les A_i sont des matrices compagnons et où $\pi_{A_1} \mid \cdots \mid \pi_{A_s}$.

A SI $L : K$ est une extension de corps, et si $A, B \in M_n(K)$ sont semblables dans L, alors elles le sont dans K.

2.5 Réduction de Jordan

Θ Noyaux itérés, images itérées

Δ Le bloc de Jordan de taille m associé à *lambda* est la matrice $J_m(\lambda) = ...$

Θ (Jordan) Le polynôme caractéristique de u est scindé si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est une diagonale de blocs de Jordan. Les valeurs propres de u sont les paramètres des blocs de Jordan, et cette décomposition est unique à l'ordre près des blocs.

3 Endomorphismes remarquables

3.1 Endomorphismes nilpotents

Θ Les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent u sont les $Ker(u^i)$.

Θ Si L est une sous-algèbre de Lie d'endomorphismes nilpotents en dimension finie non nulle, alors il existe un vecteur propre commun à L, *i.e.* un vecteur non nul annulé par tous les éléments de L. Autrement dit, L est simultanément trigonalisable.

A (Engel) Une algèbre de Lie L est nilpotente si, et seulement si, tout élément est ad-nilpotent.

3.2 Semi-simplicité

Θ Sur un corps algébriquement clos, un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il est semi-simple.

3.3 Endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux, normaux

A
- ⋆ Tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbf{C}$
- ⋆ Tout $M \in SO_n(\mathbf{R})$ se met sous la forme d'une diagonale de 1 et de R_θ
- ⋆ Tout $A \in A_n(\mathbf{R})$ se met sous la forme d'une diagonale de 0 et de ...

4 Représentations linéaires [W. Fulton(2004)]

Δ Une sous-représentation $W \leqslant V$ est un sous-espace stable par l'action, *i.e.* un sous-espace tel que $\forall w \in W, gw \in W$. La représentation induit alors une représentation de G sur W.

E
- ⋆ pour la représentation régulière, $Vect(\sum_g e_g)$ est une sous-représentation

Θ Toute sous-représentation admet une sous-représentation supplémentaire, *i.e.* un supplémentaire de W qui est une sous-représentation.

Δ Une représentation est dite irréductible si ses seules sous-représentations sont triviales, *i.e.* $\{0\}$ et V.

E
- ⋆ toute représentation de degré 1 est irréductible

Θ (Mashcke) Toute représentation est somme directe d'irréductibles.

Autres idées à explorer...

Dualité
Skolem-Noether

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Lie-Kolchin, [Chambert-Loir(2005)]**
  - ⋆ **Théorème de Engel, [Humphreys(1972)]**
  - ⋆ **Théorème de Mashke, [Serre(1998)]**
  - ⋆ **Réduction de Frobenius, [Fresnel(2011)]**

Réduction de Frobenius et invariants de similitude : existence & lemme fondamental ; unicité
Réduction de Jordan ou réduction des nilpotents

Références

[?]

155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Rapport du jury. Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice.

Φ Décomposer un espace en somme de sous-espaces stables sur lesquels l'endomorphisme est plus simple. Le cas idéal est celui où les actions induites sont les homotéhties : c'est la diagonalisabilité. Le cas est intéressant à étudier et pas entièrement utopique, par densité des diagonalisables et par la décomposition de Dunford.

H

Avis. C'est le cas idéal de la réduction : même s'il n'est pas mentionné « Applications » dans le titre de la leçon, il mérite d'être exploité. Les réductions un peu plus générales sont importantes pour pouvoir étendre un peu ce cas très particuliers : Dunford, diagonalisation à ε près, etc. mais le très bon comportement et les informations que l'on peut obtenir dans ce cas diagonalisable ne doivent pas être occultées par un leçon trop générale sur la réduction. De nombreuses applications illustrent les résultats, notamment sur les suites récurrentes et les systèmes différentiels. Les aspects effectifs sont également à prendre.

⋆ ⋆ ⋆

E est un espace vectoriel de dimension finie.

1 Diagonalisabilité

1.1 Définitions générales

Δ $x \in E\backslash\{0\}$ est un vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$. On note alors $E_\lambda = Ker(u - \lambda id)$ le sous-espace propre associé à λ, et $Sp(u) = \{\lambda \in K \mid \exists x \neq 0, u(x) = \lambda x\}$.

Θ Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.

Δ u est diagonalisable s'il existe une base de E qui est formée de vecteurs propres. Une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Θ Si $k \subseteq K$, alors la k-diagonalisabilité implique la K-diagonalisabilité.

E Un contre-exemple : $[[0, 1, -1, 0]]$ est diagonalisable dans $\mathbf{C}$ mais pas dans $\mathbf{R}$.

1.2 Critères de diagonalisabilité

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes à la diagonalisabilité de u :
- ⋆ le polynôme minimal est à racines simples
- ⋆ il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
- ⋆ les multiplicités algébriques du polynôme caractéristique sont les multiplicités géométriques des valeurs propres

E
- ⋆ Les projecteurs sont annulés par $X^2 - X$ et sont donc diagonalisables
- ⋆ Les symétries sont annulées par $X^2 - 1$ et sont donc diagonalisables
- ⋆ Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable
- ⋆ Un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes en dimension n est diagonalisable

Θ (Corollaire) Si u est diagonalisable et F est stable par u, alors u_F est diagonalisable.

Θ (Burnside) Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ d'exposant fini est fini.

Θ (Cayley-Hamilton) π_u divise χ_u, *i.e.* $\chi_u(u) = 0$.

Θ

cf. FGN : condition de diagonalisabilité des matrices de permutation

1.3 Diagonalisation simultanée

Θ La famille $(u_i)_i$ d'endomorphismes diagonalisables est commutative si, et seulement si, ils sont simultanément digonalisables, *i.e.* il existe une base de vecteurs propres communs à tous les u_i.

A Le sous-groupe des involutions de $GL_n(\mathbf{R})$ est de cardinal 2^n. En particulier $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ sont isomorphes si, et seulement si, $n = m$.

A Si deux endomorphismes diagonalisables commutent, alors leurs somme, différence, produit sont diagonalisables.

Application aux recherches de commutants, cf. matrices circulantes.

1.4 Des cas particuliers

- **Θ** Un endomorphisme de rang 1 en diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.
- **Θ** En caractéristique différente de 2, un endomorphisme de rang 2 est diagonalisable si, et seulement si...
- **Θ** Si $k = \mathbf{F}_q$, u est diagonalisable si, et seulement si, $u^q = u$.

2 Topologie
Intérêt de la diagonalisabilité : par densité, on n'est pas très loin de $M_n(\mathbf{R})$:

- **Θ** L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$.
- **Θ** L'intérieur des matrices diagonalisables est formé des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes.

Plus de topo...

3 Généralisation, diagonalisabilité par blocs

3.1 Endomorphismes remarquables des espaces complexes

Normaux, antisymétriques, symétriques, nilpotents, etc.

- **Θ** (Dunford) Pour tout endomorphisme u, il existe un unique d diagonalisable et un unique n nilpotent tels que $u = d + n$ et d et n commutent. De plus, d et n sont des polynômes en u.

3.2 Diagonalisabilité par blocs

- **Θ** Réduction de Jordan
- **Θ** (Invariants de similitude)

De trop ?

4 Applications de la diagonalisation
Systèmes linéaires, différentiels Puissances de matrices, termes généraux de suites
Analyse numérique (cf. Ciarlet !)

Autres idées à explorer...
Caractères, représentations d'un groupe fini commutatif ! (Burnside)
Parler de rayon spectral
Ellipsoide de John-Loewner
Parler d'analyse en composante principales, d'axes principaux d'inertie, d'autres applications ailleurs de la diagonalisabilité ou des vp...

- **Δ** On dit que f est semi-simple si pour tout sous-espace F de E stable par f, il existe un supplémentaire S de F stable par f. Une matrice M ∈ Mn(K) est dite semi-simple si l'endomorphisme associé est semi-simple.
- **Θ** f est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est un produit de polynôme irréductibles unitaires deux à deux distincts.
- **Θ** Si K est algébriquement clos alors f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable.

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Burnside, [S. Francinou(2008a)]**
  - ⋆ **Théorème de John-Loewner, [Alessandri(1999)]**
  - ⋆ **Théorème de Lie-Kolchin, [?]**

Références

[Fresnel(2011)] et [V. Beck(2005)]

Rapport du jury. C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice est-elle dans l'image exp(Mat (2,R) ?. Qu'en est-il de la matrice blocs ? La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de exp(A) doit être connue. Les groupes à un paramètre peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de GL(n,R). L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités. Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique. Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'Agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité.

Φ Les excellentes propriétés de l'exponentielle réelle puis complexe suggèrent son utilisation en algèbre linéaire, le développement en série entière restant valable et des propriétés analogues pouvant être espérées via le calcul fonctionnel. Certaines propriétés ne demeurent cependant pas, ainsi la propriété fonctionnelle $e^{x+y} = e^x e^y$, et l'étude du défaut de cette formule fait apparaître les crochets de Lie.

H [Bourbaki(2006), p. 300] Study et Enguel sont les premiers à étudier l'exponentielle, notament sa surjectivité sur des groupes linéaires. Poincaré travaille en 1899 sur des précisions sur les possibilités d'être dans l'image de l'exponentielle. De la fin du XIXe jusqu'au milieu du XXe, on essaie de préciser une formule donnant W en fonction de U et V si $e^W = e^U e^V$, et les premiers travaux de Campbell aboutissent bien plus tard à la détermination claire par Hausdorff d'une formule, entièrement précisée par Dynkin par la suite.

Avis. Il ne faut pas faire que de l'analyse, notamment ne pas passer son temps à faire des groupes de Lie ou des systèmes différentiels – même s'ils trouvent largement leur place. De nombreuses propriétés algébriques sont à exploiter, notamment le comportement de l'exponentielle lors des réductions : diagonalisation, Dunford, Jordan, etc.

⋆ ⋆ ⋆

1 L'exponentielle de matrices [R. Mneimné(2009)]

1.1 Définitions et premières propriétés

Δ L'exponentielle de $A \in M_n(K)$ est $exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. C'est une série normalement convergente, et uniformément sur tout compact de $M_n(\mathbf{C})$.

Θ L'exponentielle de A est un polynôme en A, mais l'exponentielle n'est pas un polynôme. En particulier A et $\exp(A)$ commutent.

Θ L'exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- ⋆ $|||e^A||| \leqslant e^{|||A|||}$ pour tout norme subordonnée
- ⋆ Si A et B commutent, $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$
- ⋆ Si $A \in M_n(\mathbf{C})$, alors $\exp(M) \in GL_n(\mathbf{C})$ et $exp(A)^{-1} = exp(-A)$
- ⋆ Si $P \in GL_n(\mathbf{C})$, $exp(PAP^{-1}) = Pexp(A)P^{-1}$, $exp(A)^\star = exp(A^\star)$

Θ (Campbell-Hausdorff) Si $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}\log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, alors $log(\exp X \exp Y)$ vaut

$$X + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{p_i+q_i>0} \frac{(adX)^{p_1} \circ (adY)^{q_1} \circ \cdots \circ (adX)^{p_k} \circ (adY)^{q_k} \circ (adX)^m}{(q_1 + \cdots + q_k + 1)p_1!q_1! \cdots p_k!q_k!m!} Y$$

1.2 Logarithme de matrices

Δ Pour $A \in B(I,1)$, on définit le logarithme de A par $log(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(A-I)^n}{n}$.

Θ $\forall X \in B(I,1), \exp logX = X$ et $\forall X \in B(0, log2), log \exp X = X$.

1.3 Exponentielle et réduction [S. Francinou(2008a)]

Θ Si A est triangulaire, $exp(A)$ est triangulaire avec les exponentielles des éléments diagonaux comme diagonale.

A $\det(\exp A) = e^{Tr(A)}$ et $Sp(exp(A)) = exp(Sp(A))$.

Θ Si $M = D + N$ est la décomposition de Dunford de M, alors $exp(D)$ est la diagonale des exponentielles, $exp(N)$ est une somme finie, et $e^D + e^D(e^N - I)$ est la décomposition de Dunford de e^M.

A L'exponentielle est surjective de $M_n(\mathbf{C})$ dans $GL_n(\mathbf{C})$, et $\exp^{-1}(I_n)$ est l'ensemble des matrices diagonalisables de spectre dans $2i\pi\mathbf{Z}$.

A Dans $M_n(\mathbf{C})$, e^M est diagonalisable si, et seulement si, M est diagonalisable.

Θ Pour tout matrice $M \in GL_n(\mathbf{C})$, il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

Θ L'exponentielle est surjective de $M_n(\mathbf{R})$ dans l'ensemble des carrés de matrices de $GL_n(\mathbf{R})$.

2 Régularité de l'exponentielle [R. Mneimné(2009)]

2.1 Différentielle de l'exponentielle

Θ L'exponentielle est lipschitzienne sur tout compact et $\|A\|, \|B\ | \leqslant M \Longrightarrow \|e^A - e^B\| \leqslant e^M \|A - B\|$.

Θ L'exponentielle est de classe C^∞ et sa différentielle en 0 est I. La différentielle de exp en M est $D\exp_A -X) = \exp A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}(adA)^k X$ où $ad_X : H \mapsto XH - HX$.

Θ L'exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbf{C})$ dans un voisinage de I dans $GL_n(\mathbf{C})$.

A Le groupe $GL_n(\mathbf{C})$ ne contient pas de sous-groupes arbitrairement petits, et de même pour tout sous-groupe.

Δ L'étoile canonique E est le domaine connexe maximal de $M_n(\mathbf{R})$ contenant 0, et sur lequel l'exponentielle est un difféomorphisme.

Θ $E = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall \lambda \in Sp(M), |Im(\lambda)| < \pi\}$.

2.2 Homéomorphismes classiques

Θ L'exponentielle réalise un homéomorphisme de N_p dans U_p, dont l'inverse est le logarithme.

Θ exp est un homéomorphisme de $S_n(\mathbf{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ et de $H_n(\mathbf{C})$ dans $H_n^{++}(\mathbf{C})$.

A (Décomposition polaire) Toute matrice s'écrit sous la forme $O \exp S$ avec $O \in O_n$ et $S \in S_n$, et cette correspondance est un homéomorphisme de $O_n \times S_n(\mathbf{R})$ dans $GL_n(\mathbf{C})$.

A $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbf{R})$. $U_n(\mathbf{C})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbf{C})$.

2.3 Système différentiels [Demailly(2006)]

Θ Les solutions du système linéaire $X' = AX$ sont les $t \mapsto X \exp(tA)$ pour $X \in M_n(\mathbf{C})$.

Θ $e^{tM} \to 0$ si, et seulement si, $\forall \lambda \in Sp(M), Re(\lambda) < 0$.

Θ (Routh) Pour le système $Y' = AY, Y(t_0) = Y_0$, l'origine est asymptotiquement stable si, et seumement si, $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$; et l'origine est stable si, et seulement si, $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) \leqslant 0$ et dès que $Re(\lambda) = 0$ le bloc correspondant est diagonalisable.

Θ Les solutions du système $Y' = AY + B, Y(t_0) = Y_0$, sont données par $Y(t) = e^{t-t_0}A + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds$.

Θ (Liapounov) Si $f \in C^1(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$ et $\forall \lambda \in Sp(df_0), Re(\lambda) < 0$, alors pour tout Y_0 assez proche de 0, la solution du système $Y' = f(Y), Y(0) = Y_0$ tend exponentiellement vers 0.

3 Groupes de Lie [R. Mneimné(2009), Faraut(2006)]

3.1 Sous-groupes à un paramètre de $M_n(\mathbf{C})$

Δ Un sous-groupe à un paramètre est (l'image d')un morphisme additif continu de $\mathbf{R}$ dans $GL_n(\mathbf{C})$.

Θ Pour un groupe à un paramètre $t \mapsto \phi(t)$, il existe une unique $X \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $\phi(t) = exp(tX)$, à savoir $X = \phi'(0)$.

3.2 Groupes pseudo-algébriques

Δ Un sous-groupe G de $GL_n(\mathbf{C})$ est pseudo-algébrique s'il existe une famille $(P_i)_i$ de polynômes complexes à $2n^2$ indéterminées telle que $G = \bigcap_i P_i^{-1}(0)$.

Θ Un groupe pseudo-algébrique stable par adjonction est homéomorphe à un $(G \cap U_n(\mathbf{C})) \oplus \mathbf{R}^d$ pour un $d \in \mathbf{N}$.

3.3 Sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbf{C})$ et algèbres de Lie

Θ

- ★ $\lim_{p\to\infty} \left(I + \frac{1}{p}A\right)^p = exp(A)$
- ★ $\lim_{p\to\infty} \left(exp(\frac{A}{p})exp(\frac{B}{p})\right)^p = exp(A+B)$
- ★ $\lim_{p\to\infty} \left(exp(\frac{A}{p})exp(\frac{B}{p})exp(\frac{-A}{p})exp(\frac{-B}{p})\right)^{p^2} = exp(AB - BA) = \exp([A,B])$

Δ Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{C})$ on définit $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbf{C}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, exp(tX) \in G\}$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre contenus dans G. $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure d'algèbre de Lie avec $[A,B] = AB - BA$, appelée l'algèbre de Lie de G.

Θ (Cartan-von Neumann) L'exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans un voisinage de I dans G. Tout groupe linéaire fermé est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, d'espace tangent en l'identité $\mathfrak{g}$.

A $\mathfrak{g}$ détermine la composante neutre de G.

E

- ★ $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}) = M_n(\mathbf{R})$
- ★ $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{R}) = Ker(Tr)$
- ★ $\mathfrak{so}_n = A_n(\mathbf{R})$
- ★ $\mathfrak{ts}_n(\mathbf{R}) = STS_n(\mathbf{R})$

- **Développements.**

  - ★ **Groupes pseudo-algébriques, [R. Mneimné(2009)]**
  - ★ **Théorème de Cartan-von Neumann, [?]**
  - ★ **Surjectivité de exp, [S. Francinou(2008a)]**
  - ★ **Formule de Campbell-Hausdorff, [?] ou [Faraut(2006)]**
  - ★ **Homéomorphisme polaire, [R. Mneimné(2009)]**

Références

Au choix parmi les classiques de groupes de Lie : [Godement(2004), ch. 3 et 6], [R. Mneimné(2009), ch. 3] ou [Faraut(2006), ch. 2 et 3]. [Demailly(2006)] est parfait pour la partie systèmes linéaires.

Rapport du jury. Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan, à l'aide des noyaux itérés.

Φ Cas simples de réduction mais assez généraux pour pouvoir toujours s'y ramener...

H

Avis. Une leçon qui mérite de montrer la généralité de ces deux cas, notamment à travers les suites de noyaux itérés et la décomposition de Jordan qui méritent une place de choix.

⋆ ⋆ ⋆

1 Généralités

1.1 Nilpotents

Δ Un endomorphisme est nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $u^n = 0$. Le plus petit n qui vérifie cette relation est l'indice de nilpotence de u.

E
- ⋆ Dans $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, $x \mapsto px$ est nilpotent d'ordre n.
- ⋆ Les matrices strictrement triangulaires sont nilpotentes.
- ⋆ La dérivation sur $k_n[X]$ est nilpotente d'ordre $n+1$.

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :
- ⋆ u est nilpotent
- ⋆ $\pi_u = X^k$
- ⋆ $\chi_u = (-1)^n X^n$
- ⋆ $Sp(u) = \{0\}$ dans une cloture algébrique
- ⋆ u est diagonalisable et sa seule valeur propre est 0

Θ Si $car(k) = 0$, alors u est nilpotent si, et seulement si, $\forall k \in \mathbf{N}, n \neq 0, Tr(u^k) = 0$.

A (Burnside)

Θ Si $car(k) = 0$, alors u est nilpotent si, et seulement si, u et λu sont semblables pour tout $\lambda \neq 0$.

Exponentielle et nilpotence, exponentielle entre unipotentes et nilpotentes

1.2 Suite de noyaux itérés et réduction des nilpotents

Θ La suite $(Ker(u^i))_i$ est strictement croissante jusqu'à l'indice de nilpotence de u, à partir duquel elle stationne à E.

Δ Un bloc de Jordan est une matrice de la forme...

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- ⋆ La matrice de u est semblable à un bloc de Jordan
- ⋆ u est nilpotent et cyclique
- ⋆ u est nilpotent d'indice n

Θ (Jordan) Si u est nilpotent, alors il existe une unique famille croissante d'entiers $(n_i)_i$ telle que u ait pour matrice une diagonale de blocs de Jordan de tailles n_i.

A Des applications ? ? ?

Penser aux crochets de Lie usuels... ?

Θ L'exponentielle réalise un homéomorphisme entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes.

A ?

1.3 Trigonalisables

Δ Un endomorphisme u est trigonalisable s'il admet un drapeau stable, *i.e.* s'il existe une base dans laquelle u a pour matrice une triangulaire supérieure.

E
- ⋆ La dérivation dans $k_n[X]$ est trigonalisable.
- ⋆

Θ On a l'équivalence entre les propositions suivantes :
- ⋆ u est trigonalisable
- ⋆ π_u est scindé
- ⋆ u est annulé par un polynôme scindé

L'intérêt est de se ramener à des cas simples, par exemple :

Θ Si u admet pour matrice dans une base e une triangulaire, alors tout polynôme en u admet dans cette base une matrice triangulaire avec pour diagonale la diagonale formée des polynômes de la précédente... idem avec les séries entières, comme exp

Penser aux systèmes linéaires :

Θ Dans un corps algébriquement clos (où toute matrice est trigonalisable), le commutant est de dimension supérieure à n.

2 Réduction

2.1 Résultats généraux

Θ (lemme des noyaux) Si P et Q sont deux polynomes premirs entre eux, alors $Ker(u) = Ker(P(u)) \oplus Ker(Q(u))$. En particulier si $\chi_u = \prod_i (X - a_i)^{b_i}$, alors $E = \bigoplus_i Ker(u - a_i id)^{b_i}$.

Θ (Dunford) Si π_u est scindé, alors il existe un unique couple (d, n) avec d diagonalisable, n nilpotent, $dn = nd$ tel que $u = d + n$. De plus, u et n sont des polynômes en u.

A Si A=N+D est la décomposition de Dunford de A, alors la décomposition de Dunford de exp(A) est...

A L'exponentielle n'est pas injective, l'image réciproque de l'identité est constituée des matrices diagonalisables à spectre dans... L'exponentielle est surjective de Mn(C) dans GL.

Θ (Jordan) Si π_u est scindé, alors on peut Jordan...

A Si $car(k) = 0$, alors deux matrices sont semblables sur k si et seulement si elles sont semblable sur $\bar{k}$. En particulier une matrice est toujours semblable à sa transposée.

2.2 Réduction simultanée

Θ (réduction simultanée) Si $(u_i)_i$ est une famille finie d'endomorphismes diagonalisables (resp. trigonalisables), alors elle est simultanément diagonalisable (resp. trigonalisable) si, et seulement si, elle commute.

A (Lie-Kolchin) Tout sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbf{C})$ est simultanément trigonalisable.

Θ Si L est une sous-algèbre de Lie résoluble d'endomorphismes en dimension finie non nulle, alors il existe un vecteur propre commun à L.

A (Lie) Une algèbre de Lie résoluble de $gl(V)$ en dimension finie est simultanément trigonalisable.

Autres idées à explorer...

Suites de noyaux itérés, plus d'exemples hors de R et C, en carac finie, sur H..., dimension infinie ? Plus de systèmes linéaires ? Crochets et nilpotence, réduction des nilpotents à la main...

- **Développements.**

⋆ **Théorème de Burnside, [S. Francinou(2008a)]**

⋆ **Théorème de Engel, [Humphreys(1972)]**

⋆ **Surjectivité de l'exponentielle, [S. Francinou(2008a)]**

Références

[Mneimné()] a l'air parfait mais est difficile à exploiter seul. [V. Beck(2005)] contient un paragraphe dessus.

Rapport du jury. C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

Φ

H

Avis. Le très bon comportement de la réduction de ces matrices permet d'obtenir des résultats intéressants. Parler des décompositions et des homéomorphismes classiques entre les matrices géénrales et elles. Les espaces quadratiques définis par de telles matrices sont à exploiter largement. L'alternance entre matrice, forme bilinéaire, forme quadratique est à souligner.

⋆ ⋆ ⋆

1 Matrices symétriques réelles & matrices hermitiennes [Serre(a)]

1.1 Premières propriétés

Dimension, rapport avec les formes, etc.

1.2 Formes quadratiques

2 Réduction [Serre(a)]

2.1 Théorème spectral

2.2 Topologie des matrices symétriques réelles et hermitiennes

3 Analyse effective [Serre(a), Ciarlet()]

3.1 Systèmes linéaires

3.2 Optimisation

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Ellipsoïde de John-Loewner, [Alessandri(1999)]**
  - ⋆ **Homéomorphisme polaire, [R. Mneimné(2009)]**
  - ⋆

Références

[Serre(a)], [Caldero-Germoni(2013)], [R. Mneimné(2009)], etc. [Ciarlet()] pour l'aspect effectif.

Rapport du jury. Il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au coeur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrie, algèbre, topologie, analyse etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

Φ Dans le cadre de la dimension finie, il y a une dualité totale entre un espace et l'ensemble de ses formes linéaires.

H

Avis. Il faut exploiter assez largement la dualité et la dimension finie. Le titre de la leçon ferme un peu la forme aux formes linéaires en dimension infinie : c'est bien malheureux, mais de fait il ne faut pas sombrer dans les théorèmes de séparation, l'analyse fonctionnelle ou les formes différentielles. La géométrie trouve bien sa place.

⋆ ⋆ ⋆

On se place dans un espace vectoriel E.

1 Hyperplans et géométrie [Barvinok(2002), Berger()]

1.1 Hyperplans

Δ On appelle hyperplan le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Θ Les hyperplans sont les espaces de codimension 1. Un hyperplan est en somme directe avec toute droite non incluse dedans.

Θ Un hyperplan $Kerf$ est fermé si, et seulement si, f est continue. Deux formes linéaires définissant le même hyperplan sont colinéaires.

A Tout hyperplan rencontre $GL_n(K)$.

Θ Une intersection de p hyperplans non confondus en dimension n est de dimension $n-p$.

Θ (Évitement) En caractéristique nulle, un espace vectoriel n'est pas réunion finie d'hyperplans.

1.2 Séparation des convexes

Θ (Hahn-Banach)

A Tout convexe est intersection ds demi-espaces le contenant.

1.3 Équations d'hyperplans

Θ Pour tout hyperplan, il existe une forme linéaire f telle que H = [f=0]. De plus, cette forme linéaire est unique à multiplication par un scalaire non nul près.

2 Formes linéaires et dualité, [Nourdin(2001), ?]

2.1 Dualité générale

Δ Une forme linéaire sur E est un élément de $L(E,K)=E^\star$.

E
- ⋆ La trace est une forme linéaire sur $M_n(K)$, et tout forme linéaire sur $M_n(K)$ est de la forme $Tr(A\cdot)$
- ⋆ Si $x\in E$, alors $u\mapsto u(x)$ est une forme linéaire sur $L(E)$
- ⋆ L'application $f\mapsto \int f$ est une forme linéaire sur $C(I)$

Θ $E^\star$ est un espace vectoriel, appelé dual de E.

Δ Le crochet de dualité est la forme bilinéaire canonique $(u,x)\in E^\star\times E\mapsto \langle u,x\rangle = u(x)$.

Δ Si $F\leqslant E$, alors on définit son orthogonal $F^\circ=\{u\in E^\star \mid \forall x\in F, u(x)=0\}$. Si $F'\leqslant E^\star$, on définit son orthogonal par $F'^\perp=\{x\in E \mid \forall u\in E', u(x)=0\}=\bigcap_{F'} Ker(u)$.

Θ Inclusions entre orthogonaux et orthogonaux d'orthogonaux...

2.2 Bases duales

Θ E est isomorphe à $E^\star$. Pour tous sous-espaces $F\leqslant E$ et $F'\leqslant E^\star$, on a $dimF+dimF^\circ=n=dimE'+dimE'^\perp$.

R Cet isomorphisme caractérise la dimension finie.

Θ Si $(e_i)_i$ est une base de E, alors il existe une unique base $(e_i^\star)_i$ de $E^\star$ telle que $e_i^\star e_j = \delta_{ij}$, appelée base duale de e. L'application $e \mapsto e^\star$ est une bijection entre les bases de E et celles de $E^\star$.

E
- ⋆ la base duale de $(X^i)_i$ de $\mathbf{R}_n[X]$ est $(\phi_i : P \mapsto \frac{P^{(i)}(0)}{i!})_i : P = \sum_i \langle \phi_i, P\rangle X^k$
- ⋆ la base antéduale de $(P \mapsto P(x_i))_i$ de $\mathbf{R}_n[X]^\star$ est $(L_i)_i$, ensemble des polynômes interpolateurs de Lagrange en les x_i

Θ Il existe un isomorphisme canonique $J : x \in E \mapsto \langle \cdot, x\rangle \in E^{\star\star}$. C'est une isométrie pour toute norme subordonnée.

2.3 Dualité projective

Θ Si $P(E)$ est un espace projectif de dimension n, $\langle f\rangle \mapsto Ker(f)$ est une bijection de $P(E^\star)$ sur l'ensemble des hyperplans vectoriels de E.

Θ (Pappus) Dans un plan projectif, soient D et D' sont deux droites sécantes en O, et soient A, B, C sont sur D et A', B', C' sur D', tous distincts entre eux et de O. Alors $A'' = (BC') \cap (B'C)$, $B'' = (AC') \cap (A'C)$ et $C'' = (AB') \cap (A'B)$ sont alignés.

2.4 Autre

Autres dualités générales ? Convexité, Farkas-Minkowski, Kuhn-Tucker, etc.

3 Algèbre linéaire et bilinéaire

3.1 Transposition et orthogonalité

Δ La transposée de u est ${}^t u : \phi \in F^\star \mapsto \phi \circ u \in E^\star$.

Θ On a les propriétés suivantes relatives à la transposée :
- ⋆ $rg(u) = rg({}^t u)$
- ⋆ $Im({}^t u) = (Ker(u))^\perp$
- ⋆ $Ker({}^t u) = (Im(u))^\perp$
- ⋆ ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$

Θ On a ${}^t Mat_{e,e'}(u) = Mat_{e'^\star, e^\star}({}^t u)$, en particulier u et ${}^t u$ ont même spectre, même polynôme minimal, même polynôme caractéristique, même rang.

3.2 Réduction d'endomorphismes

Θ Un sous-espace $F \leqslant E$ est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Θ Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé.

Θ (Frobenius) Il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que :

- ⋆ $E = \bigoplus_{i=1}^n K[u](x_i)$
- ⋆ Si $P_i = \pi_{x_i} = \pi_{u,x_i}$, alors $P_i \mid P_{i+1}$ pour tout i

De plus, la suite $(P_i)_i$ est unique, ce sont les invariants de similitude de u.

Θ Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormale.

Θ Toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Ceux de taille 1 sont nuls, ceux de taille 2 sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Θ (Cartan-Diedonné) Tout élément de $O_n(\mathbf{R})$ est produit d'au plus n réflexions.

3.3 Réduction des formes quadratiques

Autres idées à explorer...

DUalité des polytopes Formes quadratiques Hahn-Banach et séparations Extremums liés, Kronecker Dualité de polyèdres Codes correcteurs (symptomes) Lemme de Farkas, simplexe...

- **Développements.**

- ⋆ **Krein-Milman, Birkhoff et application aux transports discrets, [?]**

- ⋆ **Générateurs de SL et GL, [Perrin(1996)]**

- ⋆ **Réduction de Frobenius**

Références

[?] pour la partie élémentaire sur les formes linéaires et des exemples, [Berger()] pour les aspects géométriques, [?] pour la dualité projective.

160. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Rapport du jury. Il faut savoir caractériser correctement les symétries orthogonales et les projections orthogonales en utilisant l'adjoint. Si on présente en développement la réduction des endomorphismes normaux, il convient d'avoir réfléchi à l'unicité de la forme réduite proposée et d'en déduire la réduction des endomorphismes autoadjoints et orthogonaux.

Φ Les endomorphismes étant de cœur de bien des domaines mathématiques, de la théorie des nombres au calcul différentiel, il convient de bien cerner leur étude. Naturellement on essaie de faire ce travail sur des endomorphismes particuliers qui soit sont à la base des endomorphismes généraux, c'est le problème de la réduction, soit sont suffisamment fréquents pour que leur étude mérite de s'y arrêter.

H

Avis. Une leçon malgré tout assez catalogue, sans l'appel usuel aux exemples et applications et avec un titre très restreint : la dimension finie, le cadre euclidien, le caractère remarquable ! Donc chaque cas doit avoir son émergence naturelle à partir des autres, et une fois dedans il faut en dégager les propriétés générales de réduction pour en tirer des conséquences internes à son propre type, puis des décompositions, peut-être quelques applications.

⋆ ⋆ ⋆

E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1 Endomorphismes normaux []

1.1 Adjoint

Δ Pour tout $u \in L(E)$, il existe un unique $u^\star \in L(E)$ tel que $\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$, appelé adjoint de u.

Δ Un endomorphismes est symétrique si $u^\star = u$ et antisymétrique si $u^\star = -u$. On note $S(E)$ et $A(E)$ leurs ensembles respectifs.

Θ On a les propriétés suivantes concernant l'adjonction :

- ⋆ l'adjonction $u \mapsto u^\star$ est une symétrie par rapport à $S(E)$ et parallèlement à $A(E)$
- ⋆ $(uv)^\star = u^\star v^\star$
- ⋆ $Im(u^\star) =^t Ker(u)$ et $Ker(u^\star) =^t Im(u)$
- ⋆ F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par $u^\star$
- ⋆ $Mat(u^\star) =^t Mat(u)$
- ⋆ l'adjonction conserve le rang, le spectre, les invariants de similitude

1.2 Réduction des endomorphismes normaux et antisymétriques

Δ Un endomorphisme u est normal si $u^\star u = uu^\star$.

Θ u est normal si, et seulement si, $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

Θ Un endomorphisme normal est diagonalisable par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2, et dans le cas d'un plan stable ils sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Θ Un endomorphisme antisymétrique est diagonalisable par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Ceux de taille 1 sont nuls, ceux de taille 2 sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

2 Endomorphismes symétriques [Serre(a), Ciarlet()]

Θ $S_n(\mathbf{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbf{R})$.

Θ S_n^+ est un cône convexe fermé de $S_n(\mathbf{R})$. S_n^{++} est dense dans $\mathbf{R}$.

Θ Un endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormale.

Θ (principe du minimax de Courant-Fischer) Si $u \in S(E)$ et si $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ sont des valeurs propres, alors $\lambda_h = \min_{E \in G_h} \max_{x \in S_E} \langle x, f(x)\rangle = \max_{F \in G_{n+1-h}} \min_{x \in S_F} \langle x, f(x)\rangle$.

A (entreelacement de Cauchy)

2.1 Positivité

Δ Si $u \in S(E)$, on définit sa forme bilinéaire associée $\phi_u(x, y) = \langle u(x), y\rangle$, et sa forme quadratique associée $q_u(x) = \phi(x, x)$.

Δ Un endomorphisme symétrique u est dit positif (resp. défini-positif) si sa forme quadratique associée est positive (resp. strictement positive hors de 0), soit $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle \geqslant$ (resp. >0. On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) leur ensemble.

Θ (Schwarz) Si $u \in S^+(E)$, alors $|\phi_u(x,y)| \leqslant q_u(x)q_u(y)$. Si $u \in S^{++}(E)$, alors il y a égalité si, et seulement si, x et y sont positivement liés.

Θ (Minkowski) Si $u \in S^+(E)$, alors $q(x+y) \leqslant q(x) + q(y)$.

Θ L'exponentielle est un difféomorphisme de $S(E)$ dans $S^{++}(E)$.

Critères d'extremum avec les matrices hessiennes ?

Et des trucs sur la relation d'ordre usuel (théorie de Springer ou un truc comme ça, cf. Pompom)

Θ (réduction simultanée) Si $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$, alors il existe P telle que $A =^t PP$ et $B =^t PDP$. En d'autres termes, on peut réduire B dans une base orthonormale pour le produit scalaire associé à A.

Θ (polaire) Toute matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ se met de manière unique sous la forme $A = OS$ avec $O \in O_n$ et $S \in S_n$. De plus, c'est un homéomorphisme.

2.2 Projecteurs et symétries

Θ Il y a équivalence entre :

- ⋆ p est un projecteur orthogonal
- ⋆ p est un projecteur auto-adjoint
- ⋆ $\|p\| \leqslant 1$

Θ Si p et q sont deux projecteurs orthogonaux, il y a équivalence entre :

- ⋆ $pq = qp$
- ⋆ pq est un projecteur

2.3 Analyse numérique

Θ (Choleski) Une matrice $A \in S_n^{++}$ s'écrit de manière unique sous la forme tLL avec L triangulaire inférieure.

3 Endomorphismes orthogonaux [Perrin(1996)]

3.1 Définition

Θ Il y a équivalente entre les conditions suivantes :

- ⋆ u conserve la norme, *i.e.* $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
- ⋆ u conserve 0 et la distance, *i.e.* $u(0) = 0$ et $\forall x, y \in E, \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$
- ⋆ $uu^\star = uu^\star u = id$
- ⋆ u transforme une base orthonormale en une base orthonormale
- ⋆ u transforme toute base orthonormale en une base orthonormale

Δ Si u vérifie ces propriétés, alors u est une isométrie, ou encore un automorphisme orthogonal. On note $O(E)$ leur ensemble.

Quelques propriétés

3.2 Réduction des automorphismes orthogonaux

Θ En dimension 2, les isométries sont les rotations et les composées d'une rotation et d'une réflexion. Plus précisément $SO_2(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, et $O_2^-(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Θ L'application $\theta \in \mathbf{R} \mapsto R_\theta \in SO_2(\mathbf{R})$ est un morphisme de groupes.

Θ Tout endomorphisme orthogonal se diagonale en base orthonormale en une matrice diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Les blocs de taille un sont des (± 1), les blocs de taille 2 sont des R_θ ou des S_θ.

3.3 Le groupe $O_n(\mathbf{R})$

Générateurs, toussa...

3.4 Topologie de $O(E)$

Θ (John-Loewner)

Θ $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbf{R})$.

Θ L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbf{R})$ est $\overline{B}_2$.

Autres idées à explorer...

Iwasawa, Gram

- **Développements.**

⋆

⋆

⋆

Références

Il y a des éléments sur les matrices symétriques dans [Serre(a), Ciarlet()], qui font en plus les aspects numériques.

161. Isométries d'un espace euclidien. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

Rapport du jury. La classification des isométries en dimension 2 ou 3 est exigible ainsi que le théorème de décomposition commutative. En dimension 3 : déplacements (translation, rotations, vissage) ; antidéplacements (symétries planes, symétries glissées, et isométrie négative à point fixe unique).

Φ

H

Avis. Une leçon qui semble appeler à beaucoup de résultats immuables sur le sujet : le catalogue des formes réduites doit être exposé et chaque cas doit montrer des interventions naturelles dans différentes situations. Les propriétés de réduction élémentaires justifient de s'intéresser aux dimensions 2 et 3.

⋆ ⋆ ⋆

1 Isométries affines

Δ Une application $f : E \to E$ est une isométrie si $\forall M, N, f(M)f(N) = MN$.

Θ Les isométries de E sont les applications affines de partie linéaire orthogonale.

E
- ⋆ Les translations sont des isométries
- ⋆ Les homothéties sont des isométries si, et seulement si, elles sont de rapport ± 1.
- ⋆ Les réflexions sont des isométries

Θ (Mazur-Ulam) Si u est une isométrie bijective, alors u est affine.

Θ L'ensemble $Is(E)$ des isométries affines est un groupe pour la composition, non commutatif.

E Deux rotations de centres distincts ne commutent pas.

Θ $Is(E) \cong Esemidirect_0 O(E)$ où θ est l'action naturelle de $O(E)$ sur E.

Groupes des déplacements

2 Classification des isométries

Θ Pour toute isométrie f, il existe une unique $g \in O(E)$ et une unique t_v une translation telles que
- ⋆ g admet au moins un point fixe
- ⋆ $v \in Ker(g - id)$
- ⋆ $f = t_\circ g$

De plus, g et t commutent et $Ker(\vec{f} - id) = Ker(g - id)$.

Δ L'axe de f est l'ensemble des points fixes de g.

Θ L'axe de f est invariant par f.

Θ (Diemsion 2) Les isométries sont classifiées par leur forme réduite :

Matrice réduite	I_2	$R_\theta, \theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$	diag(-1,1)
Points fixes	$\emptyset$	1	Une droite
Type	Translation	Rotation	Réflexion
Axe	E	Le point fixe	Le droite fixe
Décomposition en réflexions	2 d'axes //	2 d'axes non //	une
Écriture complexe			

A Classification des similitudes planes.

Θ (Diemsion 3) Les isométries sont classifiées par leur forme réduite :

Matrice réduite	I_3	$1, R_\theta, \theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$	$-1, R_\theta, \theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$
Points fixes	$\emptyset$	Droite	$\emptyset$
Type	Translation	Rotation	Vissage
Axe	E	D	Une droite
Décomposition en réflexions	2	2	4

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Impossibilité de Banach-Tarski dans le plan, [S. Francinou(2008b)]**
  - ⋆ **Sous-groupes finis de SO(3), [Combes(2003)]**

★ **Groupes de pavages, [Berger()]**

★ **Steiner et Marden**

Références

Toute la leçon est contenue dans [**?**].

162. Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Rapport du jury. Le jury n'attend pas une version à l'ancienne articulée autour du théorème de Rouché-Fontené qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée. La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !). Par exemple les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de GL(n,K) sur Mn(K) donnée par $(P, A) \mapsto PA$. Le candidat doit pourvoir écrire un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué.

Φ La résolution des systèmes linéaires et au coeur de l'algèbre linéaire, celle-ci pouvant d'exprimer et se traiter uniquement en ces termes. Les problèmes physiques qui motivaient les premiers systèmes linéaire ont entièrement éclos de sorte que cette étude est au coeur de l'utilisation moderne des sciences, tous les modèles se discrétisant pour revenir à un traitement de systèmes linéaires.

H

Avis. La leçon mérite une bonne part d'illustrations pratiques, de complexités algorithmiques, de méthodes numériques.

★ ★ ★

1 Résolution des systèmes linéaires [Fresnel(2011)]

1.1 Systèmes linéaires

Δ Un système linéaire de n équations à p inconnues est une équation $Ax = b$, notée (S), où $b \in K^n$, $A \in M_n(K)$ et x est l'inconnue dans K^n. Une solution de ce système est un élément $y \in K^n$ tel que $Ay = b$. L'ensemble des solutions est S.

E ⋆ intersection de deux plans
⋆

Θ S est vide ou est un espace affine de dimension $p - r$, où r est le rang de A, et de direction $Ker(A)$, l'ensemble des solutions du système homogène associé.

A La dimension du commutant de $u \in L(E)$ est supérieure à $dim(E)$.

1.2 Résultats théoriques

Θ (Cramer) Si S est un système linéaire de n équations à n inconnues, si A est inversible, alors le système admet une unique solution et, en notant C_i la i-ième colonne de la matrice A, on a $x_i = \frac{det(C_1,...,C_{i-1},b,C_{i+1},...,C_n)}{det(C_1,...,C_{i-1},C_i,C_{i+1},...,C_n)}$.

Θ (Rouché-Fontené)

2 Algorithme du pivot de Gauss [?, Fresnel(2011)]

Δ A est échelonnée si chaque ligne commence strictement plus de zéros que la précédente jusqu'à stationner à des lignes nulles, *i.e.* si $\forall i < i' \in [\![1, n-1]\!], \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\} < \min\{j \mid a_{i'j} \neq 0\}$.

R Dans ce cas, la résolution de $Ax = b$ est en $O(n^2)$.

Θ Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles.

Δ Les inconnues principales sont celles correspondant aux premier indice non nul de chaque ligne.

Δ Matrices élémentaires

Θ Opérations élémentaires

Θ (pivot de Gauss, ou algorithme de Fang-Cheng) Si $A \in Mnp(K)$, alors il existe un produit P de transpositions et de transvections telle que PA est échelonnée. P est effectivement constructible en $O(n^3)$. On en déduit le rang, l'inverse et le déterminant le cas échant.

A Les transvections engendrent $SL_n(K)$. Les transvections et les dilatations engendrent $GL_n(K)$.

Θ (Berlekammp)

3 Méthodes pratiques de résolution [Serre(a), Ciarlet()]

3.1 Décompositions matricielles

Θ (décomposition LU) Pour toute matrice $A \in GL_n(K)$ de mineurs principaux non nuls, il existe une unique matrice triangulaire inférieure L et une unique matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. L et U sont effectivement constructibles en $O(n^3)$.

Θ Pour toute matrice $A \in GL_n(K)$, il existe une matrice de permutation P telle que $PA = LU$.

A Dans ce cas, la résolution de $Ax = b$ est en $O(n^2)$.

Θ (décomposition de Choleski) $\forall A \in S_n^{++}, \exists! L \in TI_n^+, A =^t LL$. Cette construction est effective en $I(n^3)$.

Θ (décomposition QR) $\forall A \in GL_n(K), \exists!(Q, R) \in O_n \times TS_n^+, A = QR$. Cette construction est effective en $I(n^3)$.

Θ (Hadamard) $\forall A \in M_n(\mathbf{R}), |det(A)| \leqslant \prod \|C_i\|$.

3.2 Méthodes itératives

3.3 Méthodes de gradient

3.4 Approximation aux moindres carrés

Autres idées à explorer...

lemme d'artin ?
facteurs invariants ?

- **Développements.**

  ⋆ **Gradient à pas optimal, [S. Gonnord(1998)]**

  ⋆ **Décomposition LU, [?]**

  ⋆ **Hankel-Bourbaki, [Chenciner()]**

Références

[?, ch. 1] pour la théorie, [?] illustre les choses très bien. Regarder [Serre(a)] et [] pour les aspects effectifs.

170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Rapport du jury. Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur R et ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation ax2+bx+c = 0 et la signature de la forme quadratique ax2+bxy+cy2). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener). L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de R3. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels. Notons que le théorème de ChevalleyWarning ne constitue pas un bon développement dans les leçons sur les formes quadratiques, sa preuve délicate dans le cadre des polynômes homogènes, devient assez triviale en degré 2. il existe des formes quadratiques sur C, contrairement à ce que beaucoup de candidats affirment et il y a une différence entre formes quadratiques sur C et formes hermitiennes ! Il peut être utile de faire le lien, même de manière élémentaire, avec la géométrie (coniques, calcul de tangentes, polaires, étude locale des fonctions etc.). On peut réfléchir aux générateurs des groupes orthogonaux, au groupe SO(4), ou aux groupes SO(p, q).

Φ Une forme quadratique n'est qu'un polynôme homogène de degré 2 en plusieurs variables : la question de la diagonalisabilité est la même que lors de la résolution de l'équation du second degré. Cela permet de traiter toutes les équations de degré 2, quitte à ajouter une variable fixée par la suite à 1.

H Si les coniques sont étudiées très précisément depuis Archimède, il faut attendre les équations coniques apparaissant au XVIIe pour arriver à l'étude des formes quadratiques. Euler travaille sur la réduction des équations quadriques, puis Lagrange obtient la diagonalisabilité des formes quadratiques pour étudier les mouvements d'un corps solide, et Gauss se concentre sur les formes quadratiques entières et Minkowski développera plus avant la géométrie de snombres fondée sur les formes quadratiques. Jacobi et Sylvester, au milieu du XIXe, étudient les propriétés découlant de l'invariance du rang et de la signature.

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

k désigne un corps de caractéristique différente de 2, E un k-espace vectoriel de dimension finie.

1 Formes sur E^2 & orthogonalité [Perrin(1996)]

On veut définir une relation d'orthogonalité, donc on s'intéresse aux bonnes formes qui permettent de définir correctement une telle relation.

1.1 Premières définitions

Δ Une forme sesquilinéaire est une application $f : E \times E \to k$ qui vérifie :
- ⋆ pour tout $y \in E$, $f(\cdot, y)$ est linéaire : $\forall x, x' \in E, \forall \lambda \in k, f(x+\lambda x', y) = f(x, y) + \lambda f(x', y)$
- ⋆ pour tout $x \in E$, $f(x, \cdot)$ est σ-semi-linéaire : $\forall y, y' \in E, \forall \lambda \in k, f(x, y + \lambda y') = f(x, y) + \sigma(\lambda) f(x, y')$

Lorsque $\sigma = id$ on parle de forme bilinéaire.

E
- ⋆ Les produits usuels de fonctions, de nombres, de matrices, etc.
- ⋆ $(x, y) \mapsto \sum x_i y_i$ ou $'x, y) \mapsto xy' + x'y$.
- ⋆ $(f, g) \mapsto \int fg$ ou $(M, N) \mapsto Tr(MN)$.

Δ La matrice de B est $M = (B(e_i, e_j)_{ij}$, établissant une bijection entre B^2 et S_n. On a $Ker(B) = Ker(M)$, *i.e.* B est non dégénérée si, et seulement si, M est inversible.

Θ Les matrices de B sont la classe de congruence d'une matrice de B.

Δ Les applications linaires à droite et à gauche de f sont $\Delta : x \mapsto B(x, \cdot)$ et $\Gamma : y \mapsto B(\cdot, y)$.

Θ Ces deux applications sont transposée l'une de l'autre.

Δ On dit que f est non dégénérée lorsque ses applications partielles sont injectives. Le rang de f est le rang de ses applications partielles. On note $Ker(f) = Ker(\Delta) = \{y \in E \mid \forall x \in E, f(x, y) = 0\}$.

Θ Les formes σ-sesquilinéaires non-dégénérées et telles que $f(x, y) = 0 \iff f(y, x) = 0$ sont les formes bilinéaires symétriques, antisymétriques, et les multiples de formes hermitiennes. On s'intéresse donc désormais à ces formes.

1.2 Orthogonalité

Δ Deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour B si $B(x, y) = 0$, on note alors $x \perp y$. L'orthogonal d'une partie X est $X^\perp = \{x \mid \forall y, B(x, y) = 0\}$.

Θ (du rang) Si $F \leqslant E$, alors $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E) + dim(E^\perp \cap F)$.

Θ Si B est une fbsnd, alors $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$. En particulier, si B est non-dégénérée, alors $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$.

Θ Si $F, G \leqslant E$, alors on a :
- ⋆ $F^{\perp\perp} = F$
- ⋆ $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- ⋆ $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

1.3 Isotropie

Δ Un vecteur $x \neq 0$ est dit isotrope si $f(x, x) = 0$.

Δ Un sous-espace $F \leqslant E$ est isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$, *i.e.* si f_V est dégénérée. Il est totalement isotrope (seti) si $F \subseteq F^\perp$, *i.e.* si f_V est nulle.

Δ L'indice de f est le maximum des dimensions des SETI, noté $\nu(F)$. En particulier $\nu(F) \leqslant \frac{dim(E)}{2}$.

1.4 Classification des formes sesquilinéaires

Δ Une base e est orthogonale pour f si $f(e_i, e_j) = 0$ dès que $\neq j$. Dans une telle base, la matrice de f est $diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Θ Si f est symétrique ou hermitienne, alors f admet une base orthogonale.

Δ Deux formes sesquilinéaires f et f' sont équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $\forall x, y \in E, f'(x, y) = f(u(x), u(y))$. Cela équivaut en termes matriciels à $A' =^t PAP^\sigma$.

Θ Si f et f' sont équivalentes, alors elles ont même rang, même indice, même discriminant.

Θ (Réduction de Gauss) Tout forme quadratique s'écrit comme somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Plus précisément, le résultat est effectif :

Θ Si R est un système de représentants de $k^\star/k^{\star 2}$ dans $k^\star$ si q est une forme quadratique non dégénérée sur E, alors q admet une matrice diagonale dont les coefficients sont dans R. En particulier :

- ⋆ si k est algébriquement clos, toutes les formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes et de matrice identité dans une base adaptée ; $q(x) = \sum_i x_i^2$ et $\nu(q) = E(n/2)$
- ⋆ si $k = \mathbf{R}$, toute forme quadratique est de matrice $diag(I_p, -I_q)$ dans une base convenable ; $q(x) = \sum_{i \leqslant p} x_i^2 - \sum_{i>p} x_i^2$, $\nu(q) = \inf(p, n-p)$ et $s(q) = (p, q)$ catacérise le classe
- ⋆ si $k = \mathbf{F}_q$, si $\alpha \in \mathbf{F}_q^\star \backslash \mathbf{F}_q^\star$, alors il y a deux classes d'équivalences de formes quadratiques non dégénérées, équivalentes à l'identité ou à la dilatation $D(\alpha)$, suivant que le discriminant est ou non un carré

2 Groupes orthogonaux [Perrin(1996)]

2.1 Généralités

Δ Une forme quadratique q est une forme telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique B telle que $q(x) = B(x, x)$. B est appelée la forme polaire associée.

Θ Les formes quadratiques sont en bijection avec les polynômes homogènes de degré 2 via $P \mapsto (x \mapsto P((x_i)_i)$.

Θ Si $car(k) \neq 2$, alors B admet une base orthogonale.

Δ Une isométrie de (E, f) est un automorphisme $u \in GL(E)$ conservant f, *i.e.* vérifiant $\forall x, y \in E, f(u(x), u(y)) = f(x, y)$.

Θ (polarisation) B est entièrement déterminée par la forme quadratique associée. Plus précisément :

- ⋆ si B est symétrique, $f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$
- ⋆ si B est hermitienne, $f(x, y) = \sum_{\omega \in U_4} \omega q(x + \omega y)$

Δ Le discriminant de q est le déterminant de q dans toute base modulo les carrés de $k^\star$.

2.2 Réduction des formes quadratiques

Δ Un plan hyperbolique pour q est un plan tel qu'il existe une base (e_1, e_2) telle que $q(e_1) = q(e_2) = 0$ et $f(e_1, e_2) = 1$. La base est dite hyperbolique et q_P est dite hyperbolique.

Θ Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- ⋆ (P, q) hyperbolique
- ⋆ q non dégénérée et d'indice non nul
- ⋆ $disc(q) = -1$

Θ Tout vecteur isotrope est contenu dans un plan hyperbolique.

Δ Un espace est hyperbolique s'il est somme directe orthogonale de plans hyperboliques.

Θ Si $F_0 = Kerq_F$ et $F_0 \oplus U = F$, pour toute base $(e_i)_i$ de F_0, il existe une famille $(f_i)_i$ telle que $Vect(e_i, f_i)$ soit hyperbolique pour tout i, et qu'ils soient orthogonaux.

Θ Tout SETI est inclus dans un SETIM.

Θ (Witt) Si $F, F' \leqslant E$, alors il y a équivalence entre :

- ⋆ F et F' sont q-isométriques, *i.e.* il existe $u \in O(q)$ tel que $u(F) = F'$
- ⋆ q_F et $q_{F'}$ sont équivalentes
- ⋆ il existe une isométrie $\sigma : F \to F'$ relative à q_F et $q_{F'}$

Θ Toute telle isométrie $\sigma : F \to F'$ relative à q_F et $q_{F'}$ admet un prolongement...

Θ (Cartan-Dieudonné) En dimension n, $O(q)$ est engendré par au plus n réflexions.

2.3 En petites dimensions

Θ (dimension 2)

Θ (dimension 3)

Classification des coniques

Autres idées à explorer...
De la géométrie projective, cf. coniques métriques, affines, projectives

- **Développements.**
  - ⋆ **Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques, [Caldero-Germoni(2013), p. 182]**
  - ⋆ **Ellipsoïde de John-Loewner, [Alessandri(1999)]**
  - ⋆ **Lemme de Morse, [Rouvière(2009)]**

Références
[de Seguin-Pazzis()] est foisonnant d'idées et de résultats, d'illustration, et fait à lui seul une leçon sûrement complète et variée, bien équilibrée, avec du choix pour les directions à prendre. On peut aussi regarder les plus élémentaires [**?**], [Perrin(1996)] qui suffisent également à une leçon de base, ou alors le grand [**?**]. [Hindry(2008)] présente des applications aux coniques. [**?**] pour les coniques.
[Caldero-Germoni(2013)] contient des développements et des points de vue originaux.

Rapport du jury. la preuve de la loi d'inertie de Sylvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature dune forme quadratique réelle. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

Φ Une forme quadratique n'est qu'un polynôme homogène de degré 2 en plusieurs variables : la question de la diagonalisabilité est la même que lors de la résolution de l'équation du second degré. Cela permet de traiter toutes les équations de degré 2, quitte à ajouter une variable fixée par la suite à 1.

H Si les coniques sont étudiées très précisément depuis Archimède, il faut attendre les équations coniques apparaissant au XVIIe pour arriver à l'étude des formes quadratiques. Euler travaille sur la réduction des équations quadriques, puis Lagrange obtient la diagonalisabilité des formes quadratiques pour étudier les mouvements d'un corps solide, et Gauss se concentre sur les formes quadratiques entières et Minkowski développera plus avant la géométrie de snombres fondée sur les formes quadratiques. Jacobi et Sylvester, au milieu du XIXe, étudient les propriétés découlant de l'invariance du rang et de la signature.

Avis. Insister sur les nombreuses informations supplémentaires que l'on a en étant sur **R** et non plus sur un corps quelconque. La classification est bien connue et moins triviale que sur **C**, et permet notamment d'obtenir des résultats sur les coniques.

⋆ ⋆ ⋆

1 Formes quadratiques réelles

1.1 Premières définitions

Δ Une forme quadratique est une application $q : E \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique ϕ, appelée forme polaire de q, vérifiant $q(x) = \phi(x, x)$. Leur ensemble est noté $Q(E)$.

E
- ⋆ la norme euclidienne $\|x\|_2 = \sum_i x_i^2$
- ⋆ la forme de Lorentz $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$

Θ Les formes quadratiques sont les polynômes homogènes de degré 2, une base étant fixée.

Θ Toute forme quadratique admet une unique forme polaire, donnée par $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$.

Δ Le noyau d'une forme quadratique q est $Ker(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$. Une forme quadratique est non dégénérée si son noyau est trivial.

Θ Si q est non dégénérée, alors pour tout sous-espace F de E, on a $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$.

Θ Si on note $A = (\phi(e_i, e_j))_{i,j}$, alors $q(x) =^t XAX$. Ceci donne un isomorphisme entre $Q(E)$ et $S_n(\mathbf{R})$. A est appelée la matrice de Q.

1.2 Réduction des formes quadratiques réelles

Θ (algorithme de Gauss) Si $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ est une forme quadratique sur E, alors q est somme de carrés de formes linéaires indépendantes, et on a un algorithme effectif :
- ⋆ soit il existe un $a_{ii} \neq 0$, disons a_{11}, et alors on écrit $q(x) = a_{11}x_1^2 + 2x_1u(x_2, \ldots, x_n) + v(x_2, \ldots, x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{u}{a_{11}}\right)^2 + \left(v - \frac{u^2}{a_{11}}\right)$
- ⋆ soit il existe un $a_{ij} \neq 0, i \neq j$, disons a_{12}, et alors on écrit $q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1u(x_3, \ldots, x_n) + x_2v(x_3, \ldots, x_n) + w(x_3, \ldots, x_n) = \frac{a_{12}}{4}\left(\left(x_1 + x_2 + \frac{u+v}{a_{12}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 - \frac{u-v}{a_{12}}\right)^2\right) + \left(w - \frac{uv}{a_{12}}\right)$

Θ (Sylvester) Dans une certaine base, il existe $(r, s) \in \mathbf{N}^2$ tels que $q(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2$. Ce couple est unique et est appelé la signature de q, il détermine les classes d'équivalence de formes quadratiques. r (resp $s - r$) est la dimension maximale des sous-espaces sur lesqels q est définie-positive (resp. négative).

Δ L'indice ν de q est le maximum des dimensions des sous-espaces totalement isotropes, *i.e.* sur lesquels q est nulle.

Θ On a toujours $\nu \leqslant \frac{n}{2}$. Si la signature de q est (r, s), alors $\nu = \min(r, s - r)$ et tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux ont cette dimension.

1.3 Classification des quadriques [Audin(2006)]

2 Formes quadratiques positives

2.1 Premières propriétés

Δ Une forme quadratique q est dite positive (resp. définie-positive) si $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle \geqslant$ (resp. > 0). On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) leur ensemble.

Θ (Schwarz) Si $u \in S^+(E)$, alors $|\phi_u(x,y)| \leqslant q_u(x)q_u(y)$. Si $u \in S^{++}(E)$, alors il y a égalité si, et seulement si, x et y sont positivement liés.

Θ (Minkowski) Si $u \in S^+(E)$, alors $q(x+y) \leqslant q(x) + q(y)$.

Θ L'exponentielle est un difféomorphisme de $S(E)$ dans $S^{++}(E)$.

Θ (réduction simultanée) Si $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$, alors il existe P telle que $A =^t PP$ et $B =^t PDP$. En d'autres termes, on peut réduire B dans une base orthonormale pour le produit scalaire associé à A.

Θ (polaire) Toute matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ se met de manière unique sous la forme $A = OS$ avec $O \in O_n$ et $S \in S_n$. De plus, c'est un homéomorphisme.

2.2 Les groupes orthogonaux

Dévissage de $O(p,q)$, etc.

3 Formes quadratiques en calcul différentiel

3.1 Forme quadratique hessienne

Δ Pour une fonction deux fois différentiable f, le hessien est $d^2 f$. La matrice hessienne de f est $Hf_{(h,k)}$.

Θ (Schwartz) Si f est de classe $C^k, k \geqslant 2$, alors les opérateurs de dérivation partielles commutent, *i.e.* la forme quadratique hessienne est symétrique.

Θ (formule de Taylor) Si f est une application de classe C^{n+1} sur un ouvert U et si $[a, a+h] \subseteq U$, alors on a $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f_a(h)^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f_{a+th}(h)^{n+1} dt$.

Δ Un point critique est un point où la différentielle est de rang non maximal : $rg(df_x) < p$. Un point qui n'est pas critique est dit régulier. L'image d'un point critique (resp. régulier) est une valeur critique (resp.) régulière).

Θ Si f est différentiable en un point x de U qui est un extremum, alors c'est un point critique.

Θ Soit f est deux fois différentiable en x, alors :
- ⋆ si x est un minimum (resp. maximum) local de f, alors Hf_x est positive (resp. négative)
- ⋆ si Hf_x est définie positive (resp. négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) local en x.

Θ (régression linéaire)

Θ (lemme de Morse) Soit f de classe C^3 sur un ouvert U contenant 0. Si $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe un C^1-difféomorphisme ϕ entre deux voisinages de 0, tel que $\phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \phi_1^2(x) + \cdots + \phi_p^2(x) - \phi_{p+1}^2(x) - \cdots - \phi_n^2(x)$.

3.2 Optimisation convexe

3.3 Surfaces et formes fondamentales

Autres idées à explorer...
Lemme de Hankel

- **Développements.**

⋆ **Ellipsoïdes de John-Loewner & sous-groupes compacts de $O(q)$, [Alessandri(1999)]**

⋆

⋆

Références

[?] pour la base, mais aussi [Perrin(1996)]. [de Seguin-Pazzis()] est foisonnant d'idées et de résultats. [?] pour les coniques. [Caldero-Germoni(2013)] contient des développements et des points de vue originaux.

Jeter un oeil au cours de Nekovar :
http ://www.math.jussieu.fr/ mpg/lm223/LM223-cours-Nekovar.pdf

Rapport du jury. La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines,métriques ou projectives.

Φ La richesse des coniques et des nombreux points de vue qui y ont été attachés depuis l'Antiquité ont permis d'en dégager de nombreuses propriétés, chacune tirant profit de l'un des points de vue.

H

Avis. Les coniques sont étudiées depuis les mathématiques grecques et trouvent de nombreux points de vues et de nombreuses applications, notamment en physique, qu'il convient de ne pas oublier.

⋆ ⋆ ⋆

1 Coniques euclidiennes

1.1 Sections de cône

1.2 Définition monofocale

1.3 Définition bifocale

2 Coniques analytiques

2.1 Équation cartésienne réduite

2.2 Réduction des coniques

2.3 Lois de Kepler

3 Coniques projectives

Autres idées à explorer...

Pell-Fermat et autres géométries algébriques, par exemple dans le Hellegouarch Beaucoup de physique Perspective conique Théorème de Dandelin Point de Frégier Passage par 5 points Billard elliptiques (Tabachnikov, Testard ?) Pascal

- **Développements.**
  - ⋆ **Steiner et Marden**
  - ⋆ **Gauss-Wantzel-Videla, [Carrega(1981)]**

Références

[?] est bien. [?] contient du matériel intéressant.

181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Rapport du jury. On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables).

Φ

H

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

Parler (? ? ?) de corps finis !

1 Barycentres

2 Convexité

Δ Un espace X est convexe si $\forall x, y \in X, [x, y] \subseteq X$, *i.e.* $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

E
- ⋆ Les espaces affines sont convexes
- ⋆ Les intervalles de **R** sont les intervalles
- ⋆ Les boules d'un espace normé sont convexes

Θ Une intersection de convexes est convexe.

Δ L'enveloppe convexe de X est le plus petit convexe contenant X, *i.e.* c'est l'intersection des convexes contenant X.

Θ L'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs normalisés de points de X.

Θ (Carathéodory) En dimension n, l'enveloppe convexe est également l'ensemble des coefficients de $n + 1$ points de X à coefficients positifs normalisés.

Θ L'enveloppe convexe d'un compact est compact.

Δ Jauge d'un convexe

Θ Les boules de semi-normes sont convexes, et réciproquement les parties compactes convexes symétriques par rapport à 0 et voisinage de 0 sont des boules pourla semi-norme définie par la jauge.

2.1 Topologie et convexité

Θ Classification des convexes à homéomorphisme près

2.2 Points extrémaux et séparation de convexes

Θ Si X est convexe, alors il en va de même pour son adhérence et son intérieur.

Θ Si X est compact, alors X est l'enveloppe convexe de sa frontière.

Δ Hyperplan séparant deux parties au sens strict et au sens large

Θ (Hahn-Banach) Si A et B sont des convexes non vides, alors il existe un hyerplan séparant A et B. Si A est compact convexe non vide et B est fermé convexe non vide, alors il existe un hyperplan séparant strictelemnt A et B.

Δ Un hyperplan d'appui de X en x est un hyperplan tel que $x \in H$ et X d'un côté de H.

Θ Tout convexe fermé admet des hyperplans d'appui en tout point de sa frontière. Réciproquement, si un ensemble X a unhyperplan d'appui en tout point de sa frontière, alors X est convexe.

Θ Un convexe X est égal à l'intersection des demi-espaces le contenant.

Θ (Jung) Si X est un compact de E, il existe une unique boule fermée de E de rayon minimal contenant X. Si x est son centre et r son rayon, on a de plus $x \in Conv(X \cap S(n, r))$ et $r \leqslant \sqrt{d/(2(d + 1))}$.

Θ (Krein-Milman) Un convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Θ (Helly)

Θ (Krasnosel'skii)

2.3 Projection sur un convexe

Θ Pour tout convexe X, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in X$ qui minimise la distance de x à $z \in X$: on l'appelle le projeté de x sur X. Cette projection est 1-lipschitzienne et caractérisée par $\forall z \in X, \langle y - x, y - z\langle < 0$.

Θ (Motzkin) Si X est un ensemble non vide tel que pour tout $x \in E$ il existe un unique $y \in X$ tel que $d(x, y) = d(x, X)$, alors X est convexe.

2.4 Points fixes

Θ Une application continue/d'exposant fini (?) sur les convexes compacts admet un point fixe.

Autres idées à explorer...

Plus de géométrie affine, points fixes, points de Gergone
Parler de réseaux, théorème de Minkowski
Programmation convexe : Farkas-Minkowski, cônes tangents, conditions de Kuhn-Tucker, cf. [Ciarlet(), ch. 9]
Des contre-exemples d'enveloppes convexes de compacts ou de denses non fermées ou denses...

- **Développements.**

★ **Théorème de Hurewicz, [Queffélec(2012), p. 184]**

Références

[Barvinok(2002)] ou [Berger()] sont très bien pour la partie convexité. Plus d'exploitataion, géométrique notamment, des barycentres dans [**?**].

Rapport du jury. Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée.

Φ

H

Avis.

★ ★ ★

1 Géométrie analytique complexe [?]

1.1 Le plan complexe [Couturat(1973)]

Δ On définit $\mathbf{C}$ comme $\mathbf{R}^2$ étant muni des opérations représentant de manière rationnelle les opérations usuelles sur les vecteurs, représentés par les points A du plan tels que $\vec{u} = \vec{OA}$, à savoir :

- ⋆ $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- ⋆ $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$
- ⋆ $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

Θ $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2, de base $(1, i)$. En particulier on a un isomorphimse $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbf{C}$ qui à un point du plan associe son affixe, et réciproquement $z \in \mathbf{C} \mapsto (\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i})$, que l'on condond dorénavant.

Θ (D'Alembert-Gauss) $\mathbf{C}$ est un corps algébriquement clos.

1.2 Premières manipulations de l'identification

Δ La conjugaison est définie par $z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy$.

Θ $\mathbf{C}$ est muni d'une structure de plan vectoriel euclidien grâce à :

- ⋆ $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
- ⋆ $\langle z, z' \rangle Re(\overline{z}z')$
- ⋆ $det(z, z') = [z, z']$

Δ Barycentre

Θ Le barycentre d'une famille de points est le point d'affiche le barycentre des affiches de chaque point.

Θ (Gauss-Lucas) Si $P \in \mathbf{C}[X]$, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Θ (Steiner) Si A, B, C sont trois points distincts et $P = (X - a)(X - b)(X - c)$, alors les racines de P' sont les foyers d'une ellipse inscrite dans le triangle ABC et tangente aux trois côtés en leurs milieux.

1.3 Équations et objets géométriques classiques

Θ Les objets classiques de la géométrie admettent les équations générales suivantes :

- ⋆ $\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$ pour les droites
- ⋆ $\overline{z}z + \overline{\lambda}z + \lambda\overline{z} = \mu$ pour les cercles
- ⋆ $Az\overline{z} + \overline{b}z^2 + B\overline{z}^2 + \overline{C}z + c\overline{z} + d = 0$ pour les coniques

1.4 Applications géométriques

Θ L'aire d'un triangle $A(a)B(b)C(c)$ est $\frac{1}{4i}((a - b)\overline{c} + (b - c)\overline{a} + (c - a)\overline{b})$.

2 Angles [?]

2.1 Exponentielle complexe

2.2 Le groupe U

Δ L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbf{U}$.

Θ $\mathbf{U}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{C}^\star$, noyau du morphisme $z \mapsto |z|$.

Θ $\mathbf{U}$ est le plus grand sous-groupe borné de $\mathbf{C}^\star$, et $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}_+ \times \mathbf{U}$.

Θ $\mathbf{U}$ est un connexe compact.

2.3 L'exponentielle complexe

Δ L'exponentielle est définie sur $\mathbf{C}$ par $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, série entière qui a un rayon de convergence infini.

Θ L'exponentielle est un morphisme surjectif de $(\mathbf{C}, +)$ dans $(\mathbf{C}^\star, \times)$.

Θ L'application $F : t \in (\mathbf{R}, +) \mapsto e^{it} \in (\mathbf{U}, \times)$ est un morphisme surjectif mais non injectif, On note π le réel positif tel que $Ker(f) = 2\pi\mathbf{Z}$. En particulier $\exp(i\mathbf{R}) = \mathbf{U}$ et $\mathbf{U} \cong \mathbf{R}/2i\pi\mathbf{Z}$.

A Tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique sous forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Θ Tout morphisme continu de $(\mathbf{R}, +)$ dans $\mathbf{U}, \times)$ est de la forme $t \mapsto e^{i\theta t}$.

2.4 Angles et rotations

Δ La détermination principale d'un complexe z est l'unique réel $\theta \in] - \pi, \pi]$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$.

Δ $SO_2(\mathbf{R})$ est l'ensemble des isométries positives du plan.

Θ $e^{i\theta} \in (\mathbf{U}, \times) \mapsto R_\theta \in SO_2(\mathbf{R})$ est un isomorphisme topologique de groupes. En particulier, $SO_2(\mathbf{R})$ est commutatif et connexe.

Δ On définit sur les couples de vecteurs (u, v) la relation $(u, v)R(u', v')$ s'il existe $R_\theta \in SO_2(\mathbf{R})$ telle que $u' = R_\theta u$ et $v' = R_\theta v$. La classe d'équivalence de (u, v) est appelé l'angle orienté entre les vecteurs u et v.

Θ Si on oriente E, ...

Δ Cet angle θ est appelé mesure de l'angle orienté entre u et v.

3 Transformations [?]

3.1 Isométries et similitudes

Δ Le groupe des similitudes directes du plan est le groupe engendré par les translations et les rotations, *i.e.* les transformations de la forme $z \mapsto az + b$, $b \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{U}$.

Θ Les isométries directes du plan sont les similitudes directes avec $a \in \mathbf{U}$, elles conservent les angles orientés.

Θ Le groupe des isométries est engendré par les isométries directes et la conjugaison, *i.e.* constitué des $z \mapsto az + b$ et des $z \mapsto a\overline{z} + b$, $b \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{U}$. Elles sont classifiées en quatre types :

- ⋆ les translations $z \mapsto z + b$ pour $b \in \mathbf{C}$
- ⋆ les rotations $z \mapsto az + b$ pour $a \in \mathbf{U}, a \neq 1$
- ⋆ les réflexions $z \mapsto a\overline{z} + b$ pour $a \in \mathbf{U}, a\overline{b} + b = 0$
- ⋆ les symétries glissées $z \mapsto a\overline{z} + b$ pour $a \in \mathbf{U}, a\overline{b} + b \neq 0$

Θ Une similitude avec $a \notin \mathbf{U}$ admet un unique point fixe.

Θ Propriétés des similitudes

3.2 Homographies

Δ Une homographie est une application de la forme $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbf{C}^4$ et $ad - bc \neq 0$, prolongée sur la sphère de Riemann par $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Θ Les homographies sont en bijection avec $PGL_2(\mathbf{C})$ via ..., et cette bijection est un isomorphisme de groupes.

Θ Deux homographies coïncidant en trois points sont égales.

Θ Les homographies stabilisant le cercle unité sont de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$.

Involutions de Frégier, théorème de Pascal

3.3 Inversions

Autres idées à explorer...

Ouvrir sur les quaternions
Division harmonique
Courbes en complexe et propriétés, polaires, cf. LFA t.3, laville, etc.

Références

[?] pour l'essentiel du plan, [Couturat(1973)] pour la justification philosophique rationnelle de la construction proposée de **C**. Jeter un oeil au [?] qui contient du matériel intéressant et originalement présenté.

- **Développements.**

  ⋆ **Steiner et Marden, [Caldero-Germoni(2013)] pour l'ellipse**

  ⋆ **Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, [Alessandri(1999)]**

  ⋆ **Six birapports ou n'importe quel truc projectif, [?] ou [Audin(2006)]**

Rapport du jury. C'est une leçon transversale et difficile qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. On ne peut prétendre avoir une bonne note si elle n'est pas préparée.

Φ L'espace est la condition et le fondement de toute connaissance (Kant, 1781), il importe donc de l'étudier. Cette étude ne doit pas être axiomatique mais interne, seul le mouvement permet de comprendre l'espace (Poincaré 1902, Piaget 1937). C'est le fondement du programme d'Erlangen (Klein, 1872) : ce sont les mouvements qui déterminent la géométrie de l'espace : structure (Sylow), incertitude (Galois), etc.

H

Avis. C'est une leçon qui mérite des illustrations variées, géométriques notamment. Souligner le caractère très universel de la notion de mouvement dans une structure et d'action de groupe. L'esprit doit vraiment être celui du programme d'Erlangen, et la structure est ici celle de la généralisation croissante par l'affaiblissement des groupes agissant, pour enfin arriver à la géométrie projective, qui englobe toutes les autres. Les parties sont organisées comme : action, invariants et caractérisations -> propriétés du groupe agissant -> propriétés de l'espace.

⋆ ⋆ ⋆

E est un **R**-espace vctoriel.

1 Le programme d'Erlangen et l'unification des géométries

La géométrie est l'étude des objets invariants sous certaines transformations, *i.e.* de propriétés invariantes sous l'action d'un groupe, qui décrit la géométrie.

2 Géométrie euclidienne [Perrin(1996), Alessandri(1999)]

2.1 Structure euclidienne

Δ Le groupe orthogonal est le groupe $O_n(\mathbf{R})$ des isométries, *i.e.* des applications linéaires telles que $\|f(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$.

Angles et distances

2.2 Groupe des isométries

Θ Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

Θ Les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

2.3 Propriétés métriques euclidiennes

Θ (parties dédoublables) et Banach-Tarski

Θ (John-Loewner) Si K est un compact convexe d'intérieur non vide, alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

Δ Les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$ sont conjugués à un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$. En particulier les sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbf{R})$ sont les conjugués des groupes orthogonaux.

Pavages, réseaux, frises Polyèdres

3 Géométrie affine [?, Audin(2006)]

3.1 Structure affine

Θ (fondamental)

3.2 Applications

Θ (tiers)

Θ (ellipse de Steiner)

Θ (alternative de Steiner)

3.3 Géométrie linéaire

Représentations linéaires

4 Géométrie projective [?, Audin(2006)]

4.1 Projectivation

Δ Le birapport de quatre points est...

Θ (fondamental)

Θ (six birapports)

4.2 Applications

Θ (Pappus)

Θ (Desargues)

5 « Projective geometry is all geometry » [Sossinsky(2012)]

5.1 Le demi-plan de Poincaré

Δ Le demi-plan de Poincaré est $H = \{z \in \mathbf{C} \mid Im(z) > 0\}$.

Θ Le groupe $PSL_2(\mathbf{Z})$ agit transitivement sur H.

5.2 La généralité de la géométrie projective

- **Développements.**

  ⋆ **Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, [Alessandri(1999)]**

  ⋆ **Steriner et Marden, [Caldero-Germoni(2013)]**

  ⋆

Références

La philosophie de la géométrie par les groupes est celle de [?]. [Sossinsky(2012)] est parfait dans l'esprit pour cette leçon. [Alessandri(1999)] est excellent pour la partie linéaire et euclidienne. Puis [?] et [Audin(2006)] pour la géométrie affine. [?] pour la géométrie projective. Plein de matériel avec le bon point de vue dans [Caldero-Germoni(2013)].

Rapport du jury. L'utilisation de séries est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux et simplifie bien souvent les problèmes de convergence. On peut aussi dénombrer les classes de similitude d'endomorphisme nilpotents dans Mat (n,C) ou le nombre de sous-espace stables d'un endomorphisme cyclique ou les sous-groupes d'un groupe abélien, voire des cardinaux d'ensembles de matrices nilpotentes. La partie élémentaire de cette leçon ne doit pas être oubliée. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités ! Il est essentiel que des méthodes soient dégagées et illustrées : principe de récurrence, principe d'inclusion-exclusion, principe des bergers, le tout est la somme des parties, utilisation de séries entières, etc. Chaque méthode doit être illustrée par des exemples. Cette leçon a été choisie un grand nombre de fois, mais a souvent laissé le jury sur sa faim. Notamment le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer le nombre d'applications strictement croissantes de p dans n, le nombre de surjections entre deux ensembles finis etc.

Φ Le nombre apparaissant comme la structure abstraite la plus primitive de l'esprit, la plus familière également, il est naturel de chercher à saisir l'étendue d'un domaine, d'un problème, d'un objet en en condensant la complexité en un nombre : c'est tout l'enjeu de la combinatoire, quasiment omniprésente dans les problèmes mathématiques, les domaines les plus continus allant jusqu'à se discrétiser pour saisir des informations pertinentes à travers la combinatoire, ainsi la topologie algébrique, etc.

H [Abdeljaouad(2003)] Les problèmes de dénombrement sont apparus dans de nombreuses civilisations à des périodes différentes, ainsi notamment les diagrammes de séparations entre le Yin et le Yang apparaissent fréquemment en Chine dès le début du troisième millénaire avant notre ère, ou plus récemment Xénocrate et Plutarque s'intéressent à de tels problèmes. [Rashed(2011)] L'école arabe médiévale développe de nombreuses méthodes de combinatoires pour servir les mathématiques mais en en développant la théorie pour elle-même, notamment Al-Khalil compose un dictionnaire en étudiant les permutations possibles de lettres, et peu après le premier traité de combinatoire nait sous la plume d'Al-Halubi. L'intérêt pour la combinatoire et le dénombreent explose avec l'étude des jeux de hasard, motivés par le chevalier de Méré et étudiés par Fermat et Pascal, et trouvant de nombreuses applications modernes en théorie des jeux combinatoires et en informatique.

Avis. C'est une leçon qui traîte d'un thème immensément vaste, et il faut montrer la prolifération des méthodes tout comme des domaines d'applications, sans se limiter à la petite combinatoire taupinale !

⋆ ⋆ ⋆

Δ Le cardinal d'un ensemble est sa classe d'équipotence. Un ensemble est dit fini s'il est équipotent à un $[\![1,n]\!]$, on dit alors que son cardinal est n.

1 Ensembles & applications

1.1 Manipulations ensemblistes

On considère des ensembles E et F de cardinaux n et m, et E_i de cardinal n_i.

Θ Si deux ensembles sont en bijection, alors ils ont même cardinal.

A Il y a autant de sous-ensemble de cardinal pair que de cardinal impair, autant de matrices symétriques qu'antisymétriques, autant de permutations paires qu'impaires.

A Le nombre de carrés non nuls de $\mathbf{F}_q$, $q \neq 2$, est $|\mathbf{F}_q^{\star 2}| = \frac{q-1}{2}$.

Θ Si $(A_i)_i$ sont des ensembles disjoints, $|\bigcup A_i| = \sum_i |A_i|$. En particulier si $A \subseteq \Omega$, alors $|^{C}A| = |\Omega| - |A|$.

A Si on jette trois dés équilibrés, la probabilité d'obtenir au moins un as est de $1 - \frac{5^3}{6^3}$.

A (probabilités totales) Si $(A_i)_i$ est une partition de Ω, alors $P(A) = \sum_i P(A \cap A_i)$.

A (Lagrange) Si H est un sous-groupe de G, alors $|H| \mid |G|$.

A (formule des classes) Si X et G sont finis, $|X| = \sum |Gx| = |G| \sum \frac{1}{|G_x|}$.

Θ (quatre cardinaux) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Θ (formule du crible) $|\bigcup_i A_i| = \sum_k (-1)^k |\bigcup_{|I|=k} A_i|$.

Θ La probabilité que deux entiers aléatoires de $[\![1,n]\!]$ soient premiers entre eux est $r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E(n/d)^2$, et tend vers $\frac{6}{\pi^2}$.

Θ $|\prod_i A_i| = \prod_i |A_i|$.

A On a les cardinaux :

- ⋆ $GL_n(\mathbf{F}_q) = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$
- ⋆ $SL_n(\mathbf{F}_q) = GL_n(\mathbf{F}_q)/(q-1)$

1.2 Applications entre ensembles

Θ Le nombre d'applications de A dans B est m^n.

A Le nombre de parties de A est 2^n.

Θ Le nombre de bijections de A est $n!$.

Θ Le nombre d'applications injectives de A dans B est $\prod_{i=0}^{n-1}(m_i)$.

Θ Le nombre d'applications strictement croissantes de A dans B est $\binom{m}{n}$.

Θ Le nombre d'applications croissantes de A dans B est $\binom{n+m-1}{m-1}$.

A Le nombre de monômes homogènes de degré d est $\binom{d-1}{n+d-1}$.

A Le nombre de classes de conjugaisons dans $\mathfrak{S}_n$ est $\binom{d-1}{n+d-1}$.

Θ Le nombre de surjections de A dans B est $s_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$.

Θ Si $n = m$, il y a équivalence entre application injective, surjective et bijective.

A On a les isomorphismes :

- ★ $GL_2(\mathbf{F}_2) = SL_2(\mathbf{F}_2) = PSL_2(\mathbf{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$
- ★ $PGL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$, $PSL_2(\mathbf{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$
- ★ $PGL_2(\mathbf{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$
- ★ $PGL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5$, $PSL_2(\mathbf{F}_5) \cong \mathfrak{A}_5$

1.3 Combinaisons & modèles de base

Δ Le nombre de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ à k éléments est la combinaison $\binom{n}{k}$

Θ On a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$.

A Le nombre de 3-cycles dans S_n est $\frac{1}{3}\binom{3}{n}$.

Θ Les principales propriétés des coefficients binomiaux sont :

- ★ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- ★ $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (Pascal)
- ★ $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
- ★ $(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Δ Le nombre de multi-ensembles à k éléments parmi n est l'arrangement A_n^k.

Θ On a $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

A (paradoxe des anniversaires) la probabilité que deux élèves parmi n aient leur anniversaire le même jour est de $1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$.

Θ Il y a $\binom{n+p-1}{p}$ combinaisons avec répétitions.

Θ Le nombre de dérangement, *i.e.* de permutations sans points fixes, est $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

R On cherche alors à mettre les ensembles quelconques en relation avec ces ensembles bien connus.

2 Méthodes combinatoires usuelles

2.1 Principe des tiroirs

Θ Si $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ avec $n > m$, alors f n'est pas injective. Autrement dit si on met plus de n chaussettes dans n tiroirs, au moins un tiroir contient plusieurs chaussettes.

A Parmi $n+1$ entiers de $[\![1, 2n]\!]$, il y a en a toujours deux dont un est multiple de l'autre.

A (approximation rationnelle) Il existe $d > 0$ tel que $|a - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{d}{q^2}$ pour une infinité de rationnels.

A Théorie des nombres du Bourgade

A (Kronecker) Un polynôme sur $\mathbf{Q}$ non constant et unitaire dont toutes les racines sont de modules supérieures à 1 est cyclotomique.

2.2 Double décompte

Θ (double décompte) Si $S \subseteq A \times B$, alors si $B_a = |\{b \in B \mid (a,b) \in S\}|$ et $A_b = |\{a \in A \mid (a,b) \in S\}|$, alors $|S| = \sum_a B_a = \sum_b A_b$.

A (Cayley) Il y a n^{n-2} arbres étiquettés à n sommets.

Θ (poignées de mains) Si $G = (V, E)$ est un graphe, alors $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$.

Θ (lemme de Sperner) Si ABC est un vrai triangle triangulé par $(T_i)_i$, et si les sommets des T_i sont coloriés par trois couleurs de sorte que A, B, C aient des couleurs distinctes et les couleurs des points situés sur un côté de ABC sont parmi celles de ses extrémités, alors le nombre de T_i tricolores est impair.

A (Brouwer) Si T est un triangle non aplati et $f : T \to T$ est une application continue, alors il existe $a \in T$ tel que $f(a) = a$.

2.3 Récurrences

R On cherche à ramener une situation combinatoire à celles d'ordres inférieurs.

2.4 Séries génératrices

Δ La série génératrice de la suite $(u_n)_n$ est la série formelle $\sum u_n x^n$.

Δ Le nombre de Catalan C_n est le nombre d'arbres binaires à n sommets.

Θ La suite $(C_n)_n$ vérifie la récurrence $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

Θ La série génératrice f des nombres de Catalan est $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Θ (Catalan) On a $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{n}{2n}$.

Θ (Bell) Si B_n désigne le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, alors $B_n = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

3 Méthodes plus particulières

3.1 Actions de groupes et formules de Burnside

Θ (formule de Burnside) Le nombre d'orbites de $G \curvearrowright X$ est $g = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |fix(g)|$ où $fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$.

A Si l'action est transitive et $|X| > 1$, il existe un g sans point fixe.

A Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbf{R})$ sont de type $\mathbf{Z}/n$, D_n, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5.

Δ Un coloriage est l'orbite de X sous l'action d'un $G \leqslant \mathfrak{S}(X)$ (les symétries).

Δ On définit l'indice d'une permutation τ par $ind(\tau) = \prod x_i^{e_i(\tau)}$ où $e_i(\tau)$ est le nombre de i-cycles dans τ.

Θ Le nombre de (q, G) coloriages de X est $\frac{1}{|G|}\sum ind(g) = P_G(x_1, \ldots, x_n)$

Θ (Théorème de Polya) Si $G \leqslant \mathfrak{S}_n$, $|X| = n$, $|C| = q$ et $\sigma_i = \sum c_j^i$, alors le nombre de (q, G)-coloriages de X avec f_r éléments de couleur c_r est le coefficient de $\prod c_i^{f_i}$ dans $P_G(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

A Coloriages de polyèdres

3.2 Fonctions multiplicatives & inversion de Möbius

Δ Une fonction $f : \mathbf{N}^\star \to \mathbf{C}$ est multiplicative si $n \wedge m = 1$ implique $f(nm) = f(n)f(m)$.

Δ L'indicatrice d'Euler est définie par $\phi(n) : |\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\}|$.

Θ La fonction d'Euler vérifie les propriétés suivantes :
- ⋆ ϕ est multiplicative
- ⋆ $\phi(n) = |(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\star|$
- ⋆ $n = \sum_{d|n} \phi(d)$

Δ La fonction de Möbius μ est définie par :
- ⋆ $\mu(1) = 1$
- ⋆ $\mu(n) = 0$ si n admet un facteur carré
- ⋆ $mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r$ si les p_i sont premiers distincts

Θ (inversion) La fonction de Möbius est multiplicative et si $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, alors $f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$.

A $\phi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$.

Θ Le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n sur $\mathbf{F}_q$ est $I_{n,q} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d} q^d) = \frac{q^n}{n} + O(\frac{q^{n/2}}{n})$, en particulier il y en a toujours.

3.3 Tableaux d'Young

3.4 Combinatoire asymptotique

Autres idées à explorer...

Nombre de chaines, antichaines, Littlewood, cf. Pommellet Géométrie, polyèdres Faa di Bruno Complexité algorithmique Nombre de relations d'équivalence Croissance des groupes abéliens, graphes de Cayley Codes correcteurs (singleton) Tableaux d'Young : linéaires, nilpotents, Jordan Groupes de Sylow par Wielandt Partitions d'un entier Théorie de Ramsey Partie particulière sur les graphes/arbres ?

Méthode combinatoire pour Brouwer dans le TESTARD

Regarder [Caldero-Germoni(2013)] ! ! !

- **Développements.**

⋆ **Loi de réciprocité quadratique par les coniques, [Caldero-Germoni(2013), p. 182]**

Théorème de Polya
Nombres de Bell
Nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n sur $\mathbf{F}_q$
Lemme de Sperner et théorème de Brouwer
Probabilité de primalité relative

Références

[Jiri-Matouzek(2002)] et [Aigner(2007)] sont une très bonne base, ainsi que [Comtet()]. [?] est une mine de bonnes idées et d'illustrations. Pour les probabilités il y a quelques résultats discrets à emprunter à [Ouvrard(2007)] et à [Cottrell(2011)]. [Caldero-Germoni(2013), IX] contient un chapitre de combinatoire algébrique original et fructueux.

Rapport du jury. Leçon de synthèse qui a permis à de très bons candidats de faire un exposé parfois brillant. Bien entendu, l'exhaustivité est à proscrire, le candidat doit choisir les thèmes et les espaces fonctionnels dont il souhaite présenter les propriétés. Voici quelques remarques ponctuelles. Le théorème d'Ascoli est souvent présenté pour l'espace C(X ; Y) o'u X et Y sont des espaces métriques compacts et les candidats sont bien embarrassés lorsqu'on leur demande ce qu'il en est de l'espace C(X ;R). Il est bon également de citer des applications de ce théorème fondamental, par exemple concernant les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, etc. Pour la caractérisation du dual des espaces L^p, les candidats se contentent du cas 1 < p < 2, on ne peut ignorer le cas 2 < p < infini. La leçon « Espaces de fonctions » est souvent pauvre, hors-sujet, et les espaces considérés ne sont pas des espaces de fonctions ! A propos des exemples d'espaces fonctionnels, qui apparaissent dans de nombreuses leçons, il est suggéré d'examiner l'espace des séries de Taylor absolument convergentes (copie de l^1) qui fournit un exemple simple d'algèbre de Banach de dimension infinie, pourvue de propriétés remarquables.

Φ L'étude des fonctions pour elles-mêmes ne commence que relativement tardivement, au XIXe siècle avec la tradition analytique de Cauchy et d'Abel d'explorer les propriétés générales de classes de fonctions. Mais le véritable essor des espaces de fonctions en tant que structures dont on exploite les propriétés pour résoudre des problèmes fonctionnels n'arrive qu'au XXe siècle, avec le développement de la théorie de l'intégration et de la mesure, l'introduction par Sobolev des distributions puis les travaux bourbachique sur les topologie de tels espaces. C'est donc de cette prolifération d'espaces de fonctions que nous essyons de faire ressortir la fécondité du travail sur leur structure globale plus que sur les fonctions particulières elles-mêmes.

H Dès l'Antiquité la notion de correspondance trouve sa place, en témoignent les nombreuses tables de rapports retrouvées. La notion se développe avec la mise en évidence du procédé d'association d'une valeur à une autre. Newton est le premier à désigner les fonctions par un terme propre, suivi par Leibnie. (cf. Fonction : petit historique autour de la notion et du mot, Henry Plane, APMEP). Euler en est un grand utilisateur, puis au XIXe la notion entre dans de nombreuses autres disciplines. Cauchy et Abel en développent la théorie pour elle-même. Puis viennent distributions, mesures, topologies, etc.

Avis. Cette leçon ne doit pas être un stérile catalogue d'espaces fonctionnels et de propriétés associés, il faut faire ressortir l'intérêt des espaces fonctionnels quant à leur structure – et donc l'étudier un peu pour elle-même – et à la lumière que celle-ci jette sur l'utilisation de ces espaces dans certains problèmes – et donc souligner beaucoup d'applications. Également s'intéresser aux métriques possibles, aux topologies, etc.

⋆ ⋆ ⋆

1 Espaces de fonctions continues et régularité ponctuelle [H. Queffélec(2007)]

1.1 Fonctions continues sur un compact

Δ On munit C^0 de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_K |f|$.

Θ $C^0(K,F)$ est un espace de Banach si F est un espace de Banach.

A Tout espace peut être plongé dans l'espace complet $C^0(E,\mathbf{R})$ dans lequel il est dense.

Θ (Ascoli)

A (Cauchy-Peano)

A (opérateurs à noyaux)

1.2 Fonctions continues sur un fermé

zq

1.3 Espaces de Hölder

Δ

Θ Pour tout $a\alpha \in]0,1]$, on a $C^1_b \subseteq C^{0,\alpha} \subseteq C^0_b$.

Θ Si f est lipschitzienne, elle est hölderienne.

Θ Si f est hölderienne, elle est uniformément continue.

EDP

2 Plus de régularité

2.1 Fonctions C^1 sur un ouvert

2.2 Fonctions holomorphes [?]

Δ On munit H de la topologie de la convergence compacte, *i.e.*

Θ (Montel) Si $A \subseteq H(\Omega)$, alors il y a équivalence entre :

- ⋆ A localement bornée
- ⋆ A relativement compacte

2.3 Résultats de densité

Θ (Stone-Weierstrass) Si A est une sous-algèbre séparant les points, stable par conjugaison et contenant les constantes de $C(K,\mathbf{C})$ avec K compact, alors A est dense dans $C(K,\mathbf{C})$.

A L'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C(K)$.

A L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C_{2\pi}$.

Θ Il existe un G_δ dense de fonctions continues et nulle part dérivables.

Θ (Müntz) $Vect(x^{\alpha_n})_n$ est dense dans $C([0,1])$ au sens L^2 si, et seulement si, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

3 Les espaces L^p et régularité intégrable [Brezis(2005), ?]

3.1 L^p et régularisations

Δ On définit $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid f \text{ mesurable et } \int |f|^p < \infty\}$ et $L^p = \mathcal{L}^p/\sim$ où la relation d'équivalence ~ est celle d'égalité presque partout.

Δ On définit, pour $f \in L^p$, $\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p$.
Δ On définit $\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid \exists C > 0, |f| \leqslant C\ pp\}$ et $L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\sim$.
Δ on définit, pour $f \in L^\infty$, $\|f\|_\infty = supess f = \inf\{C > 0 \mid |f| \leqslant C\ pp\}$.

Θ $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour tout $p \in [1,\infty]$.

Θ (Riesz-Fréchet) L^p est un espace de Banach pour tout $p \in [1,\infty]$.

Θ Si $(f_n)_n$ est une suite de L^p convergeant au sens L^p vers $f \in L^p$, alors on peut en extraire une sous suite qui converge presque partout vers f et qui est presque partout dominée par une fonction de L^p.

3.2 L^2 et les séries de Fourier

Θ L^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int fg$.

3.3 Propriétés plus fines

Θ L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

R Ni L^1, ni L^∞ ne sont réflexifs.

Θ (Riesz) Pour tout $1 \leqslant p < \infty$, pour toute forme linéaire $\phi \in (L^p)'$, il exitste $u \in L^q$ qui représente $\phi : \forall f \in L^p, \langle \phi, f\rangle = \int uf$. Ainsi $(L^p)' \cong L^q$.

A C_c est dense dans L^p pour $1 \leqslant^< \infty$.

Θ L^p est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.

R L^∞ n'est pas séparable.

3.4 Compacité forte dans L^p

Θ (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Si $\omega \subset\subset \Omega$ et si F est une famille de L^p, $p < \infty$, telle que :

- ⋆ F est borné dans L^p
- ⋆ $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < d(\omega,\Omega^c), \forall |h| < \delta, \forall f \in F, \|\tau_h f - f\|_p^\omega < \varepsilon$

alors F_ω est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Θ (Grothendieck) Si $0 < p < \infty$ et si :

- ⋆ μ est une mesure de probabilité sur Ω
- ⋆ S est un sous-espace fermé de L^p
- ⋆ $S \subseteq L^\infty$

alors S est de dimension finie.

3.5 Espaces de Sobolev et problèmes aux limites

Δ On définit $W^{1,p} = \{u \in L^p \mid \exists g_1,\ldots,g_n \in L^p, \forall \phi \in C^\infty_c, \int u\phi'_i = -\int g_i\phi\}$, et $H^1 = W^{1,2}$. On définit alors, pour $u \in W^{1,p}$, $\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_i \|u'_i\|_p$.

Θ $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Θ $W^{1,p}$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.

Θ $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Θ Caractérisations
Δ Ω est un ouvert de classe C^1 si pour tout $x \in \partial\Omega$, ...

Θ Si Ω est de classe C^1, alors il existe un opérateur de prolongement $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ et une constante C tels que :

- ⋆ P est linéaire
- ⋆ $\forall u \in W^{1,p}, Pu_{\Omega} = u$
- ⋆ $\forall u \in W^{1,p}, \|Pu\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{L^p(\Omega)}$
- ⋆ $\forall u \in W^{1,p}, \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Θ (injections de Sobolev) Si $1 \leqslant p < \infty$, on a :

- ⋆
- ⋆
- ⋆

Θ (Rellich-Kondrakov) Si Ω est borné de classe C^1, on a :

- ⋆
- ⋆
- ⋆

3.6 Distributions

4 Densités et approximations [Brezis(2005)]

4.1 Résultats de densité

4.2 Convolution et régularisation

Δ Dès que cela a un sens, on définit la convolée de f par g comme $f \star g : x \mapsto \int f(x-y)g(y)dy$.

Θ Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, pour toutes $f \in L^1, g \in L^p$, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^n$, $f \star g \in L^p$ et $\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Θ Pour $f \in C_c^k, g \in L^1_{loc}, f \star g \in C^r$ et $D^a(f \star g) = D^a(f) \star g$ pour tout multi-indice a tel que $|a| \leqslant k$.

Δ Une suite régularisante – ou suite de noyaux réguliers – est une suite $(\rho_n)_n$ de C_c^∞ telle que :

- ⋆ $\rho_n \geqslant 0$
- ⋆ $supp(\rho_n) \subseteq B(0, \frac{1}{n})$
- ⋆ $\int \rho_n = 1$

Θ Il existe des suites régularisantes.

Θ (Noyaux réguliers) Si $(\rho_n)_n$ est une suite régularisante, alors :

- ⋆ si $f \in C$, alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{R}^n$
- ⋆ si $f \in L^p$ pour $p < \infty$, alors $\rho_n \star f$ converge au sens L^p vers f

A C_c^∞ est dans dans L^p pour tout $p < \infty$.

Θ (Lusin) Si μ est une mesure de Borel régulière, alors pour tout $p < \infty$ et tous $f \in L^p, \varepsilon > 0$, il existe $\phi_\varepsilon \in L^p \cap C$ telle que $\|\phi_{\varepsilon\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty}, \|\phi_\varepsilon - f\|_p \leqslant \varepsilon$ et $\mu(f \neq \phi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

5 Espaces de mesures

Δ Sur l'espace des mesures bornées par M, on pose trois topologies :

- ⋆ $\mu_n \to \mu$ vaguement si $\forall f \in C_k, \int f d\mu_n \to \int f f d\mu$
- ⋆ $\mu_n \to \mu$ faiblement si $\forall f \in C_0, \int f d\mu_n \to \int f f d\mu$
- ⋆ $\mu_n \to \mu$ étroitement, ou en loi, si $\forall f \in C_b, \int f d\mu_n \to \int f f d\mu$

Propriétés de ces toppologies

Θ (Lévy) Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires, on a équivalence entre :

- ⋆ $X_n \to X$ en loi
- ⋆ $\phi_{X_n} \to \phi_X$ simplement

De plus, si $\phi_n \to \psi$ continue en 0, alors $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de caractéristique ψ.

Autres idées à explorer...

Θ Les idéaux maximaux de $C(X, \mathbf{R})$ avec X compact sont les $\mathfrak{m}_x = Ker(\varepsilon_x)$ où ε_x est l'évaluation en x. cf http ://jones.math.unibas.ch/ giordano/max.pdf

Théorème de Stone-Weierstrass

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Stone-Weierstrass, [Wagschal(2012b), p. 432]**
  - ⋆ **Réduction des opérateurs compacts, [S. Gonnord(1998)]**
  - ⋆ **Théorème de Müntz, [Gourdon(2008)]**
  - ⋆ **Théorème de Riesz-Fischer, [Brezis(2005)]**
  - ⋆ **Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, [Brezis(2005)]**

Références

[H. Queffélec(2007)] pour les espaces de fonctions continues, [Brezis(2005)] pour les espaces L^p et les espaces de Sobolev, [**?**] pour les distributions et [Rudin(2009)] (?) ou [**?**] pour les mesures.

Rapport du jury.

Φ Les parties denses sont topologiquement omniprésentes : elles rencontrent tout ouvert. Cette propriété permet de contrôler des fonctions continues bien connues sur une partie dense, prolonger les applications uniformément continues, ...

H

Avis. C'est une leçon d'exemples et non de théorie générale. Il y a de nombreuses parties denses : la leçon se doit de présenter la diversité des situations dans lesquelles on peut les rencontrer : fonctions, matrices, géométrie, etc. Ces séparations doivent cohabiter dans un ordre pas trop artificiel, mais une fois à l'intérieur ce sont les particularités de l'espace choisi et des objets manipulés qui doivent rejaillir, et la puissance du principe d'extension des propriétés par densité.

⋆ ⋆ ⋆

1 Des parties denses élémentaires et quelques applications

1.1 Densité et nombres réels [Pommellet(1994)]

Δ Une partie A est dense dans X si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- ⋆ $X \subseteq \overline{A}$
- ⋆ Tout ouvert de X rencontre A
- ⋆ Dans le cas métrique, tout élément de X est limite d'éléments de A
- ⋆ Dans le cas métrique, pour tout $x \in X$, $d(x, A) = 0$

Θ $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$. $\mathbf{Q}^n$ et $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}^n$ sont denses dans $\mathbf{R}^n$.

A

- ⋆ les applications linéaires continues de $\mathbf{R}$ sont les homothéties
- ⋆ les morphismes continus de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{R}^\star, \times)$ sont les exponentielles
- ⋆ le seul morphisme de corps de $\mathbf{R}$ est l'identité

Θ Les rationnels p-adiques sont denses dans $\mathbf{R}$.

A Une fonction est convexe si, et seulement si, est elle vérifie $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

A Se limiter aux barycentres de deux points pour les fonctions affines (?)

Θ Un sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$ est soit discret soit dense. Un sous-groupe de $(\mathbf{R}^n, +)$ est un réseau ou dense.

A

- ⋆ $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si, et seulement si, a et b sont incommensurables.
- ⋆ $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ est dense dans S^1 si, et seulement si, θ et π sont incommesurables.

1.2 Suites et densités [S. Francinou(2007b)]

Δ Si A est une partie de $\mathbf{N}$ et si $\frac{A\cap[\![1,n]\!]}{n} \to d$, alors on dit que A est de densité d.

Θ Les suites qui convergent vers l au sens de Césaro sont les suites qui convergent vers l suivant une partie de densité 1.

Δ Une suite $(x_n)_n$ de $\mathbf{R}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $N(a, b, n) = card\{m \leqslant n \mid a \leqslant \{x_n\} \leqslant b\} \sim_{n\infty} n(b - a)$.

Θ Densité sur la sphère si les arguments sont équirépartis.

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ⋆ $(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1
- ⋆ $\forall f \in R_1([0, 1])$, $\int_0^1 f = \lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$
- ⋆ $\forall f \in C_1([0, 1])$, $\int_0^1 f = \lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$
- ⋆ (critère de Weyl) $\forall n \in \mathbf{Z}, \sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi n x_k} = o(n)$

E

- ⋆ Pour tout $\theta \notin \mathbf{Q}$, $(n\theta)_n$ est équirépartie modulo 1.
- ⋆ $\sin(n)$ est dense dans $[-1, 1]$.

1.3 Séparabilité [Brezis(2005)]

Δ Un espace est séparable s'il admet une partie dénombrable dense.

Θ Un sous-ensemble d'un espace séparable est séparable.

2 Espaces de fonctions

2.1 Algèbre linéaire [R. Mneimné(2009)]

Θ $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $M_n(\mathbf{R})$.

A Pour toutes A, B, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

A Il n'y a pas de norme constante sur les classes de similitude.

Θ Les matrices diagonalisables sont denses dans les matrices trigonalisables.

A (Cayley-Hamilton) Pour toute matrice M, $\chi_M(M) = 0$.

Δ Un point x est hypercyclique si $(A^n x)_n$ est dense dans E. Un opérateur A est hypercyclique lorsque l'ensemble $HC(A)$ de ses points hypercycliques est dense dans E.

Θ (Kitaï) Soient (E, d) est un espace polonais, *i.e.* métrique séparable et complet. S est un ensemble dénombrable dense, et A un endomorphisme continu de E. Si X et Y sont deux parties denses de E et si $B : Y \to Y$ tel que

- ⋆ $\forall x \in X, A^n x \to 0$
- ⋆ $\forall y \in Y, B^n y \to 0$
- ⋆ $\forall y \in Y, AB(y) = y$

alors A est hypercyclique.

2.2 Fonctions continues [S. Francinou(2007b)]

Θ (Korovkin) Si $(u_n)_n$ est une suite d'opérateurs linéaires positifs de $C[a, b])$ tel que $u_n(e_i)$ converge uniformément ver ^a_i pour $a_i = 0, 1, 2$, alors $u_n(C)$ est dense dans C.

Θ (Weierstrass) $K[x]$ est dense dans $C([a, b])$.

A Si $\int f(x) f^n dx = 0$ pour tout n, alors $f = 0$.

Θ (Chudnowski) Si $[a, b]$ ne contient pas d'entiers, alors $\mathbf{Z}[X]$ est dense dans $C([a, b])$.

Θ $P_{2\pi}$ est dense dans $C_{2\pi}$.

Θ (Müntz) $Vect(x^{\alpha_n})_n$ est dense dans $C([0, 1])$ au sens L^2 si, et seulement si, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Θ (Stone-Weierstrass) Si A est une sous-algèbre séparant les points, stable par conjugaison et contenant les constantes de $C(K, \mathbf{C})$ avec K compact, alors A est dense dans $C(K, \mathbf{C})$.

A L'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C(K)$.

A L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C_{2\pi}$.

2.3 Espaces L^p [Brezis(2005), ?]

Δ Dès que cela a un sens, on définit la convolée de f par g comme $f \star g : x \mapsto \int f(x - y) g(y) dy$.

Θ Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, pour toutes $f \in L^1, g \in L^p$, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^n$, $f \star g \in L^p$ et $\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Θ Pour $f \in C^k_c, g \in L^1_{loc}, f \star g \in C^r$ et $D^a(f \star g) = D^a(f) \star g$ pour tout multi-indice a tel que $|a| \leqslant k$.

Δ Une suite régularisante – ou suite de noyaux réguliers – est une suite $(\rho_n)_n$ de C^∞_c telle que :

- ⋆ $\rho_n \geqslant 0$
- ⋆ $supp(\rho_n) \subseteq B(0, \frac{1}{n})$
- ⋆ $\int \rho_n = 1$

Θ Il existe des suites régularisantes.

Θ (Noyaux réguliers) Si $(\rho_n)_n$ est une suite régularisante, alors :

- ⋆ si $f \in C$, alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{R}^n$
- ⋆ si $f \in L^p$ pour $p < \infty$, alors $\rho_n \star f$ converge au sens L^p vers f

A C^∞_c est dans dans L^p pour tout $p < \infty$.

Θ (Lusin) Si μ est une mesure de Borel régulière, alors pour tout $p < \infty$ et tous $f \in L^p, \varepsilon > 0$, il existe $\phi_\varepsilon \in L^p \cap C$ telle que $\|\phi_{\varepsilon\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty}, \|\phi_\varepsilon - f\|_p \leqslant \varepsilon$ et $\mu(f \neq \phi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Penser à la densité de S dans $L^1 \cap L^2$ pour étendre Fourier à Fourier-Plancherel !

Θ Si $\int f\phi = 0$ pour $f \in L^1_{loc}$ et toute $\phi \in D$, alors $f = 0$.

2.4 Fonctions holomorphes [?]

Θ Si f a une singularité essentielle en x, alors l'image est dense en tout voisinage épointé.

Θ La dérivation est hypercyclique par Kitai.

3 Complétude et densité

Θ Si pour tout forme linéaire continue f, $f(F) = \{0\}$, alors F est dense dans E.

3.1 Prolongement de fonctions uniformément continues [Candelpergher(2009)]

Θ Si $f : A \to F$ est uniformément continue, avec $A \subseteq E$ dense dans E et F complet, alors f se prolonge de manière unique à E.

Θ $E([a, b])$ est dense dans $CM([a, b])$.

A L'intégrale de Cauchy-Riemann est l'unique prolongement continu de la forme linéaire $I : \chi_{[c,d]} \mapsto d - c$.

Θ $AM([a, b)]$ est dense dans l'ensemble des fonctions convexes.

A (Jensen) Si ϕ est convexe et $\int g = 1$, alors $\phi(\int fg) \leqslant \int g\phi(f)$.

Θ D est dense dans L^2.

A Prolongement de la transformation de Fourier à L^2, théorème de Plancherel.

3.2 Espaces de Baire [?], [Chambert-Loir-Fermigier(1996b)], [H. Queffélec(2007)]

Δ A est maigre s'il est inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides. A est un résiduel si son complémentaire est maigre, *i.e.* si A contient une intersection dénombrables d'ouverts denses.

Δ E est un espace de Baire si tout résiduel est dense, *i.e.* si tout maigre est d'intérieur vide.

Θ (Baire) Tout métrique complet est de Baire.

- **A** Les applications convexes en dimension finie sont différentiables et de différentielle continue sur un ensemble dense.
- **A** L'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables sur $[0, 1]$ est dense.
- **A** Une limite simple de fonctions continues sur un complet est continue sur un résiduel.
- **A** Toute fonction dérivée est continue sur un résiduel.
- **A** Tout G_δ d'un métrique complet sans point isolé est dense et indénombrable.
- **A** (Sunyer i Balaguer) Si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ est telle que $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n_x \in \mathbf{N}, f^{(n_x)}(x) = 0$, alors f est un polynôme.
- **A** (Edelstein) L'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels la distance à un compact K est atteinte forme un ensemble dense.

3.3 Espaces de Banach [Brezis(2005)]

Θ (Banach-Steinhaus) Si $(T_i)_i$ est une famille d'applications linéaires continues entre deux Banach, et si $\forall x \in E, \sup_i \|T_i(x)\| < \infty$, alors $\sup_i \|Ti\| < \infty$. Autrement dit, une familles d'applications linéaires continues définies sur un Banach sont équicontinues ou divergent sur un G_δ dense.

- **A** Il existe des applications dont la série de Fourier diverge.

Θ (application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue surjective. Alors elle est ouverte, *i.e.* $\exists r > 0, B_F(0, r) \subseteq T(B_E(0, 1))$.

- **A** L'application qui à une fonction de $L^1(S^1)$ associe sa série de Fourier dans c_0 n'est pas surjective.

Θ (isomorphisme de Banach) Une bijection linéaire entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme.

- **A** Si deux normes rendant un espace complet sont telles que l'un est plus fine qu'une autre, alors elles sont équivalentes.

Θ (graphe fermé) $T \in L(E, F)$ est continue si, et seulement si, son graphe est fermé.

3.4 Espaces de Hilbert [Brezis(2005)]

Δ Une base hilbertienne de E est une suite $(e_n)_n$ orthonormée de E et totale, *i.e.* telle que $Vect((e_n)_n)$ est dense dans E.

Θ (Bessel-Parseval) Si E admet une base hilbertienne, alors $u = \sum P_{E_n}(u)e_n$ et $|u|^2 = \sum |u_n|^2$.

Θ (Orthonormalisation de Gram-Schmidt) Tout espace vectoriel est de dimension finie.

Θ Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Θ Bessel-Parseval

Θ Modèle : l^2

Polynômes orthogonaux denses dans $L_w(\mathbf{R})$, bases hilbertiennes, plus de Hilbert, espaces de Bergman

Théorie spectrale : tout Hilbert séparable est isomorphe à l^2

Autres idées à explorer...

Densité des familles en position générale + partition de l'unité = Hurewicz
Fonctions en escalier et machine standard, probas Fractales

- **Développements.**

  - ⋆ **Théorème de Stone-Weierstrass, [Wagschal(2012b), p. 432]**
  - ⋆ **Théorème de Hurewicz, [Queffélec(2012), p. 184]**
  - ⋆ **Théorème de Müntz, [Gourdon(2008)]**
  - ⋆ **Critère de Kitaï, [S. Gonnord(1996)]**
  - ⋆ **Critère de Weyl pour les suites équiréparties, [S. Francinou(2008a)]**
  - ⋆ **Théorème de Plancherel, [Candelpergher(2009)]**

Références

[Pommellet(1994)] et [S. Francinou(2007b)] pour les résultats élémentaires sur la densité ainsi que quelques résultats linéaires. [H. Queffélec(2007)] pour les espaces de fonctions et les séries de Fourier, [Brezis(2005)] pour les apports de la complétude notamment les conséquences du théorème de Baire.

Rapport du jury. Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale, sans proposer des exemples significatifs d'utilisation. Confusion entre la notion de compacité et l'utilisation de la compacité. Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale, sans proposer des exemples d'utilisation significatifs. On ne peut pas proposer en développement des théorèmes de caractérisation de la compacité, a contrario le théorème de Stone-Weierstrass, par exemple, trouve largement sa place dans cette leçon. Dans cette leçon, il est souhaitable de présenter un théorème utilisant la méthode diagonale ; les candidats n'ont que l'embarras du choix : théorèmes d'Ascoli, de Montel, compacité faible séquentielle de la boule unité d'un espace de Hilbert, etc.

Φ La compacité correspond au cas d'un espace où la convergence est facile, les ouverts n'ayant pas suffisamment de places pour recouvrir sans trop de redondance. On gagne en convergnce, quitte à affaiblir la topologie.

H Borel et Lebesgue sont les premiers à dégager la notion topologique de compacité, avant de faire le lien avec la notion de compacité de Bolzano-Weierstrass. Notion central en analyse moderne...

Avis. Ne pas faire de partir sur la compacité générale, c'est une leçon explicitement d'illustrations et le matériel ne manque pas. Mentionner en introduction l'intérêt de la compacité en termes de convergence, de réalisation des extremums, de quasi-finitude, etc.

⋆ ⋆ ⋆

E est un espace topologique, I désigne génériquement une partie quelconque, J une sous-partie finie de I.

1 Premières conséquences de la compacité [Pommellet(1994)]

1.1 Propriété de Borel-Lebesgue

Δ (Borel-Lebesgue) Un espace topologique X est compact s'il est séparé et vérifie l'une des propriétés équivalentes :
- ⋆ de tout recouvrement ouvert $(O_i)_i$ on peut entraire un sous-recouvrement fini $(O_j)_j$.
- ⋆ de toute intersection vide de fermés $(F_i)_i$ on peut extraire une sous-intersection vide finie $(F_j)_j$.
- ⋆ si une famille de fermés est d'intersections finies non vides, alors leur intersection est non vide.

Θ $[0,1]$ est un compact de $\mathbf{R}$.

A Les fonctions réglées sont limites uniformes de fonctions en escalier.

Θ Tout idéal propre de $C(X,\mathbf{R})$ avec X compact est inclus dans un $Ker(ev_x)$.

R Les idéaux maximaux de $C(X,\mathbf{R})$ avec X compact sont les $\mathfrak{m}_x = Ker(\varepsilon_x)$ où ε_x est l'évaluation en x. cf http ://jones.math.unibas.ch/ giordano/max.pdf

Θ Un espace compact est fermé et normal, *i.e.* on peut séparer deux fermés disjoints par des voisinages.

Θ Un espace compact est complet.

Θ La réunion d'un nombre fini de compacts est compact.

Θ (Tychonoff) Le produit d'espaces compacts est compact. (check preuve topologique)

1.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

R Définition équivalente dans un métrique, plus manipulable.

Δ (Précompacité) Un espace est précompact si de tout recouvrement de boules de rayon ε on peut extraire un sous recouvrement fini.

Θ Un espace est compact si, et seulement si, il est précompact et complet.

A Compacts de l^p.

Θ (Bolzano-Weierstrass) Dans un espace métrique E, une partie X est compacte si, et seulement si, l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
- ⋆ toute suite admet une valeur d'adhérence
- ⋆ de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente

A Dans un compact, une suite converge si, et seulement si, elle a au plus une valeur d'adhérence.

A Un espace compact et discret est fini.

A La décomposition polaire $(O,S) \in O_n(\mathbf{R}) \times S_n^+(\mathbf{R}) \mapsto OS \in M_n(\mathbf{R})$ est un homéomorphisme.

Θ Une application à valeurs dans un compact est continue si, et seulement si, son graphe est fermé.

2 Continuité & compacité

2.1 Image directe d'un compact [Pommellet(1994)] et [Queffélec(2012)]

Θ L'image continue d'un compact est un compact.

A $[0, 1]$ et $\mathbf{R}$ ne sont pas homéomorphes.

A Une bijection continue d'un compact dans un séparé est un homéomorphisme.

Θ Une injection continue d'un compact est un homéomorhpisme sur son image.

A On a un homéomorphisme $G/G_x \to G \cdot x$ si G est compact.

A SO_n est connexe.

Θ Une application continue d'un compact dans lui-même et dilatant (! métrique !) les distances est une bijection isométrique.

Θ (Heine) Une application continue sur un compact est uniformément continue.

A L'espace des fonctions en escalier est dense dans l'espace des fonctions continues sur un segment pour la convergence uniforme.

Θ (Dini) Toute suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue f converge uniformément.

2.2 Applications [Queffélec(2012)] et [?]

Θ (Stone-Weierstrass) Si A est une sous-algèbre séparant les points, stable par conjugaison et contenant les constantes de $C(K, \mathbf{C})$ avec K compact, alors A est dense dans $C(K, \mathbf{C})$.

A L'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C(K)$.

A L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C_{2\pi}$.

Δ Un espace métrique compact est de dimension topologique inférieure à n si pour tout $r > 0$, il existe un (r, n)-recouvrement $(U_i)_i$, *i.e.* un recouvrement ouvert tel que les diamètres des U_i sont inférieurs à r et qu'aucun élément ne soit dans plus de $n + 1$ ouvert.

Θ (Hurewicz) Tout espace métrique compact de dimension topologique inférieure à n se plonge dans $\mathbf{R}^{2n+1}$.

2.3 Extremums [Testard(2012)]

Θ Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

A (Rolle) Une fonction dérivable sur un segment et égale aux extrémités a une dérivée qui s'annule.

A (D'Almebert-Gauss) $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

Θ En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

A Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Θ Si K est un compact non vide de E métrique et si $y \in E$, alors :
- ⋆ il existe $x \in A$ tel que $d(y, K) = d(x, y)$
- ⋆ il existe a et b dans K tels que $diam(K) = d(a, b)$
- ⋆ si F est une partie fermée non vide d'un sous-espace de dimension finie, alors il existe $x \in F$ tel que $d(y, F) = d(x, y)$

Θ (Riesz) Un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, ses compacts sont les fermés bornés.

Θ (GPO)

etc.

3 Propriétés fonctionnelles

3.1 Critères de relative compacité [H. Queffélec(2007)]

Θ (Ascoli-Arzela) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur un compact métrique et si
- ⋆ Pour tout x de K, $(f_n)_n(x)$ est bornée
- ⋆ $(f_n)_n$ est équicontinue

alors il existe une sous-suite convergeant uniformément.

Θ (Helly) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes d'un intervalle et à valeurs réelles, si les $(f_n(x))_n$ sont bornées, alors il existe une sous-suite convergeant simplement.

A (Cauchy-Peano-Arzela) Si f est continue, alors il existe une solution maximale au problème de Cauchy.

Θ (Montel) Si $A \subseteq H(\Omega)$, alors il y a équivalence entre :
- ⋆ A localement bornée
- ⋆ A relativement compacte

Θ (Cartan) Si Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbf{C}$ et $f \in H(\Omega, \Omega)$ telle que $f(a) = a$, alors :
- ⋆ $|f'(a)| \leqslant 1$
- ⋆ $|f'(a)| = 1 \iff f \in Aut(\Omega)$
- ⋆ $|f'(a)| < 1 \implies (f^n)_n$ converge uniformémnt vers a

Θ (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\omega \subseteq\subseteq \Omega$, F un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta < d(\omega, ^c\Omega), \forall h \in \mathbf{R}^n, |h| < \delta, \forall f \in F, \|\tau_h f - f < \varepsilon\|_{L^p(\omega)}$$

alors F_ω est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

3.2 Opérateurs compacts [Levy-Bruhl(1918)] ou [Brezis(2005)]

Δ Un opérateur compact est un opérateur tel que l'image de la boule unité fermée est relativement compacte.

Θ Le spectre d'un opérateur T est tel que $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$.

Θ Si E est de dimension infinie et $T \in K(E)$, alors 0 est une valeur spectrales, les autres sont des valeurs propres, et le seul point d'accumulation peut être 0.

Θ Si T est compact autoadjoint d'un Hilbert séparable, alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Δ C-algèbre stellaire

Θ (Gelfand) Toute C-algèbre stellaire commutative est isométriquement isomorphe à $C(X, \mathbf{C})$ pour un compact faible-$\star$ X.

4 Plus de compacité

4.1 Locale compacité [SChwartz(1966)]

Δ Un espace est localement compact si tout point admet un voisinage compact.

Θ Dans un espace localement compact, tout compact admet un système fondamental de voisinages compacts.

4.2 Compacitifcation [Schwartz(1970)]

Θ (Alexandroff) Si E est un espace localement compact, alors il existe un unique espace $\tilde{E}$ compact qui contient E comme complémentaire d'un point.

Δ Une application est propre si l'image de tout compact est compact.

Θ Une application est propre si, et seulement si, elle est continue sur le compactifié d'Alexandroff.

4.3 Compacité faible [Brezis(2005)]

R On affaiblit la topologie dans l'objectif d'augmenter la compacité de l'espace.

Δ La topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$ sur E est la topologie la moins fine rendant continue les applications $f \mapsto f(x)$, $x \in E$.

Θ (Banach-Alaoglu-Bourbaki) La boule unité $B_{E'}$ est compacte pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$.

Θ (Kakutani-Markov) Toute application faiblement-$*$ continue et affine d'un convexe fermé borné de $(E', \sigma(E', E))$ dans lui-même admet un point fixe.

A (Haar) Existence d'une mesure de Haar

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Stone-Weierstrass, [Wagschal(2012b), p. 432]**
  - ⋆ **Théorème de Hurewicz, [Queffélec(2012), p. 184]**
  - ⋆ **Réduction des opérateurs compacts, [S. Gonnord(1996)]**
  - ⋆ **Sous-variétés connexes de dimension 1, [Lafontaine(2010)]**
  - ⋆ **Ellipsoïde de John-Loewner, [Alessandri(1999)]**
  - ⋆ **Théorème de D'ALembert-Gauss, preuve de Milnor, [Lafontaine(2010)]**

Autres idées à explorer...

Plus d'EDP ! ! ! Brouwer, Schauder, Borsuk-Ulam, points antipodaux

Références

[Pommellet(1994)] est excellent pour la première partie. [Queffélec(2012)] a un très bon chapitre sur la compacité avec du contenu parfois original. [**?**] pour quelques généralités, [Wagschal(2012b)] pour de nombreux exemples. [**?**] traite assez efficacement les opérateurs compacts en deux petits chapitres. Voir [Raymond(2008)] aussi

Rapport du jury. De très bons candidats proposent de démontrer la simplicité du groupe SO3(R) comme application de la connexité. Ils semblent désemparés lorsque le jury demande d'établir que ni SO2(R), ni SO4(R) ne sont simples. Bien distinguer sur des exemples, connexité et connexité par arcs.

Φ Recherche des morceaux composant un ensemble... (c'est nul). La connexité traduit une certaine homogénéité de l'espace, dans le sens où des propriétés locales sont nécessairement globales.

H Notion topologique développée fin XIXe, début XXe... La topologie algébrique l'exploite pleinement dès l'introduction de l'analysis situs de Poincaré.

Avis. Une notion omniprésente en analyse dont il faut dégager rapidement l'intérêt pour l'extension de propriétés à tout l'espace. Les objets et espaces sur lesquels on travaille doivent varier, ne pas oublier la connexité des groupes de matrices.

⋆ ⋆ ⋆

1 Différentes notions de connexité [Queffélec(2012), ?]

1.1 Connexité topologique générale

Θ Un espace topologique est connexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :
- ⋆ Si E est réunion de deux ouverts disjoints, l'un est vide
- ⋆ Si E est réunion de deux fermés disjoints, l'un est vide
- ⋆ Les seules parties ouvertes et fermées de E sont E et $\emptyset$
- ⋆ Toute fonction continue $E \to \{0,1\}$ est constante
- ⋆ Toute fonction continue de E dans un discret est constante

Δ On dit que $A \subseteq E$ est connexe s'il est connexe pour la topologie induite.

Θ Les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles.

E $\mathbf{Q}$ n'est pas connexe.

Θ Une réunion de connexes d'intersection deux à deux non vides est encore connexe.

Θ Si $(u_n)_n$ est une suite telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$, alors l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

Composantes connexes et relation de connexité

1.2 Locale connexité

Δ Un espace est localement connexe si tout point a une base de voisinage connexe.

E Les métriques...

Connexe n'implique pas forcément localement connexe !

E La réunion des droites d'ordonnée rationnelle et de l'axe des ordonnées est connexe mais non localement connexe.

1.3 Connexité par arcs

Δ Un chemin de E est une application continue $\gamma : [0,1] \to E$. On dit que $\gamma(0)$ en est l'origine, $\gamma(1)$ l'extrémité, et $\gamma([0,1])$ est l'arc géométrique γ.

Δ Un espace topologique E est connexe par arcs si pour tous $x, y \in E$, il existe un chemin γ d'extrémités x et y, *i.e.* tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

E
- ⋆ Les convexes et les étoilés sont connexes par arcs.
- ⋆ $\mathbf{C}$ privé des racines d'un polynôme est connexe par arcs + appli...

Θ Si $(F_n)_n$ est une suite de sous-espaces affines de $\mathbf{R}^n$ de dimensions inférieures à $n-2$, alors $\mathbf{R} \setminus \bigcup_n F_n$ est connexe par arcs.

A $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs

Θ Tout espace connexe par arcs est connexe

Θ Dans un métrique, les connexes sont les connexes par arcs. Dans un ouvert d'un métrique également.

E $\left(\bigcup_{x\in\mathbf{Q}}\{x\} \times \mathbf{R}_+\right) \cup \left(\bigcup_{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}\{x\} \times \mathbf{R}_-^\star\right)$ est connexe mais non connexe par arcs.

Θ L'image continue d'un connexe par arc est connexe par arcs.

1.4 Espaces bien enchaînés

Δ Un espace est bien enchaîné si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous (a,b), et il existe une suite $(a_i)_i$ tel que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $\forall i, d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \varepsilon$.

Θ Dans un espace métrique, bien enchaîné implique connexe.

2 Connexité et fonctions

2.1 Connexité et continuité [Testard(2012), Pommellet(1994)]

Θ L'image continue d'un connexe est un connexe.

A Le quotient d'un espace connexe est connexe.

A (théorème des valeurs intermédiaires) L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

A (Darboux) L'image d'un intervalle

A (passage des douanes)

A exp est surjective sur dans $\mathbf{C}^\star$.

Θ Si le théorème des valeurs intermédiaires est vérifié pour toute fonction continue, alors l'espace est connexe.

E Si f est continue et F est connexe, on n'a pas forcément $f^{-1}(F)$ connexe, par exemple...

Θ (Sunyer i Balaguer) Si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ est telle que $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n_x \in \mathbf{N}, f^{(n_x)}(x) = 0$, alors f est un polynôme.

Θ Si (E, d) est métrique complet et si $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérences est connexe.

A $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$ ne sont pas homéomorphes pour $^n > 1$.

Θ Un produit d'espaces est connexe par arcs si, et seulement si, chaque composante est connexe par arcs.

Θ La réunion d'une famille connexe d'intersection non vide est connexe.

2.2 Connexité et courbes

Θ Une variété de dimension 1 connexe et dénombrable à l'infini est difféomorphe à S^1 si elle est compacte, à $\mathbf{R}$ sinon.

Θ (Moore) si X est un compact connexe et si a et b sont deux points tels que pour tout autre point x, $E\backslash\{x\}$ se décompose en deux ouverts connexes disjoints $A_x \ni a$ et $B_x \ni b$, alors E est homéomorphe à $[0, 1]$.

Δ Une courbe de Jordan est une courbe fermée simple, *i.e.* une injection continue du cercle.

Θ (Jordan) Le complémentaire d'une courbe de Jordan dans un plan affine réel est formé d'exactement deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan. Les points de la composante connexe bornée sont caractérisés par un indice par rapport à la courbe valant ± 1 en fonction de l'orientation, les autres ont un indice nul.

3 Passage du local au global

Méthodologie : pour montrer qu'une propriété est vraie, on montre que l'ensemble des points qui la vérifient est ouvert et fermé dans un connexe.

3.1 Principe du prologement analytique [Cartan(1961)]

Θ (zéros isolés) Si f une fonction analytique non constante sur un ouvert connexe, alors les zéros de f forment un ensemble de points isolés.

A Une fonction analytique possède au moins une singularité sur le bord de son disque de convergence.

Θ Prolongement analytique

A Γ

A Toute application localement constante sur un connexe est constante. En particulier toute application de dérivée ou de différentielle nulle.

A (D'Alembert–Gauss) $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, *i.e.* tout polynôme complexe admet une racine complexe.

Θ (Cartan) Si Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbf{C}$ et $f \in H(\Omega, \Omega)$ telle que $f(a) = a$, alors :

- ⋆ $|f'(a)| \leqslant 1$
- ⋆ $|f'(a)| = 1 \iff f \in Aut(\Omega)$
- ⋆ $|f'(a)| < 1 \implies (f^n)_n$ converge uniformémnt vers a

Θ Si f est continue sur l'adhérence $\overline{D}$ d'un ouvert borné connexe, et si elle vérifie la propriété de la moyenne, alors f atteint sont maximum sur sa frontière. Si elle l'atteint à l'intérieur, elle est constante.

A (principe de symétrie de Schwartz) Si D est un ouvert connexe non vide symétrique par rapport à l'axe réel, si $D_+ = D \cap [Im \geqslant 0]$ et $D_- = D \cap [Im \leqslant 0]$, alors toute fonction continue sur D_+ et holomorphe sur $D_+ \backslash \mathbf{R}$ se prolonge de manière unique à D tout entier.

Θ (représentation conforme) Si $U \neq \mathbf{C}$ est simplement connexe, alors il existe une application conforme, *i.e.* une bijection holomorphe, entre U et $B(0, 1)$.

3.2 Prolongement de solutions locales [Demailly(2006)]

Θ (Inversion globale) Si f est injective et de différentielle inversible en tout point, alors f est un difféomorphisme de U sur son image.

E Coordonnées polaires.

Θ (Hadamard-Levy) Soit $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, elle est propre et de différentielle inversible en tout point.

Θ (Cauchy-Lipschitz) Si f est localement lipschitzienne en y, alors le problème de Cauchy admet une unique solution exacte au voisinage de t_0.

Θ Si $f(t, \cdot)$ est $k(t)$-lipchitzienne pour tout t avec k continue, alors toute solution maximale est globale. Si $\|f(t, y)\| \leqslant c(t) + k(t)\|y\|$, alors toute solution maximale est globale.

3.3 Connexité des groupes topologiques [R. Mneimné(2009)]

Θ $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe.

A L'ensemble des projecteurs de rang p est connexe.

Θ Si G est connexe, il est engendré par tout voisinage de e.

Θ Si G/H et H sont connexes, alors G est connexe.

Θ La composante connexe de l'identité dans un groupe topologique est un sous-groupe fermé distingué.

Θ $GL_n^+(\mathbf{R})$ est connexe.

Θ $SO_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

groupes de lie, ccnx neutre engendrée par l'image de l'algèbre de Lie par l'exp

Autres idées à explorer...

Critère de Eilenberg
Simple connexité (cf. Queffélec)

Connexité dans les graphes ?
Runge

- **Développements.**

  ⋆ **Théorème de Hadamard-Levy, [H. Queffélec(2007)]**

  ⋆ **Théorème de Jordan C^1, [S. Gonnord(1996)]**

  ⋆ **Théorème de la représentation conforme de Riemann, [Cartan(1961)]**

  ⋆ **Théorème de D'Almebert-Gauss, preuve de Milnor, [Lafontaine(2010)]**

Milnor & boule chevelue, [S. Gonnord(1996)]

Références

[Pommellet(1994)] contient le plan. [**?**] et [**?**] sont une bonne base pour construire la leçon. [S. Gonnord(1996)] pour de nombreuses applications. [R. Mneimné(2009)] pour le problème de la connexité dans les groupes topologiques. Concernant l'analyse complexe, peut-être [Rudin(2009)] ou [**?**] ?

Rapport du jury. Par exemple, beaucoup ont du mal à voir que l'espace des fonctions continues de [0,1] dans R n'est pas complet si on le munit de la norme de la convergence en moyenne et ne savent pas à quoi ressemble son complété. Le théorème d'interversion des limites est rarement cité. Le théorème de Baire trouvera évidemment sa place.

Φ La complétude traduit une bonne homogénéité de l'espace, dans le sens où toute suite dont les termes se rapprochent entre eux se rapprochent d'un même élément. Le critère de Cauchy est un outil permettant d'atteindre de nombreux résultats d'existence du fait de l'absence de la limite explicite dans ses hypothèses, tout en donnant l'existence d'une telle limite.

H La complétude apparaît avec la première formalisation rigoureuse des idées de convergence et de limite, par Cauchy. Puis développement de l'analyse fonctionnelle fin XIXe et courant XXe, notamment avec Baire puis Banach...

Avis. Une fois la fécondité de la complétude établie dès l'intérêt constaté de la condition de Cauchy, apparaissant comme nécessaire à la convergence, parler et exploiter la notion de complété semble très à propos. Les applications sont nombreuses et il faut montrer la diversité des applications : suites et séries, espaces linéaires, espaces L^p, etc. Le principe du prolongement par uniforme continuité est très fécond également, ainsi la construction fonctionnelle de l'intégrale, etc. Le plan est construit sous forme d'enrichissement de la structure complète, et la complétude permet toujours d'atteindre des résultats puissants de manière assez rentable : métrique, puis normé, puis préhilbertien.

⋆ ⋆ ⋆

1 Complétude métrique [Pommellet(1994), Queffélec(2012)]

1.1 Suite de Cauchy

Δ Suites de Cauchy

Δ Une suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in N, \forall p, q \geqslant n, d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$.

Θ Une suite convergente est de Cauchy, et une suite de Cauchy est bornée. Une suite de Cauchy converge si, et seulement si, elle admet une valeur d'adhérence.

E Dans $(\mathbf{C}[X], \|\cdot\|_\infty)$, $(X^n)_n$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas.

Θ La notion de suite de Cauchy est invariante par changement de distance uniforme.

E Contre-exemple avec $d(x, y) = |Arctan(x) - Arctan(y)|$.

1.2 Espaces complets

Δ Un espace complet est un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge. Un espace de Banach est un espace normé complet.

C'est, comme les suites de Cauchy, une notion métrique et non topologique. Par exemple sur $\mathbf{R}$, la valeur absolue et la distance $d(x, y) = |Arctan(x) - Arctan(y)|$ sont topologiquement équivalentes mais $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ est complet alors que $(\mathbf{R}, d)$ ne l'est pas.

E
- ⋆ $\mathbf{R}$ est complet
- ⋆ Les espaces de dimension finie sur un corps complet sont complets
- ⋆ $\mathbf{Q}$ n'est pas complet
- ⋆ $\mathbf{R}[X]$ n'est pas complet
- ⋆ $(C, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet
- ⋆ Les L^p sont complets.

Θ Un espace est complet si, et seulement si, toute série absolument convergente converge.

Θ (Fermés emboîtés) Si $f(F_n)_n$ est une suite de fermés non vides de E complet et de diamètres tendant vers 0, alors il existe $\bigcap F_n = \{x\}$. Cette propriété caratérise les espaces complets.

A On ne peut pas paver un espace de dimension finie par des sphères.

Θ (Mazur-Ulam) Si u est une isométrie bijective, alors u est affine.

Θ Dans un espace métrique, les compacts sont les précompacts et complets.

A L'ensemble des compacts muni de la distance de Hausdorff est complet.

Θ Théorème d'intervertion des limites

1.3 Complétion [Schwartz(1970)]

Θ (Complétion) Tout espace métrique admet une extension complète dans laquelle il est dense. Ce complété est isométrique unique.

E
- ⋆ $\mathbf{R}$ est le complété de $\mathbf{Q}$ pour la métrique usuelle
- ⋆ $k[[X]]$ est le complété de $k[X]$ pour la distance de valuation
- ⋆ $\mathbf{Q}_p$ est le complété des p-adiques rationnels

2 Fruits de la complétude et espaces de Baire

2.1 Théorème de point fixe

Θ (Banach-Picard) Une application f contractante d'un complet non vide dans lui-même admet un unique point fixe, limite de toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Si cette application dépend continûment d'un paramètre λ et que k ne dépend pas de λ, alors le point fixe dépend continûment de λ.

A (Cauchy-Lipschitz)

2.2 Principe de prolongement

Θ Si $f : A \to F$ est uniformément continue, avec $A \subseteq E$ dense dans E et F complet, alors f se prolonge de manière unique à E.

Θ $E([a, b])$ est dense dans $CM([a, b])$.

A L'intégrale de Cauchy-Riemann est l'unique prolongement continu de la forme linéaire $I : \chi_{[c,d]} \mapsto d - c$.

Θ $AM([a, b)]$ est dense dans l'ensemble des fonctions convexes.

A (Jensen) Si ϕ est convexe et $\int g = 1$, alors $\phi(\int fg) \leqslant \int g\phi(f)$.

2.3 Espaces de Baire [H. Queffélec(2007)]

Δ A est maigre s'il est inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides. A est un résiduel si son complémentaire est maigre, *i.e.* si A contient une intersection dénombrables d'ouverts denses.

Δ E est un espace de Baire si tout résiduel est dense, *i.e.* si tout maigre est d'intérieur vide.

Θ (Baire) Tout métrique complet est de Baire.

E Contre-exemple avec les distributions $D = \bigcup D_{K_n}$.

Θ Tout espace localement compact est de Baire.

Θ Un ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

A L'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables sur $[0, 1]$ est dense.

2.4 Application aux métriques complets

Θ Un espace vectoriel de dimension dénombrable n'est pas complet.

Θ Une limite simple de fonctions continues sur un complet est continue sur un résiduel.

Θ Toute fonction dérivée est continue sur un résiduel.

Θ Tout G_δ d'un métrique complet sans point isolé est dense et indénombrable.

Θ (Sunyer i Balaguer) Si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ est telle que $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n_x \in \mathbf{N}, f^{(n_x)}(x) = 0$, alors f est un polynôme.

3 Espaces de Banach [H. Queffélec(2007)]

3.1 Espaces de Banach

Θ (Banach-Steinhaus) Si $(T_i)_i$ est une famille d'applications linéaires continues entre deux Banach, et si $\forall x \in E, \sup_i \|T_i(x)\| < \infty$, alors $\sup_i \|Ti\| < \infty$. Autrement dit, une familles d'applications linéaires continues définies sur un Banach sont équicontinues ou divergent sur un G_δ dense.

A Il existe des applications dont la série de Fourier diverge.

Θ (application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue surjective. Alors elle est ouverte, *i.e.* $\exists r > 0, B_F(0,r) \subseteq T(B_E(0,1))$.

A L'application qui à une fonction de $L^1(S^1)$ associe sa série de Fourier dans c_0 n'est pas surjective.

Θ (isomorphisme de Banach) Une bijection linéaire entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme.

A Si deux normes rendant un espace complet sont telles que l'un est plus fine qu'une autre, alors elles sont équivalentes.

Θ (graphe fermé) $T \in L(E,F)$ est continue si, et seulement si, son graphe est fermé.

Δ Un point x est hypercyclique si $(A^n x)_n$ est dense dans E. Un opérateur A est hypercyclique lorsque l'ensemble $HC(A)$ de ses points hypercycliques est dense dans E.

Θ (Kitaï) Soient (E,d) est un espace polonais, *i.e.* métrique séparable et complet. S est un ensemble dénombrable dense, et A un endomorphisme continu de E. Si X et Y sont deux parties denses de E et si $B : Y \to Y$ tel que

- ⋆ $\forall x \in X, A^n x \to 0$
- ⋆ $\forall y \in Y, B^n y \to 0$
- ⋆ $\forall y \in Y, AB(y) = y$

alors A est hypercyclique.

4 Espaces de Hilbert [Brezis(2005), H. Queffélec(2007)]

4.1 Espaces de Hilbert

Δ Un espace préhilbertien est de Hilbert s'il est complet pour la norme définie par le produit scalaire.

E
- ⋆ Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert
- ⋆ $L^2(X,\tau,\mu)$ est un espace de Hilbert

E Si X est métrique compact et si μ est une mesure de Radon positive de support infini X, alors $C(X)$ est un préhilbertien mais pas un Hilbert.

4.2 Projection sur un convexe fermé

Θ Si C est une partie convexe, fermée et non vide d'un espace de Hilbert H, alors pour tout $x \in H$ il existe un unique élément de C réalisant la distance de x à C, on le note $p_C(x)$ et il est caractérisé par $Re((x - p_C(x), y - p_C(x))) \leqslant 0$ pour tout $y \in C$.

A On peut toujours projeter sur un convexe fermé.

Θ Le projecteur p_C est alors 1-lipschitzien

Θ (Kakutani) Si E est normé de dimension supérieure à 3 et si pour tout sous-espace F de dimension 2 il existe un projecteur de norme 1, alors la norme est hilbertienne. (Preuve ?)

Espérance conditionnelle vue comme projection

4.3 Représentation de Riesz-Fréchet

Θ (Riesz-Fréchet) Si $\phi \in H'$, alors il existe un unique $f \in H'$ tel que $\langle \phi, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in H$. De plus, $\|\phi\|_{H'} = \|f\|$.

A (Hahn-Banach) Si H est un espace de Hilbert et si f est une forme linéaire sur un sous-espace F', alors elle se prolonge sur H en une forme linéaire de même norme.

A Si μ et ν sont deux mesures vérifiant $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leqslant \nu(A)$, alors μ est absolument continue par rapport à ν.

Θ (Compacité faible) B_H est faiblement compacte dans H.

Θ (Browder) Si H est un Hilbert et K un convexe fermé borné non vide de H, alors toute application 1-lipschitzienne de K dans K admet un point fixe.

sppStampacchia et Lax-Milgram

Δ Une forme bilinéaires a est continue s'il existe C tel que $|a(u,v)| \leqslant C|u||v|$ pour tous $u, v \in H$. Une forme linéaire est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v,v) > \alpha |v|^2$.

Θ (Stampacchia) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive et si K est un convexe fermé non vide, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \langle \phi, v-u\rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u\rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v\rangle$.

Θ (Lax-Milgram) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in H, \forall v \in H, a(u,v) = \langle \phi, v\rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u\rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v\rangle$.

Applications aux EDP

Autres idées à explorer...

Théorème de Köthe ? Ekeland (GT)
Grothendieck
Espaces de Bergman

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Hurewicz, [Queffélec(2012), p. 184]**
  - ⋆ **Théorème de Banach-Steinhaus et application, [?]**
  - ⋆ **Critère d'hypercyclicité de Kitaï, [S. Gonnord(1996)]**
  - ⋆ **Théorème de Riesz-Fischer, [Brezis(2005)]**

Références

La leçon peut être faite avec [?] dans l'ordre. Beaucoup de bonnes idées dans [Queffélec(2012)] et [H. Queffélec(2007)]. Des développements et résultats plus poussés dans [S. Gonnord(1996)].

Rapport du jury. Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples. Le théorème de Peano est parfois présenté comme application du théorème de Schauder. Présenter un tel développement lorsqu'on n'a aucune idée de la démonstration des théorèmes d'Ascoli, Brouwer et Schauder est quelque peu gênant. Signalons que la méthode très ingénieuse (et simple !) de Caratheodory permet d'obtenir le résultat à l'aide du seul théorème d'Ascoli.

Φ Les théorèmes de point fixe sont des théorèmes d'existence permettant d'obtenir des résultats implicites importants dans des cas très variés.

H

Avis. Montrer la diversité des théorèmes de points fixes, en faisant varier les hypothèses de régularité des fonctions aux espaces par exemple, et surtout souligner la grande utilité implicite des théorèmes de points fixes et donner de nombreuses applications à chaque fois. Ne pas se contenter de cataloguer mais souligner qu'il faut des hypothèses fortes pour garantir ne serait-ce qu'une existence dans un cas général, mais qu'alors bien de sproblèmes s'y ramènent.

⋆ ⋆ ⋆

1 Points fixes dans R [?, S. Francinou(2007a)]

Δ Une fonction $f : E \to E$ admet un point fixe $a \in E$ si $f(a) = a$.

Θ Si I est un segment de $\mathbf{R}$, alors tout fonction continue $f : I \to I$ admet un point fixe, et toute fonction continue telle que $I \subseteq f(I)$ admet un point fixe.

A (Sarkowskii) Si $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point périodique de période 3, alors il existe des points périodiques de toute période n.

Plus de points fixes, bassins d'attraction, attracteurs, etc.

2 Point fixe de Banach

2.1 Le théorème de Banach-Picard

Δ Une application est contractante si elle est k-lipschitzienne avec $k < 1$, *i.e.* s'il existe $k < 1$ tel que $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$.

E ⋆ C'est le cas de toute fonction différentiable sur un connexe et telle que $\|df\| \leqslant k$.

Θ (Banach-Picard) Une application f contractante d'un espace complet non vide dans lui-même admet un unique point fixe. Ce point fixe est limite de toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in E$. Si cette application dépend continûment d'un paramètre λ et que k ne dépend pas de λ, alors le point fixe dépend continûment de λ.

E Les classiques du Rouvière

Θ Si seulement une itérée f^p de f est contractante, alors il existe un unique point fixe également.

Θ Si K est un compact et $f : K \to K$ est telle que $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, alors f admet un unique point fixe dans K. Ce point fixe est limite de toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in K$

Θ Si f est 1-lipchitzienne d'un compact convexe dans lui-même, alors elle admet un point fixe.

Θ Si H est un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un convexe compact de E stable par H, alors il existe un point fixe commun à tous les éléments de H.

A $O_n(\mathbf{R})$ est l'unique sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbf{R})$ à conjugaison près.

2.2 Applications

Θ (Newton) Si $f(l) = 0$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, si $f \in C^2$ et f' ne s'annule pas, alors $(u_n)_n$ converge quadratiquement vers l.

A (Héron)

Θ (Cauchy-Lipschitz) Si f est localement lipschitzienne en y, alors le problème de Cauchy admet une unique solution exacte au voisinage de t_0.

Θ (Inversion locale) Si f est de différentielle inversible en a, alors f est un difféomorphisme d'un voisinage de a dans son image.

A Globale ? Implicites . bof...

Δ Une forme bilinéaires a est continue s'il existe C tel que $|a(u,v)| \leqslant C|u||v|$ pour tous $u, v \in H$. Une forme linéaire est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v,v) > \alpha|v|^2$.

Θ (Stampacchia) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive et si K est un convexe fermé non vide, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \langle \phi, v-u \rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v \rangle$.

Θ (Lax-Milgram) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in H, \forall v \in H, a(u,v) = \langle \phi, v \rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v \rangle$.

3 Autres théorèmes de points fixes

Θ (Brouwer) Toute application continue $f : \overline{B} \to \overline{B}$ admet un point fixe.

Θ (Schauder) Si C est un convexe fermé non vide d'un espace topologique séparé, si $f : C \to C$ est d'image relativement compacte, alors f admet un point fixe.

A (Perron-Frobenius ?) Tout matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ à coefficients positifs admet un vecteur propre à coefficients positifs associé à une valeur propre positive.

A (lemme de non rétraction) Il n'existe pas de rétraction de la boule sur la sphère.

A (Borsuk-Ulam)

A (boule chevelue)

Θ (Browder) Si H est un Hilbert et K un convexe fermé borné non vide de H, alors toute application 1-lipschitzienne de K dans K admet un point fixe.

Θ (Kakutani) Si X est un espace topologique localement convexe, K un compact convexe de X, G un groupe équicontinu d'endomorphismes continus de X, et si $G(K) \subseteq K$, alors G admet un point fixe dans K, *i.e.* il existe un point fixe commun à tous les éléments de G.

A Tout groupe compact admet une mesure de Haar invariante.

A Théorie des jeux, équilibres de Nash

Autres idées à explorer...
Construction de mesure de Haar

- **Développements.**
  - ⋆ **Lemme de Sperner et théorème de Brouwer, [Testard(2012)]**
  - ⋆ **Théorème de Browder, [S. Gonnord(1998)]**
  - ⋆ **Théorème de Sarkowskii, [S. Francinou(2007b)]**

Cauchy-Lipschitz
Inversion locale
Stampacchia
Point fixe pour L^1 (cf. article de Bader, Gelander, Monod)

Références

[**?**] insiste sur l'utilisation implicite des théorèmes de point fixe et en fournit de nombreux exemples et applications. [**?**] propose quelques applications de Picard, et [S. Gonnord(1996)] en contient d'autres.

Rapport du jury. Les questions liées au prolongement analytique font partie de la leçon. Le théorème de Hahn-Banach (en dimension infinie) n'est pas une nécessité absolue pour faire une leçon de niveau acceptable surtout quand on manque de recul sur la thématique. En ce qui concerne le théorème de prolongement des applications uniformément continues, on ignore bien souvent la version linéaire, alors qu'elle peut être l'objet de développement intéressant, tel que le théorème de Plancherel, par exemple. Quant au prolongement de la fonction gamma en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, il serait bon de savoir que la relation fonctionnelle gamma(z + 1) = z gamma(z) permet de le faire en quelques lignes.

Φ De nombreuses fonctions sont connues sur des parties de l'espace, par l'expérience ou la nécessité théorique de cas particuliers fixés, et se pose alors le problème de leur interpolation sur tout l'espace de sorte à pouvoir bénéficier des propriétés d'espaces de fonctions mieux connus. De nombreuses possibilités plus ou moins contraignantes de prolongement existent, et nous tâchons d'en explorer ici quelques unes.

H Euler est le premier à réfléchir à des fonctions non définies par une formule explicite a priori. Cauchy est le premier à construire des fonctions par prolongement grâce aux séries de fonctions, Abel donne de nombreux résultats. De nombreux résultat de prolongement dans le cadre de la théorie de la mesure au début du XXe. Puis des prolongements topologiques avec Bourbaki.

Avis. La démarche est naturelle et le plan doit suivre une démarche un minimum cohérente. Les situations sont très différentes mais les principes généraux doivent structurer le tout, et être richement illustrés. Les constructions de mesures et les prolongements de propriétés vraies sur des π-systèmes générateurs sont typiquement des résultats importants qui donnent ici des prolongements différents. Les prolongement de morphismes à partir de générateurs ont également leur place. Le plan est construit selon la recherche de régularité, en laissant les résultats les plus généraux pour la fin des parties de sorte à pouvoir motiver le problème par des situations bien connues, ainsi les trois parties sont : topologie (continuité, uniforme continuité, prolongement généraux dans les T_4), différentiabilité (dérivable, EDO, holomorphe et méromorphe), prolongement plus généraux (mesure, linéaire et morphisme, interpolation) terminant ainsi sur les limites et pratiques numériques. Il faut que les principe de passage local-global, notamment par connexité, ressortent bien.

⋆ ⋆ ⋆

1 Prolongement par continuité, cadre topologique

1.1 Prolongement ponctuels

Θ Si $f : A \to F$ est continue avec F séparé, alors il existe au plus un prolongement continu à $\overline{A}$.

E
- ⋆ $\frac{1}{x}$ ne peut se prolonger par continuité sur $\mathbf{R}$
- ⋆ $\sin \frac{1}{x}$ ne peut se prolonger par continuité sur $\mathbf{R}$

Θ Si $f \in D^1$, alors le taux d'accroissement en un point est prolongeable par continuité.

A (Darboux)

1.2 Prolongement par densité

Θ Une fonction continue f définie sur A est prolongeable par continuité sur $\overline{A}$ d'au plus une manière. Un tel prolongement existe si, et seulement si, pour tout point $x \in \overline{A}$, f admet une limite en x en restant dans A.

A

Θ (prolongement des uniformément continues) Si $f : A \to F$ est uniforément continue sur une partie dense à valeurs dans F complet, alors il existe une unique fonction g prolongeant f et uniformément continue.

A (Fourier-Plancherel) La transformation de Fourier :$F : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge à L^2.

A Construction de l'intégrale de Riemann.

A Ascoli

A Calcul fonctionnel continu

A Complétion

1.3 Prolongement plus généraux

Θ (Tietze-Urysohn) Si (E, d) métrique, $E \subseteq E$ fermé et $f : A \to \mathbf{R}$ continue bornée, alors il existe une application g qui prolonge f sur E avec mêmes brones.

A Si F et F' sont deux fermés disjoints, alors on peut construire une fonction continue à valeurs dans $[0, 1]$ valant 0 sur F et 1 sur F'.

A Partitions de l'unité

Θ (Tietze) Si (E, d) métrique, $E \subseteq E$ fermé et $f : A \to \mathbf{R}$ continue, alors il existe une fonction g qui prolonge f (avec les mêmes bornes ?).

2 Prolongements différentiables

2.1 Prolongement ponctuel et interpolations

Θ Si f est dérivable sur in intervalle sauf en un point, et que sa dérivée admet un ce point une limite, alors la fonction est dérivable en ce point de dérivée la limite.

Θ (Borel) Si $(a_n)_n$ est une suite de réels, il existe $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\forall n, f^{(n)}(0) = a_n$.

A Si $f \in C^\infty([a,b])$ admet des dérivées de tout ordre en a et b, on peut la prolonger en une fonction de $C^\infty(\mathbf{R})$.

A Toute fonction paire est telle qu'il existe une fonction g telle que $\forall x, f(x) = g(x^2)$.

Θ (Whitney) Tout ensemble fermé de $\mathbf{R}$ est ensemble des zéros d'une fonction $C^\infty(\mathbf{R})$.

2.2 Prolongement par connexité [Queffélec(2012)]

Θ Une fonction différentiable de différentielle nulle sur un ouvert connexe est constante.

Θ Toute solution d'une équation différentielle ordinaire $x' = f(t,x)$ avec f de classe C^1 est prolongeable en une unique solution maximale. Cette solution est globale si f est lipschitzienne.

Θ (Hadamard-Levy) Soit $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, elle est propre et de différentielle inversible en tout point.

Θ Une variété de dimension 1 connexe et dénombrable à l'infini est difféomorphe à S^1 si elle est compacte, à $\mathbf{R}$ sinon.

2.3 Prolongement analytique [Cartan(1961)]

Θ (zéros isolés) Si f une fonction analytique non constante sur un ouvert connexe, alors les zéros de f forment un ensemble de points isolés. En particulier il existe au plus un prolongement analytique sur l'adhérence.

A Une fonction analytique possède au moins une singularité sur le bord de son disque de convergence.

Θ (Liouville) Une fonction entière et bornée est constante.

A (D'Alembert-Gauss) $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

Méromorphes, monodromie, etc.

3 Prolongements plus généraux

3.1 Prolongement d'applications linéaires

Θ Un morphisme de structure est entièrement déterminé par l'image d'un système générateur.

E Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Θ (Witt) Si $F, F' \leqslant E$, alors il y a équivalence entre :

- ⋆ F et F' sont q-isométriques, *i.e.* il existe $u \in O(q)$ tel que $u(F) = F'$
- ⋆ q_F et $q_{F'}$ sont équivalentes
- ⋆ il existe une isométrie $\sigma : F \to F'$ relative à q_F et $q_{F'}$

Θ Toute telle isométrie $\sigma : F \to F'$ relative à q_F et $q_{F'}$ admet un prolongement...

Θ (Hahn-Banach) Si f est une forme linéaire sur un sous-espace F et est majorée par une semi-norme, alors elle admet un prolongement linéaire à E avec la même majoration.

A Un hyperplan $[f = \alpha]$ est fermé si, et seulement si, f est continue.

A Un sous-espace est dense si, et seulement si, toute forme linéaire continue nulle dessus est nulle.

Θ (Hahn-Banach) géométrique

A Un convexe fermé d'un evn est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

3.2 Prolongement de mesures [?]

Dynkin, construction de mesures et propriétés, approx par des fonctions étagées, carathéodory, théorème de Kolmogorov (percolation, existence d'un ouvement brownien, etc.)

3.3 Interpolations

Lagrange, Hermite Bézier, Splines Interpolation dans les L^p Riesz-Thorin

Autres idées à explorer...

Théorème de Borsuk (http ://www.math.u-psud.fr/ pansu/websm/Lerebours.pdf)

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de plongement de Whitney, [Lafontaine(2010)]**
  - ⋆ **Prolongement de la transformation de Fourier à L^2, théorème de Plancherel, [?]**
  - ⋆ **Variétés de dimension 1, [Lafontaine(2010)]**
  - ⋆ **Prolongement de Γ, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Prolongement de ζ, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Représentation de Borel, [H. Queffélec(2007)]**

Références

[Brezis(2005)] pour les théorèmes de Hahn-Banach, [H. Queffélec(2007)] pour les espaces fonctionnels assez généraux et les transformées de Fourier. Les théorèmes topologiques de Tietze-Urysohn et prolongements uniformément continu sont dans [?].

Rapport du jury. La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée.

Φ Les espaces normés sont une généralisation en dimensions supérieures des possibilités offertes par la structure topologique, métrique, linéaire du plan euclidien.

H

Avis. Le domaine est immense, il y a des choix à faire, mais c'est une leçon qui est aisément bien garnie. Les normes pour elles-mêmes donnent quelques considérations géométriques intéressantes. Les applications linéaires et les problèmes de continuité sont une mine d'idées, notamment du côté des applications du théorème de Banach-Steinhaus. Les opérateurs compacts sont également une catégorie à explorer. Insister sur les nombreux exemples et leur variété.

⋆ ⋆ ⋆

k désigne un corps valué quelconque (?), et E est un k-espace vectoriel.

1 Géométries normées [Rouvière(2009)]

1.1 Normes et géométrie des normes

Δ Une norme est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}_+$ telle que

- ⋆ $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$
- ⋆ $\forall \lambda \in k, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- ⋆ $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

E
- ⋆ La valeur absolue ou le module sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$
- ⋆ Sur $C([0,1])$, $\|f\|_1 = \int |f|$, $\|f\|_\infty = \sup |f|$.
- ⋆ Sur $\mathbf{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ mais pas $\|x\| = |x_1|$.

Θ Toute norme définit une distance $d(x,y) = \|x - y\|$.

Θ Une distance dérive d'une norme si, et seulement si, elle est homogène et invariante par translations.

1.2 Géométrie des normes

Θ Une norme est entièrement déterminée par sa boule unité.

Δ Jauge

Θ Les boules de normes sont les convexes compacts symétriques par rapport à 0 et voisinages de 0.

1.3 Espaces vectoriels normés

Δ Un espace vectoriel normé (evn) est un espace vectoriel muni d'une norme.

E
- ⋆ $\mathbf{R}[X]$ muni de $\|P\|_1 = \sum_i |a_i|$ ou $\|P\|_\infty^{[0,1]}$.
- ⋆ L^p muni des normes de Hölder $\|f\|_p^p = \int |f|^p$.

Δ Une norme N_1 est plus fine que N_2 si la convergence au sens de N_2 implique la convergence au sens de N_1, *i.e.* s'il existe C tel que $N_1 \leqslant CN_2$. Elles sont équivalentes si elles définissent la même notion de convergence, *i.e.* s'il existe a, b, tels que $aN_1 \leqslant N_2 \leqslant bN_1$. Cela revient à dire que les boules de l'une sont incluses dans des boules de l'autre.

Θ En dimension finie, les normes sont toutes équivalentes.

E Sur $C([0,1])$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2 Espaces vectoriels normés [Pommellet(1994)]

2.1 Applications linéaires continues

Θ Une application linéaire est continue si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- ⋆ u est continue en 0
- ⋆ u est bornée au voisinage de 0
- ⋆ u est bornée sur B
- ⋆ u est bornée sur S
- ⋆ u est uniformément continue
- ⋆ u est lipschitzienne

Δ Une application u est une isométrie si $\|ux - uy\| = \|x - y\|$.

Θ (Mazur-Ulam) Si u est une isométrie bijective, alors u est affine.

Δ La norme subordonnée de u est $\|u\| = \sup \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

E Exemples classiques

Θ $(L(E,F), \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Θ Une application linéaire continue définie sur une partie dense se prolonge sur tout l'espace en une application linéaire continue de même norme.

A La transformée de Fourier se définit également sur L^2.

2.2 Cas de la dimension finie

Θ Tout espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.

Θ Tout application linéaire en dimension finie est continue.

Θ (Lemme de Riesz) Si F est un sous-espace fermé propre de E, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists u \in F, \|u\| = 1, d(u,F) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Θ (Riesz) La boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte si, et seulement si, il est de dimension finie.

Θ Une espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, toutes les formes linéaires sont continues.

2.3 Formes linéaires continues

Θ (Hahn-Banach) Si f est une forme linéaire sur un sous-espace F et est majorée par une semi-norme, alors elle admet un prolongement linéaire à E avec la même majoration.

A Un hyperplan $[f = \alpha]$ est fermé si, et seulement si, f est continue.

A Un sous-espace est dense si, et seulement si, toute forme linéaire continue nulle dessus est nulle.

Θ (Hahn-Banach) géométrique

A Un convexe fermé d'un evn est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

3 Complétude [Brezis(2005)]

3.1 Espaces de Banach

Δ Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

E
- ⋆ $\mathbf{R}$ est un espace de Banach
- ⋆ Les espaces $L^p(\mu)$ sont des espaces de Banach.
- ⋆ L'espace des fonctions analytiques uniformément convergeant sur le disque unité est un espace de Banach.

Θ Un espace normé est complet si, et seulement si, toute série absolument convergente est convergente.

Θ (Baire) Si E est un espace de Banach, alors toute intersection d'ouverts denses est dense.

Θ Si E est un est un espace complet, alors toute réunion de fermés d'intérieurs vide est vide.

A Un espace à base dénombrable, tel $\mathbf{R}[X]$, n'est pas complet.

Θ (Banach-Steinhaus) Si E et F sont deux espaces de Banach, $(T_i)_i$ une famille d'applications linaires continues, et si pour tout $x \in E$, $\sup_i \|T_i(x)\|$ est borné, alors $\sup \|T_i\|$ est borné.

A Il existe des applications dont la série de Fourier diverge.

Θ (application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue surjective. Alors elle est ouverte, *i.e.* $\exists r > 0, B_F(0,r) \subseteq T(B_E(0,1))$.

A L'application qui à une fonction de $L^1(S^1)$ associe sa série de Fourier dans c_0 n'est pas surjective.

Θ (isomorphisme de Banach) Une bijection linéaire entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme.

A Si deux normes rendant un espace complet sont telles que l'un est plus fine qu'une autre, alors elles sont équivalentes.

Θ (graphe fermé) $T \in L(E,F)$ est continue si, et seulement si, son graphe est fermé.

3.2 Opérateurs compacts

4 Espaces de Hilbert [Brezis(2005)]

4.1 Géométrie des préhilbertiens

Δ On appelle produit scalaire sur H toute application bilinéaire, symétrique/hermitienne et définie-positive. On le note $\langle \cdot,\cdot \rangle$ et $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot,\cdot \rangle}$ est la norme associée.

Δ Un espace préhilbertien est un espace muni d'un produit scalaire.

E
- ⋆ $\mathbf{R}^n$ avec $\langle x,y \rangle = \sum x_i y_i$
- ⋆ C_T avec $\langle f,g \rangle = \int fg$
- ⋆ l^2 avec $\langle u,v \rangle = \sum u_n v_n$
- ⋆ $L^2(X)$ et H^1 avec $\langle f,g \rangle = \int fg$

Θ (Cauchy-Schwarz) $|\langle x,y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Θ (Polarisations) $(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$ et l'autre...

Θ (Parallélogramme) $\|\frac{x+y}{2}\| + \|\frac{x-y}{2}\| = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Θ (Fréchet-von Neuman-Jordan) Une norme est euclidienne si, et seulement si, elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Θ Tout espace de préhilbertien est uniformément convexe, donc réflexif s'il est complet.

4.2 Espaces de Hilbert

Δ Un espace préhilbertien est de Hilbert s'il est complet pour la norme définie par le produit scalaire.

E
- ⋆ Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert
- ⋆ $L^2(X,\tau,\mu)$ est un espace de Hilbert

Θ (Riesz-Fréchet) Si $\phi \in H'$, alors il existe un unique $f \in H'$ tel que $\langle \phi, v \rangle = \langle f, v \rangle, \forall v \in H$. De plus, $\|\phi\|_{H'} = \|f\|$.

A (Hahn-Banach) Si H est un espace de Hilbert et si f est une forme linéaire sur un sous-espace F', alors elle se prolonge sur H en une forme linéaire de même norme.

Autres idées à explorer...

- **Développements.**

  ⋆ **Théorème de Riesz-Fischer, [Brezis(2005)]**

  ⋆ **Théorème de Millman-Pettis, [Brezis(2005)]**

  ⋆ **Théorème de Banach-Steinhaus et application aux séries de Fourier, [H. Queffélec(2007)]**

  ⋆ **Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram, [Brezis(2005)]**

  ⋆ **Diagonalisation des opérateurs compacts, [Brezis(2005)]**

  ⋆ **Caractérisation des boules de normes, [Rouvière(2009)]**

Références

[Schwartz(1970)] pour la base de la leçon concernant les normes et les applications linéaires continues. Compléter avec [Brezis(2005)] pour les théorèmes de Banach-Steihaus et applications, ainsi que le théorème de Hahn-Banach, plus les opérateurs compacts. Parler également d'espaces de Hilbert. Des aspects plus géométriques sont dans [Rouvière(2009), ch. 1]. [S. Gonnord(1996)] est sûrement une bonne mine d'applications, ainsi que les FGN.

Rapport du jury. Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. En revanche, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules et en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence.

Φ C'est avec Hilbert que se développe la volonté de fonder les mathématiques sur la géométrie, d'où en particulier la recherche de la légitimation des raisonnement géométriques dans des espaces de dimension infinie.

H

Avis. Il faut montrer que c'est le cadre analytique idéal pour que les raisonnements géométriques euclidiens tiennent. Les propriétés ont une signification géométrique qui est juste et qui doit être exploitée dans les raisonnements. Les espaces de Hilbert classiques fournissent alors de nombreuses mises en applications et de nombreuses bases hilbertiennes intéressantes : séries de Fourier, espaces H^s, etc. La théorie spectrale et la diagonalisation des auto-adjoints compacts montre que l^2 est le modèle des espaces de Hilbert.

⋆ ⋆ ⋆

1 Espaces de Hilbert [Pommellet(1994)]

1.1 Espaces préhilbertiens

Δ On appelle produit scalaire sur H toute application bilinéaire, symétrique/hermitienne et définie-positive. On le note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ est la norme associée.

Δ Un espace préhilbertien est un espace muni d'un produit scalaire.

E
- ★ $\mathbf{R}^n$ avec $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$
- ★ C_T avec $\langle f, g\rangle = \int fg$
- ★ l^2 avec $\langle u, v\rangle = \sum u_n v_n$
- ★ $L^2(X)$ et H^1 avec $\langle f, g\rangle = \int fg$

Θ (Cauchy-Schwarz) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Θ (Polarisations) $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$ et l'autre...

Θ (Parallélogramme) $\|\frac{x+y}{2}\| + \|\frac{x-y}{2}\| = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Θ (Fréchet-von Neuman-Jordan) Une norme est euclidienne si, et seulement si, elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Θ Tout espace de préhilbertien est uniformément convexe, donc réflexif s'il est complet.

Δ Deux vecteurs x et y sont dit orthogonaux si $(x, y) = 0$. L'orthogonal d'une partie A est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A.

1.2 Espaces de Hilbert

Δ Un espace préhilbertien est de Hilbert s'il est complet pour la norme définie par le produit scalaire.

E
- ★ Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert
- ★ $L^2(X, \tau, \mu)$ est un espace de Hilbert

E Si X est métrique compact et si μ est une mesure de Radon positive de support infini X, alors $C(X)$ est un préhilbertien mais pas un Hilbert.

1.3 Projection sur un convexe fermé

Θ Si C est une partie convexe, fermée et non vide d'un espace de Hilbert H, alors pour tout $x \in H$ il existe un unique élément de C réalisant la distance de x à C, on le note $p_C(x)$ et il est caractérisé par $Re((x - p_C(x), y - p_C(x))) \leqslant 0$ pour tout $y \in C$.

A On peut toujours projeter sur un convexe fermé.

Θ Le projecteur p_C est alors 1-lipschitzien

Θ (Kakutani) Si E est normé de dimension supérieure à 3 et si pour tout sous-espace F de dimension 2 il existe un projecteur de norme 1, alors la norme est hilbertienne. (Preuve ?)

Espérance conditionnelle vue comme projection

2 Dualité dans un espace de Hilbert

2.1 Représentation de Riesz-Fréchet

Θ (Riesz-Fréchet) Si $\phi \in H'$, alors il existe un unique $f \in H'$ tel que $\langle\phi, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in H$. De plus, $\|\phi\|_{H'} = \|f\|$.

A (Hahn-Banach) Si H est un espace de Hilbert et si f est une forme linéaire sur un sous-espace F', alors elle se prolonge sur H en une forme linéaire de même norme.

A Si μ et ν sont deux mesures vérifiant $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leqslant \nu(A)$, alors μ est absolument continue par rapport à ν.

Θ (Compacité faible) B_H est faiblement compacte dans H.

Θ (Browder) Si H est un Hilbert et K un convexe fermé borné non vide de H, alors toute application 1-lipschitzienne de K dans K admet un point fixe.

2.2 Adjonction dans un Hilbert

Δ Si $u \in L_c(H)$, alors il existe un unique $u^\star \in L_c(H)$, appelé adjoint de u, tel que $\forall x, y \in H, \langle u^\star(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. De plus $\|u\| = \|u^\star\|$.

Θ L'adjonction est linéaire et continue

Θ Rapports entres images et noyaux de l'adjoint...

Θ (ergodique de von Neumann) Si H est un Hilbert et T un endomorphisme continu de normé inférieure à 1, alors pour tout $x \in H$, $\frac{1}{n+1}\sum_0^n T^k(x) \to p(x)$ où p est la projection sur $Ker(I - T)$.

A Dans $L^2(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$, si $\alpha \notin 2\pi\mathbf{Q}$ et si $f \in H$, alors $\frac{1}{n+1}\sum_0^n f(\cdot + k\alpha) \to \frac{1}{2\pi}f$.

2.3 Stampacchia et Lax-Milgram

Δ Une forme bilinéaires a est continue s'il existe C tel que $|a(u, v)| \leqslant C|u||v|$ pour tous $u, v \in H$. Une forme linéaire est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) > \alpha|v|^2$.

Θ (Stampacchia) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive et si K est un convexe fermé non vide, alors $\forall\phi \in H', \exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v - u) \geqslant \langle\phi, v - u\rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u, u) - \langle\phi, u\rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v, v) - \langle\phi, v\rangle$.

Θ (Lax-Milgram) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive, alors $\forall\phi \in H', \exists! u \in H, \forall v \in H, a(u, v) = \langle\phi, v\rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u, u) - \langle\phi, u\rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v, v) - \langle\phi, v\rangle$.

Applications aux EDP

3 Bases hilbertiennes

3.1 Bases hilbertiennes

Δ Une base hilbertienne de E est une suite $(e_n)_n$ orthonormée de E et totale, *i.e.* telle que $Vect((e_n)_n)$ est dense dans E.

Θ (Bessel-Parseval) Si E admet une base hilbertienne, alors $u = \sum P_{E_n}(u)e_n$ et $|u|^2 = \sum |u_n|^2$.

Θ (Orthonormalisation de Gram-Schmidt) Tout espace vectoriel est de dimension finie.

Θ Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Θ Bessel-Parseval

Θ Modèle : l^2

Application : décomposition d'une image selon une base de Haar.

3.2 Polynômes orthogonaux

3.3 Réduction des endomorphismes autoadjoints compacts

Autres idées à explorer...

Lemme de Milnor, Boule chevelue, Brouwer, ...
Insister sur L^2 comme modèle

- **Développements.**

  ⋆ **Brouwder**

  ⋆ **Réduction des opérateurs compacts**

  ⋆

Références

[Pommellet(1994)] et [**?**] sont de bonnes bases. [Schwartz(1970)] peut compléter, ainsi que [Brezis(2005)]. Applications dans [S. Gonnord(1996)].

Rapport du jury. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

Φ Raisonner à difféomorphisme local près, de sorte à obtenir une plus grande liberté locale et une flexibilité supérieure, dont on espère pouvoir tirer des informations globales ou sur les applications originales. C'est en approchant localement des fonctions et des systèmes généraux par des applications linéaires que l'on arrive à obtenir des information prévises sur les problèmes initiaux.

H

Avis. Ne pas trop d'étendre sur le généralités et les définitions de la différentiabilité alors que 215 existe. L'inversion locale permet d'avoir des continuités bien peu évidentes en fonction de paramètres : racines de polynômes, etc. Les fonctions implicites permettent de définir de nombreuses courbes comme des graphes localement, cet aspect implicite de définition des sous-variétés doit être exploité. Dans les deux cas, on a des informations sur les dérivées.

⋆ ⋆ ⋆

U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, V un ouvert de $\mathbf{R}^p$.

1 Inversions locale et globale [Avez(1985)]

1.1 Difféomorphismes

1.2 Difféomorphismes et inversion locale

Δ Une fonction $f : U \to \mathbf{R}^q$ est un C^k-difféomorphisme si f est un homéomorphisme bi-C^k.

E
- ⋆ $\mathbf{R}$ et B sont difféomorphes via $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|^2}$
- ⋆ $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ et S^1 sont difféomorphes via la projection stéréographique

Θ Un homéomorphisme de différentielle inversible en tout point est un difféomorphisme.

Θ Si $\phi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme et si $f : V \to \mathbf{R}$ est intégrable, alors on a la formule de changement de variables $\int_V f(x)dx = \int_U f(\phi(t)) \det(\phi(t))dt$.

A $\int_{\mathbf{R}} e^{-ax^2}dx$.

A (Milnor)

A (boule chevelue) Il existe un champ continu de vecteurs unitaires tangents à la sphère S^{n-1} de $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, n est pair.

A (Brouwer) Toute application continue de B^n dans B^n admet un point fixe.

1.3 Théorèmes d'inversion

Θ (inversion locale) Si f est de classe C^k est de différentielle inversible en $a \in U$, alors f est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage de a dans son image.

Δ Un difféomorphisme local est une application qui induit un difféomorphisme au voisinage de tout point. Il suffit que ce soit une application différentiable de différentielle inversible en tout point.

E La racine carrée est un difféomorphisme local d'un voisinage de I_n dans un voisinage de I_n

Plein d'application au redressements de champs de vecteurs, etc.

Θ (inversion globale) Si f est injective et de différentielle inversible en tout point, alors f est un difféomorphisme de U sur son image.

E
- ⋆ $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféomorphisme local de $]0, \infty[\times\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$

A Une application de classe C^k et telle que $d(f(x), f(y)) > d(x, y)$ est un difféomorphisme global.

A Une application holomorphe injective est conforme.

Θ (Hadamard-Levy) Soit $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, elle est propre et de différentielle inversible en tout point.

Θ (lemme de Morse) Soit f de classe C^3 sur un ouvert U contenant 0. Si $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe un C^1-difféomorphisme ϕ entre deux voisinages de 0, tel que $\phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \phi_1^2(x) + \cdots + \phi_p^2(x) - \phi_{p+1}^2(x) - \cdots - \phi_n^2(x)$.

1.4 Formes canoniques

Δ Une immersion de classe C^k d'un ouvert U dans $\mathbf{R}^p$ est une application de classe C^k de différentielle injective en tout point.

Θ (immersion) Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est de classe C^1 et si df_0 est injective, alors il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^p$, un ouvert $U' \subseteq U$ tel que $f(U') \subseteq V$, et un difféomorphisme ϕ de V sur son image tels que $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)))(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

E

Δ Une submersion de classe C^k d'un ouvert U dans $\mathbf{R}^p$ est une application de classe C^k de différentielle surjective en tout point.

Θ (submersion) Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est de classe C^1 et si df_0 est surjective, alors il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^p$ et un difféomorphisme ψ de W sur son image tels que $\psi(W) \subseteq U$ et $f(\psi(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_q)$.

E

Θ (rang constant) Si f est de différentielle de rang constant sur un ouvert U, alors on peut trouver un changement de coordonnées à la source et au but pour obtenir la projection sur les r premières coordonnées.

2 Fonctions implicites [Avez(1985)]

2.1 Théorème des fonctions implicites

Θ (fonctions implicites) Soit U est un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ et $(a, b) \in U$, soit f est de classe C^1 sur U. Si $f(a, b) = 0$ et si $D_y f(a, b)$ est inversible, alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathbf{R}^n$ et un voisinage ouvert de b dans $\mathbf{R}$ tels que $V \times W \subseteq U$ et $D_y f(x, y)$ soit inversible pour tout $(x, y) \in V \times W$; il existe une unique application $\phi : V \to W$ telle que $\forall (x, y) \in V \times X, (f(x, y) = 0 \iff x \in V, y = \phi(x)$.

A Si P_λ est une famille C^∞ de polynômes scindés à racines simples, alors ces racines dépendent de manière C^∞ de λ.

Θ (différentielle implicite) De $f_j(x_1, \ldots, x_n, \phi_1(x), \ldots, \phi_p(x)) = 0$, il vient $D\phi(x) = -(D_y f(x, \phi(x))^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x))$.

2.2 Courbes implicites

ToDo

3 Géométrie différentielle [Lafontaine(2010)]

3.1 Sous-variétés

Δ Une sous-variété M de dimension p est un ouvert tel que pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $U \in V(a)$ et un difféomorphisme $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbf{R}^p$.

E La sphère S^{n-1} est une variété différentielle de dimension $n - 1$.

Θ Il y a équivalence entre les caractérisations suivantes des variétés différentiables M de dimension p :

- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \to \mathbf{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$
- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbf{R}^p$ contenant 0, et une application $h : \Omega \to \mathbf{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbf{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $\mathbf{R}^n \cap U$
- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbf{R}^p$ contenant $(a^1, \ldots, a^p)$ et une application lisse G de V dans $\mathbf{R}^{n-p}$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ soit égal au graphe de G

E Le tore, le groupe orthogonal sont des variété différentiables.

E Une paramétrisation du cercle S^1 est $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$.

3.2 Vecteurs tangents, espaces tangents, géométrie riemanienne

Δ Un vecteur tangent à M en a est un vecteur u tel qu'il existe une courbe $\gamma : [-1,1] \to M$ tracée sur M telle que $\gamma'(0) = u$.

Θ Dans le cas des variétés, les vecteurs tangents à M en a sont $Im(df_a)$.

Δ L'espace tangent T_aM à M en a est l'ensemble des vecteurs tangents à M en a.

E Surfaces de $\mathbf{R}^3$.

3.3 Groupes et algèbres de Lie [Faraut(2006)]

Δ Un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$ est un morphisme continue de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbf{R})$.

Θ Si $\gamma : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe à un paramètre, alors γ est analytique et $\forall t \in \mathbf{R}, \gamma(t) = \exp(tA)$ où $A = \gamma'(0)$.

Δ L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire G est $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}$.

E
- ⋆
- ⋆
- ⋆

Θ $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ stable par le crochet de Lie $[X,Y] = XY - YX$.

Θ (Cartan-von Neumann) L'exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans un voisinage de I dans G. Tout groupe linéaire fermé est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, d'espace tangent en l'identité $\mathfrak{g}$.

A $\mathfrak{g}$ détermine la composante neutre de G.

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Hadamard-Levy, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Théorème de Sard**
  - ⋆ **Théorème de Cartan-von Neumann, [Faraut(2006)]**

Rang constant et application ?

Références

[Avez(1985)] contient à peu près tout ce qu'il faut au niveau du plan et du cours, puis [Lafontaine(2010)] et surtout [**?**] s'il faut des précisions ou d'autres références. [**?**] contient toute une partie d'applications géométriques de l'inversion locale, et il y a de nombreuses applications dans [Chambert-Loir-Fermigier(1996c)] et [S. Francinou(2012)].

215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Rapport du jury. Il faudrait que les candidats à l'Agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur $D_k f(a)$ définissent des applications k-linéaires (sur quel espace ?). Il faut savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction ou effectuer un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction.

Φ Approcher localement une fonction par une application linéaire, généralisant la notion de dérivabilité et ramenant ainsi des problèles d'analyse à des objets d'algèbre linéaire. L'étude de la différentielle apporte alors de nombreuses informations fines sur la fonction initiale.

H [?]

Avis. L'idée d'approximation par le linéaire doit porter ses fruits explicitement et dans des situations variées : la décomposition de Dunford dans les équations différentielles et les systèmes dynamiques, ...

⋆ ⋆ ⋆

1 Différentiabilité [Rouvière(2009)]

1.1 Différentielles

Δ Une application $f : U \to \mathbf{R}^q$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire L sur $\mathbf{R}^p$ telle que $\forall x \in U, f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$. Elle est dite différentiable sur U si elle est différentiable sur tout point de U.

E
- ⋆ Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est différentiable si, et seulement si, elle est dérivable.
- ⋆ Une application linéaire u est différentiable partout et $\forall a, du_a = u$.
- ⋆ Une forme bilinéaire B est différentiable et $dB(h,k)(a,b) = B(a,k) + B(h,b)$
- ⋆ Une forme quadratique q est différentiale partout et $\forall a, dq_a = \langle a, \cdot \rangle$.
- ⋆ L'inversion $M \mapsto M^{-1}$ est différentiable sur $GL_n(\mathbf{R})$ et $dInv_A : M \mapsto -M^{-1}AM^{-A}$.
- ⋆ La norme $\|\cdot\|_1$ n'est nulle part différentiable.

Θ La différentielle d'une application f en a est unique, et est notée df_a. En dimension finie, elle ne dépend pas de la norme.

Δ Si E est un espace de Hilbert, $\nabla f(x)$ est l'unique vecteur tel que $df_x(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle, \forall h \in E$, appelé gradient de f en a.

1.2 Règles de calcul

Θ L'ensemble des applications différentiables sur U est un espace vectoriel, et la différentiation $f \mapsto Df$ est linéaire. La jacobienne Jf_a est la matrice de Df_a.

Θ (règle de la chaîne) Si f est différentiable en $a \in U$ et g est différentiable en $f(a) \in V$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.

A Si f est un homéomorphisme différentiable, alors f^{-1} est différentiable et $d(f^{-1})_{f(a)} = (df_a)^{-1}$.

A Le plan tangent est l'ensemble des vecteurs tangent de courbes

A Un wronskien associé au système linéaire $X' = AX$ vérifie $w' = Tr(A)w$.

A $f = (f_1, \ldots, f_r)$ est différentiable si, et seulement si, chaque f_i est différentiable et alors $Df = (Df_1, \ldots, Df_n)$.

Θ (changement de variables) Si ϕ est un C^1-difféomorphisme, alors $\int_A f = \int_{\phi^{-1}(A)} f \circ \phi |J\phi|$.

A (Milnor)

A (boule chevelue) Il existe un champ continu de vecteurs unitaires tangents à la sphère S^{n-1} de $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, n est pair.

A (Brouwer) Toute application continue de B^n dans B^n admet un point fixe.

1.3 Acroissements finis

Θ (acroissements finis) Si f est différentiable sur U, si $[a,b] \subseteq U$ et si $\|df\|_\infty^{[a,b]} \leqslant k$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant k\|b-a\|$.

A Une fonction de différentielle nulle sur un connexe est constante.

Θ Si $(f_n)_n$ est une suite d'applications différentiables telle que :

- ⋆ il existe $a \in U$ tel que $(f_n(a))_n$ converge
- ⋆ $(Df_n)_n$ converge uniformément sur tout borné de U vers g

Alors $(f_n)_n$ converge simplement sur U, uniformément sur tout borné convexe de U, et la limite est différentiable de différentielle g.

R La convergence n'est a priori que locale, par exemple $f_n(x) = \frac{x}{n}$ vérifie les hypothèses globalement mais ne converge pas globalement.

Δ L'espace C^k est muni de la topologie de la convergence compacte pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k.

Δ Un point critique a d'une application différentiable $f : U \to \mathbf{R}^n$ est un point tel que $rg(Df(a)) < n$. Une valeur critique est l'imafe par f d'un point critique.

Θ (Sard) Si $f : U \to \mathbf{R}^n$ est de classe C^1, alors l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^n$.

Θ (Cauchy-Lipschitz) Si f est localement lipschitzienne en y, alors le problème de Cauchy associé à $y' = f(t, y)$ admet une unique solution exacte au voisinage de t_0.

1.4 Dérivations partielles

Δ La dérivée de f dans la direction h est $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$. Si f est différentiable, il s'agit de $df_a(h)$. Une fonction admettant des dérivées partielles dans toutes les directions est dite Gâteaux-différentiable.

Θ Pour qu'une fonction soit différentiable, il faut et il suffit qu'elle soit G-différentiable, que la G-différentielle soit linéaire et continue par rapport au point.

Θ Si f est différentiable, alors $df_x(h) = \sum_i \partial_i f(x) h_i$.

E
- ⋆ La différentielle d'une application multilinéaire f est $df_x(h) = \sum_i f(x_1, \dots, h_i, \cdots, x_n)$
- ⋆ La différentielle du déterminant est $d\det_A : H \mapsto Tr(\tilde{A}H)$

A (Euler) Une application est homogène de degré k si, et seulement si, $\sum x_i \partial_i f(x) = kf(x)$.

Δ La matrice jacobienne de f en a est $Jf_a = (\partial_j f_i)_{i,j}$.

Θ Les applications ∂_i, d et J sont linéaires.

E L'existence des dérivées directionnelles n'implique pas la différentiabilité, par exemple$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Θ Si une fonction admet des dérivées partielles continues selon toutes les directions, alors elle est de classe C^1, *i.e.* différentiable de différentielle continue.

E Une fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est holomorphe si, et seulement si, f est différentiable et vérifie les relations de Cauchy-Riemann : $\partial_1 P = \partial_2 Q$ et $\partial_1 Q = -\partial_2 P$, *i.e.* $\overline{\partial} f = 0$.

Θ Une fonction $f : \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2 \to F$ est holomorhpe si, et seulement si, elle est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.

2 Précisions du comportement local

2.1 Dérivées d'ordres supérieurs

Δ Une fonction f est de classe C^1 si elle a des dérivées partielles continues dans toutes les directions.

Θ Une fonction de classe C^1 est différentiable et de différentielle continue.

Δ Une fonction de classe C^p est une fonction de classe C^1 telle que df est de classe C^{p-1}.

Θ Les C^p sont des espaces vectoriels.

Δ Pour une fonction deux fois différentiable f, le hessien est $d^2 f$. La matrice hessienne de f est $Hf_{(h,k)}$.

Θ (Schwarz) Si f est de classe $C^k, k \geqslant 2$, alors les opérateurs de dérivation partielles commutent.

E La fonction $f(x, y) =$ et $f(0, 0) = 0$ admet des dérivées partielles secondes qui ne commutent pas.

Θ (formule de Taylor) Si f est une application de classe C^{n+1} sur un ouvert U et si $[a, a+h] \subseteq U$, alors on a $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f_a(h)^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f_{a+th}(h)^{n+1} dt$.

2.2 Extremums libres : condition d'ordre 1

Δ Un point critique d'une application différentiable f est un point x tel que df_x n'est pas de rang maximal, *i.e.* tel que $df_x = 0$ car ici f est à valeurs réelles.

Θ (condition nécessaire d'extremum local du premier ordre) Si f est différentiable sur un ouvert et y admet un extremum, alors c'est un point critique.

R Il n'y a pas de réciproque, ainsi $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 qui n'est pas un extremum local.

A Si D_1 et D_2 sont deux droites non coplanaires de $\mathbf{R}^m$, de paramétrages respectifs $s \mapsto a + su$ et $t \mapsto b + tv$, alors la distance $(t, s) \mapsto d(D_1(s), D_2(t))$ atteint son minimum en un unique point (s_0, t_0), et $(D_1(s_0)D_2(t_0))$ est la perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

A Preuve de Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

A (moindres carrés) Si on se donne n points (x_i, y_i) du plan $\mathbf{R}^2$ avec les x_i non tous égaux, alors il existe un unique couple (λ, μ) minimisant $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

Δ Une valeur critique est l'image d'un point critique.

Θ (Sard) Si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est de classe C^1, alors l'ensemble des valeurs critiques de A est de mesure nulle.

2.3 Problèmes géométriques

Δ Un sommet est un point de courbure extrémale.

Θ (Quatre sommets) Une courbe de Jordan convexe admet au moins quatre sommets.

Δ L'aire d'une partie K est $\iint_K dxdy$.

Θ (Green-Riemann) Soit K un compact à bord de $\mathbf{R}^2$, et $d\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur un ouvert contenant K. Alors $\int_{\partial K^+} d\omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

Θ L'aire d'un compact à bord K est $A = \iint_K dxdy = \int_{\partial K^+} xdy = -\int_{\partial K^+} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2 d\theta$.

E
- ⋆ l'aire de l'ellipse est πab
- ⋆ l'aire de la cardioïde $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$ est $\frac{3}{2}\pi a^2$

Θ (Inégalité isopérimétrique) Si C est une courbe fermée simple de longueur l et enfermant une aire A, alors $l^2 \geqslant 4\pi A$ et il y a égalité si, et seulement si, la courbe est un cercle.

2.4 Extremums libres : condition d'ordre 2

Θ Si f est deux fois différentiable, alors en un minimum (resp. maximum) local x, $H_x f$ est positive (resp. négative).

Θ Si f est deux fois différentiable et si, en un point critique x, $H_x f$ est définie positive (resp. négative), alors c'est un minimum (resp. un maximum) local strict.

A (cas de la dimension 2) ESi f est de classe C^2, alors en notant $r = f''_{xx}$, $s = f''_{xy}$ et $t = f''_{yy}$, on a :

- ⋆ si $rt - s^2 > 0$, on est en présence d'un extremum relatif
- ⋆ si $rt - s^2 \leqslant 0$, on ne peut rien dire

Δ On se place dans le cas $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. (x,y) est un point selle de f si $f(x,\cdot)$ admet un maximum (resp. minimum) local en y et si $f(\cdot,y)$ admet un minimum (resp. maximum) local en x.

Θ (condition de point selle) Si f est deux fois différentiable en un point critique a et si $Hf(a)$ est non-définie et non-dégénérée, alors a est un point celle de f.

2.5 Extremums liés

Θ (Extremums liés) Si la restriction de $f \in C^1$ à $A = \{\forall i, g_i = \alpha_i\}$ admet un extremum local en a et si la famille $(dg_i(a))_i$ est libre, alors $df(a) \in Vect((dg_i(a))_i)$, ou encore $\bigcap_i Ker(dg_i(a)) \subseteq Ker df(a)$.

A Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à trois rebonds.

A (théorème spectral) Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable en base orthonormée.

A Si $K = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall i, \|M\_i\| = 1$, alors K est compact et $argmax_K \det = SO_n(\mathbf{R})$.

Θ (Euler-Lagrange) Pour qu'une courbe γ allant de $a = \gamma(\alpha)$ à $b = \gamma(\beta)$ soit extrémale pour le critère $\int_\alpha^\beta F(t,\phi(t),\phi'(t))dt$, il faut que les équations d'Euler-Lagrange soient vérifiée pour tout $t \in [\alpha,\beta]$, soit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(t,\phi(t),\phi'(t)) = \frac{\partial L}{\partial u}(t,\phi(t),\phi'(t))$.

Δ Une géodésique entre deux points a et b est une courbe reliant a et b et de longueur minimale.

E
- ⋆ le plus court chemin entre deux points dans un espace euclidien est la ligne droite, et la distance est la distance euclidienne
- ⋆ les plus court chemin entre deux points sur une sphère sont les arcs de grands cercles, et la distance est l'angle $d(u,v) = \arccos(\langle u,v\rangle)$
- ⋆ les géodésiques du cylindre sont les hélices à pas constant

Δ Une brachistochrone est une courbe minimisant le temps de parcours d'un point pesant entre deux points a et b.

E
- ⋆ les brachistochrones du plan sont les arcs de cycloïdes

2.6 Fonctions convexes

Full caractérisations

Programmation convexe : Farkas-Minkowski, cônes tangents, conditions de Kuhn-Tucker, cf. [Ciarlet(), ch. 9]

3 Inversion locale

3.1 Difféomorphismes et inversion locale

Δ Une fonction $f : U \to \mathbf{R}^q$ est un C^k-difféomorphisme si f est un homéomorphisme bi-C^k.

E
- ⋆ $\mathbf{R}$ et B sont difféomorphes via $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|^2}$
- ⋆ $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ et S^1 sont difféomorphes via la projection stéréographique

Θ Un homéomorphisme de différentielle inversible en tout point est un difféomorphisme.

Θ Si $\phi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme et si $f : V \to \mathbf{R}$ est intégrable, alors on a la formule de changement de variables $\int_V f(x)dx = \int_U f(\phi(t)) \det(\phi(t))dt$.

A $\int_{\mathbf{R}} e^{-ax^2}dx$.

Θ (inversion locale) Si f est de différentielle inversible en a, alors f est un difféomorphisme d'un voisinage de a dans son image.

Δ Un difféomorphisme local est une application qui induit un difféomorphisme au voisinage de tout point. Par le théorème d'inversion locale, il suffit que ce soit une application différentiable de différentielle inversible en tout point.

E Racine carrée

Θ (Inversion globale) Si f est injective et de différentielle inversible en tout point, alors f est un difféomorphisme de U sur son image.

E Coordonnées polaires.

Θ (Hadamard-Levy) Soit $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, elle est propre et de différentielle inversible en tout point.

3.2 Fonctions implicites

Θ (fonctions implicites) Si f est une application de classe C^1 sur $U \times V$ telle que $D_y f(a, b)$ soit un isomorphisme de F sur G, alors il existe un voisinage A de a et un voisinage W de $f(a, b)$ et une unique application $\phi : A \times W \to V$ de classe C^1 telle que $\forall (x, y) \in A \times W$, on ait $f(x, g_1(x, w)) = w$.

Θ Dans ce cas, on a $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout x, donc en particulier $D\phi(x) = -(D_y f(x, g(x))^{-1} \circ D_x(x, g(x))$.

A

3.3 Formes canoniques

Δ Une immersion de classe C^k d'un ouvert U dans $\mathbf{R}^p$ est une application de classe C^k de différentielle injective en tout point.

Θ (immersion) Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est de classe C^1 et si df_0 est injective, alors il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^p$, un ouvert $U' \subseteq U$ tel que $f(U') \subseteq V$, et un difféomorphisme ϕ de V sur son image tels que $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)))(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

E

Δ Une submersion de classe C^k d'un ouvert U dans $\mathbf{R}^p$ est une application de classe C^k de différentielle surjective en tout point.

Θ (submersion) Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est de classe C^1 et si df_0 est surjective, alors il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^p$ et un difféomorphisme ψ de W sur son image tels que $\psi(W) \subseteq U$ et $f(\psi(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_q)$.

E

Θ (rang constant) Si f est de différentielle de rang constant sur un ouvert U, alors on peut trouver un changement de coordonnées à la source et au but pour obtenir la projection sur les r premières coordonnées.

4 Géométrie différentielle

4.1 Sous-variétés

Δ Une sous-variété M de dimension p est un ouvert tel que pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $U \in V(a)$ et un difféomorphisme $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbf{R}^p$.

E La sphère S^{n-1} est une variété différentielle de dimension $n-1$.

Θ Il y a équivalence entre les caractérisations suivantes des variétés différentiables M de dimension p :

- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \to \mathbf{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$
- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbf{R}^p$ contenant 0, et une application $h : \Omega \to \mathbf{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbf{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $\mathbf{R}^n \cap U$
- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbf{R}^p$ contenant $(a^1, \ldots, a^p)$ et une application lisse G de V dans $\mathbf{R}^{n-p}$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ soit égal au graphe de G

E Le tore, le groupe orthogonal sont des variété différentiables.

E Une paramétrisation du cercle S^1 est $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$.

4.2 Vecteurs tangents, espaces tangents, géométrie riemanienne

Δ Un vecteur tangent à M en a est un vecteur u tel qu'il existe une courbe $\gamma : [-1, 1] \to M$ tracée sur M telle que $\gamma'(0) = u$.

Θ Dans le cas des variétés, les vecteurs tangents à M en a sont $Im(df_a)$.

Δ L'espace tangent $T_a M$ à M en a est l'ensemble des vecteurs tangents à M en a.

E Surfaces de $\mathbf{R}^3$.

4.3 Groupes et algèbres de Lie

Δ Un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$ est un morphisme continue de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbf{R})$.

Θ Si $\gamma : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe à un paramètre, alors γ est analytique et $\forall t \in \mathbf{R}, \gamma(t) = \exp(tA)$ où $A = \gamma'(0)$.

Δ L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire G est $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}$.

E
- ⋆
- ⋆
- ⋆

Θ $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ stable par le crochet de Lie $[X, Y] = XY - YX$.

Θ (Cartan-von Neumann) L'exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans un voisinage de I dans G. Tout groupe linéaire fermé est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, d'espace tangent en l'identité $\mathfrak{g}$.

A $\mathfrak{g}$ détermine la composante neutre de G.

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème d'inversion locale, []**
  - ⋆ **Cartan-von Neumann, [Faraut(2006)]**
  - ⋆ **Thgéorème d'Hamadard-Levy, [H. Queffélec(2007)]**

Références

Le plan est celui de [**?**] ou de [Avez(1985)] tous deux très autocontenus et efficaces, le premier proposant beaucoup d'exemples. [Rouvière(2009)] contient beaucoup de matière pour compléter et illustrer, de bonnes remarques et heuristiques. Éventuellement l'accompagner des mines à idées que sont [S. Francinou(2007b)] et [Chambert-Loir-Fermigier(1996c)].

Rapport du jury. Cette partie du programme faisait figure de nouveauté dans la leçon d'algèbre et géométrie ; les exemples d'études de courbes exigées par les titres ont souvent pêché par excès de simplicité, sinon par manque d'intérêt ; par contre, les hypothèses faites sont quelquefois d'une complication disproportionnée aux applications qui en sont déduites. Ce que le jury attend pour une leçon d'exemples sur les courbes ou les surfaces, c'est un cadre théorique maniable, excluant les cas pathologiques, et s'adaptant immédiatement aux exemples qui suivent, et qui doivent recouvrir un maximum de configurations différentes. Il est également bien évident que le calcul différentiel utilisé doit être absolument dominé et qu'un calcul commencé doit être terminé, vite et bien...

Φ Les courbes fascinent depuis toujours, malgré le fait que ce soient les objets géométriques non triviaux apparemment les plus simples. Depuis la préhistoire, les poteries mettent en valeurs des courbes particulières, et plus particulièrement encore dans l'art architectural grec, bien avant leur étude mathématique. Puis l'étude des courbes est avant tout un ésotérique jeu de l'esprit des géomètres, étudiant les sections coniques comme d'autres courbes tracées par des procédés constructifs. Mais le stade des métaclassifications des courbes en mécaniques et géométriques laisse place, avec la révolution cartésienne, à une étude analytique des courbes. Ce n'est que très tardivement que des efforts pour atteindre une plus grande valeur épistémique dans la géométrie sont menés, essayant de dégager le caractère intrinsèque et général de la géométrie, et si les outils restent les mêmes, l'étude métrique des courbes connaît son essor à partir du XIXe siècle, avec les premiers travaux « modernes » de géométrie différentielle des courbes par Gauss (1823), puis de nombreux résultats majeurs, plus topologiques et globaux, avec Jordan puis Milnor. C'est toutefois avec les idées de Newton et de l'avènement du calcul différentiel que nous nous plaçons, en tâchant de tirer parti de tout ce que le calcul différentiel peut apporter concernant les propriétés locales des courbes.

H Classification grossière avec les grecs, très métaphysique. Puis des classifications par les outils précis nécessaires au tracé par les arabres, premières classifications par le degré. Effor fulgurant de l'étude des courbes avec Descartes et Newton, étudiées pour elles-mêmes, pour l'ingénierie ou la physique, etc.

Avis. La leçon est à illustrer généreusement : exemples divers et variés de problèmes géométriques ou physiques historiques, nombreux dessins.

⋆ ⋆ ⋆

E est un espace affine euclidien, éventuellement orienté.

1 Propriétés générales des courbes

1.1 Courbes paramétrées

Δ Un arc paramétré de E de classe C^p est une application de classe C^p $\gamma : I \to E$.

E
- ⋆ $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), t \in \mathbf{R}$, est une hélice (paramétrage cartésien)
- ⋆ $\rho(\theta) = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, est une strophoïde (paramétrage polaire)
- ⋆ $x^2 + y^2 = 1, (x, y) \in \mathbf{R}^2$ est un cercle (paramétrage implicite)

Δ Un arc est fermé s'il est périodique et de classe C^p. Il est régulier si ses p premières dérivées forment un système libre.

Δ Un reparamétrage (direct) de classe C^p d'un arc γ est un arc β tel qu'il existe un C^p-difféomorphisme (croissant) ϕ tel que $\beta = \gamma \circ \phi$. Une courbe cinématique (orientée) est une classe d'équivalence pour cette relation. Une notion invariante par reparamétrage (direct) est une notion géométrique (orientée). La trace d'une courbe est une courbe géométrique.

E
- ⋆ Deux paramétrages équivalents de l'ellipse sont $(a\cos\pi t, b\sin\pi t)$ sur $[0, 2]$ et $(a\cos 2\pi t, b\sin 2\pi t)$ sur $[0, 1]$
- ⋆ Deux paramétrages équivalents de la néphroïde sont $\rho(\theta) = a\sin\frac{\theta}{2}$ et $\frac{a}{2}(\cos t + \cos 3t, \sin t + \sin 3t)$

1.2 Variations sur les définitions des courbes

Θ Une variété de dimension 1 connexe et dénombrable à l'infini est difféomorphe à S^1 si elle est compacte, à $\mathbf{R}$ sinon.

Θ (Moore) si X est un compact connexe et si a et b sont deux points tels que pour tout autre point x, $E\backslash\{x\}$ se décompose en deux ouverts connexes disjoints $A_x \ni a$ et $B_x \ni b$, alors E est homéomorphe à $[0, 1]$.

1.3 Courbes de Jordan

Δ Une courbe de Jordan est une courbe fermée simple, *i.e.* une injection continue du cercle.

Θ (Jordan) Le complémentaire d'une courbe de Jordan dans un plan affine réel est formé d'exactement deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan. Les points de la composante connexe bornée sont caractérisés par un indice par rapport à la courbe valant ± 1 en fonction de l'orientation, les autres ont un indice nul.

R Généralisations

R Sphère cornue d'Alexandrov

2 Propriétés métriques du premier ordre

2.1 Longueur et vitesse

Δ La longueur de la courbe polygonale inscrite dans γ, donnée par les points $\gamma(t_i)$ avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, est $l(P) = \sum_i \|P(t_{i+1}) - P(t_i)\|$. La longueur d'une courbe γ est le supremum des longueurs polygonales inscrites, *i.e.* $l(\gamma) = \sup\{\sum |P(a_{i+1}) - P(a_i)| \mid a = a_0 < \cdots < a_n = b \text{ et } P =< a_0, \ldots, a_n >\}$. Une courbe est rectifiable si sa longueur est finie.

E
- ⋆ Toute courbe polygonale est rectifiable
- ⋆ La courbe de von Koch n'est pas rectifiable
- ⋆ La courbe de Peano n'est pas rectifiable

Θ Si la courbe γ est C^1, alors elle est rectifiable et $l(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'\|$. $\|\gamma'\|$ est la vitesse de γ.

Θ (Formules planes)

Forme donnée	Cartésien	Polaire	Grap
Longueur	$\int_I \sqrt{\gamma_1'^2 + \cdots + \gamma_n'^2}$	$\int_I \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}$	$\int_I \sqrt{1}$

E
- ⋆ La longueur de la cardioïde $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ est $6a$
- ⋆ La longueur de l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ est $2\pi ab$
- ⋆ Le courbe $\gamma(t) = (t, t\sin(\pi/t))$ est de longueur infinie.

Θ Si $\gamma = X(u, v)$ est une courbe tracée sur une surface lisse, alors $l_{a,b}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$ où E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale de X.

2.2 Problèmes de minimisation

Θ (Euler-Lagrange) Pour qu'une courbe γ allant de $a = \gamma(\alpha)$ à $b = \gamma(\beta)$ soit extrémale pour le critère $\int_\alpha^\beta F(t, \phi(t), \phi'(t))dt$, il faut que les équations d'Euler-Lagrange soient vérifiée pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, soit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(t, \phi(t), \phi'(t)) = \frac{\partial L}{\partial u}(t, \phi(t), \phi'(t))$.

Δ Une géodésique entre deux points a et b est une courbe reliant a et b et de longueur minimale.

E
- ⋆ le plus court chemin entre deux points dans un espace euclidien est la ligne droite, et la distance est la distance euclidienne
- ⋆ les plus court chemin entre deux points sur une sphère sont les arcs de grands cercles, et la distance est l'angle $d(u, v) = \arccos(\langle u, v\rangle)$
- ⋆ les géodésiques du cylindre sont les hélices à pas constant

Δ Une brachistochrone est une courbe minimisant le temps de parcours d'un point pesant entre deux points a et b.

E
- ⋆ les brachistochrones du plan sont les arcs de cycloïdes

2.3 Paramétrage normal et longueur d'arc

Δ Une courbe régulière est une courbe dont la vitesse γ' ne s'annule pas.

E
- ⋆ (t, t^3) n'est pas une courbe régulière
- ⋆ La courbe de Lebesgue n'est pas régulière, sa vitesse est nulle presque partout !

Δ Un paramétrage normal d'une courbe est un paramétrage tel que la vitesse soit constante égale à 1.

Θ Les courbes paramétrables normalement sont les courbes régulières, et les seuls tels reparamétrages sont par longueur d'arc : $s(t) = \pm \int_{t_0}^{t} |\gamma'|$ pour un $t_0 \in I$. Une variable s suppose dorénavant un paramétrage par longueur d'arc.

2.4 Approximation au premier ordre

Δ La tangente à γ en t, si elle existe, est la droite limite de $(\gamma(t), \gamma(t+h))$ lorsque $h \to 0$.

Θ Si l'arc est C^1, alors il admet des tangentes en tout point, dirigées par γ'.

Δ Le vecteur tangent unitaire est $t(s) = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma(s)\|} = \gamma'(s)$.

Θ (Relèvement) Pour un arc de classe C^p ne passant pas par O, il existe $\theta \in C^{p-1}$ tel que $(\vec{i}, O\vec{\gamma}(t))) = \theta(t)$, appelé détermination angulaire de la courbe.

Θ Si θ est une détermination angulaire de γ, $t = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. En tout point régulier, $\tan\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$.

2.5 Problèmes d'aires

Δ L'aire d'une partie K est $\iint_K dxdy$.

Θ (Green-Riemann) Soit K un compact à bord de $\mathbf{R}^2$, et $d\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur un ouvert contenant K. Alors $\int_{\partial K^+} d\omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

Θ L'aire d'un compact à bord K est $A = \iint_K dxdy = \int_{\partial K^+} xdy = -\int_{\partial K^+} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2 d\theta$.

E
- ⋆ l'aire de l'ellipse est πab
- ⋆ l'aire de la cardioïde $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$ est $\frac{3}{2}\pi a^2$

Θ (Inégalité isopérimétrique) Si C est une courbe fermée simple de longueur l et enfermant une aire A, alors $l^2 \geqslant 4\pi A$ et il y a égalité si, et seulement si, la courbe est un cercle.

3 Étude des courbes aux points singuliers

3.1 Points singuliers

Δ On note p le premier ordre tel que $\gamma^{(p)}(s)$ est non nul, et q le premier tel que $\gamma^{(q)}(s)$ est non colinéaire à $\gamma^{(p)}(s)$.

Θ Si s un point singulier de γ, alors
- ⋆ si p est pair et q pair, alors s est un point de rebroussement de seconde espère
- ⋆ si p est pair et q impair, alors s est un point de rebroussement de première espèce
- ⋆ si p est impair et q pair, alors s est un point ordinaire, ou méplat
- ⋆ si p est impair et q impair, alors s est un point d'inflexion

E
- ⋆
- ⋆

3.2 Étude asymptotique

On suppose que I possède une extrémité $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, et on étudie les limites en t_0.

Δ Si γ admet une limite en t_0, on dit que la courbe admet un point limite. Si γ tend vers ∞ en t_0, on dit que γ y admet une branche infinie.

E
- ⋆ $\gamma(t) = (Arctan(t), \frac{1}{t})$ possède un point limite en $+\infty$
- ⋆ $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ possède une branche infinie en $\pm\infty$

Δ Si la droite $O\gamma(t)$ admet une limite en t_0, cette limite est appelée direction asymptotique D de l'arc en t_0. C'est une branche parabolique si $d(\gamma(t), D) \to +\infty$, c'est la translatée d'une asymptote si $\gamma(t) \to l$.

E
- ⋆
- ⋆

4 Propriétés métriques du second ordre

4.1 Courbure

Δ La courbure de la courbe polygonale P inscrite dans γ, donnée par les points $\gamma(t_i)$ avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, est $k(P) = \sum_i \theta(P_{i-1}, P_i, P_{i+1})$, où $\theta(P_{i-1}, P_i, P_{i+1}) = \arccos\left(\frac{\langle P_{i+1}-P_i, P_{i-1}-P_i\rangle}{\|P_{i+1}-P_i\|\|P_{i-1}-P_i\|}\right)$. La courbure de γ est le supremum des courbures polygonales inscrites, *i.e.* $l(\gamma) = \sup\{\sum \theta(P_{i-1}, P_i, P_{i+1}) \mid a = a_0 < \cdots < a_n = b$ et $P =< a_0, \ldots, a_n >\}$.

Θ Si la courbe γ est de classe C^2, alors $k = \|\gamma''\|$. Les points d'annulation de la courbure sont les points d'inflexion.

Δ Une courbe birrégulière est une courbe dont la vitesse et l'accélération ne sont pas colinéaires, *i.e.* telle que $\gamma' \wedge \gamma''$ ne s'annule pas. γ'' est l'accélération.

E
- ⋆ Les courbes à courbure nulle sont les lignes droites
- ⋆ Les courbes à courbure constante sont les lignes et les cercles

Θ Si la courbe est birrégulière, $\kappa = \frac{det(v,a)}{v^3}$. Si θ est une détermination angulaire de γ, $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$.

Θ (Formules planes)

Forme donnée	Cartésien	Polaire	Graphe
Longueur	$\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$	$\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2})}$	$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$

Si θ est une détermination angulaire de γ, alors $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$.

E
- ⋆
- ⋆

Δ Le vecteur normal unitaire est le vecteur tel que $\gamma'' = k(s)n$. Le plan osculateur est le plan de repère $(\gamma(s), t(s), n(s))$.

Θ Le plan osculateur est le plan limite $((\gamma(s), t(s)), \gamma(s+h))$ quand $h \to 0$.

Θ On peut aussi définir tout cela pour une courbe tracée sur une surface grâce à la seconde forme fondamentale...

Θ (Détermination des courbes planes) Si on se donne $k > 0$ une fonction dérivable, il existe une courbe paramétrée ayant k pour courbure, et toute autre telle courbe s'obtient par déplacement et translation de celle-là.

Δ Un sommet est un point de courbure nulle.

Θ (Quatre sommets) Une courbe de Jordan convexe admet au moins quatre sommets.

4.2 Développée et développante

Δ L'inverse de la courbure est le rayon de courbure. C'est un invariant par changement d'orientation. Le point $\Omega(s) = \gamma(s) + R(s)n(s)$ est appelé centre de courbure de γ en $\gamma(s)$. On appelle cercle osculateur le cercle de centre $\Omega(s)$ et de rayon $R(s)$.

E
- ⋆ Le rayon de courbure de la cardioïde $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ est $R(\theta) = \frac{4}{3}\cos\frac{\theta}{2}$
- ⋆ Le rayon de courbure de la deltoïde $\gamma(t) = (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$ est $R(t) = -8\sin\frac{3t}{2}$.

Δ La développée est le lieu des centres de courbure.

E
- ⋆ la développée d'une ellipse est une astroïde
- ⋆ La développée de la sextique de Cayley $\rho(\theta) = 4a\cos^3\frac{\theta}{3}$ est la néphroïde centrée en $(\frac{a}{2}, 0)$ et passant par O.

Θ La développée d'une courbe est l'enveloppe de la famille des droites normales à la courbe.

Δ La développante de paramètre c est la courbe $\delta(s) = \gamma(s) - \gamma'(s)(s - c)$.

Θ Toute courbe est une développante de sa développée.

4.3 Quelques propriétés globales

Δ La courbure totale de γ est $\int_a^b \|\gamma''\|$.

Θ (Fenchel-Borsuk) Si γ est une courbe fermée simple, alors sa courbure totale est supérieure à 2π.

Θ (Umlaufsatz) Si γ est une courbe de Jordan, alors sa courbure totale signée $\int_a^b k(s)ds$ vaut $\pm 2\pi$.

5 Courbes dans l'espace

5.1 Torsion

Δ Le vecteur binormal est $b = t \wedge n$. Sa dérivée quantifie la vitesse de sortie du plan osculateur.

Δ La torsion est définie par $b'(s) = \tau(s)n(s)$.

Θ Formules pour la torsion

E
- ⋆ Les courbes de torsion nulle sont les courbes planes.

Δ Le trièdre de Frénet dans l'espace est le repère $(\gamma(s), t(s), n(s), b(s))$.

Θ (Frénet-Serret) On a les relations
- ⋆ $t' = kn$
- ⋆ $n' = -kt - \tau b$
- ⋆ $b' = -\tau n$

Θ (Forme locale canonique) On a dans le repère de Frénet :

$$\begin{cases} x(s) &= s - \frac{1}{6}s^2k^2 + R_x \\ y(s) &= \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}k's^3 + R_y \\ z(s) &= -\frac{1}{6}k\tau s^3 + R_z \end{cases}$$

où $R = (R_x, R_y, R_z) = o(s^3)$.

Et sur une surface, on a également les formules de Darboux dans le repère de Darboux-Ribeaucourt...

Θ (Détermination des courbes dans l'espace) Si on se donne $k > 0$ et τ deux fonctions dérivables, il existe une courbe paramétrée ayant ces paramètres pour courbure et torsion respectivement, et toute autre telle courbe s'obtient par déplacement et translation de celle-là.

Autres idées à explorer...

Cauchy-Crofton, Mettre les formules explicites lorsqu'on en a, Enveloppes de courbes (cf. Audin), Plus de courbes particulières, Plus de géodésiques ?

- **Développements.**

  - ⋆ **Théorème de Jordan, [S. Gonnord(1998)]**
  - ⋆ **Inégalité isopérimétrique, [do Carmo(1976)]**
  - ⋆ **Variétés connexes compactes de dimension 1, [Lafontaine(2010)]**

Références

La leçon se fait avec [do Carmo(1976)] et son approche naturelle, ses nombreux exemples, et des compléments notamment au niveau calculatoire dans [Laville()]. Les enveloppes de courbes sont un joli sujet brièvement abordé par [Audin(2006)]. Des exercices et résultats plus poussés dans [S. Francinou(2012)] et [Chambert-Loir-Fermigier(1996c)]. Consulter le très agréable [**?**] pour avoir des réflexions et intuitions sur plusieurs résultats et développements de la théorie.

Rapport du jury. Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, etc.) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. En ce qui concerne les surfaces de R3, les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométriques. Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

Φ On connaît les fruits du calcul différentiel en termes d'études de courbes ou d'extremums dans $\mathbf{R}^n$, on chercher donc naturellement à pouvoir étudier pareillement une fonction qui est définie sur un espace particulier, assez lisse pour que l'on puisse différentier.

H Les premières études sur les surfaces sont dues à Gauss, largement développées par Darboux puis enfin généralisées en des sous-variétés et des variétés générales par Riemann. La physique exploite dès le début du XXe siècle ce formalisme nouveau de la géométrie sur des surfaces générales.

Avis. Il faut des dessins et montrer que c'est le cadre parfait pour faire de la géométrie différentielle comme dans l'espace euclidien, tout se passant à travers des changements de coordonnées. Les formes fondamentales viennent naturellement remplacer les outils qui ne sont plus naturels une fois quitté le cadre de $\mathbf{R}^n$, et la géométrie sur les sous-variétés se transporte alors parfaitement dans le cadre riemanien, que l'on peut juste mentionner. La recherche des géodésiques, des brachistocrhones, etc. donnent des illustrations qui sortent des seuls résultats généraux. Les surfaces doivent avoir une place consacrée, et les courbes tracées sur les surfaces également. Des résultats de géométrie Riemanienne sont les bienvenus, mais il ne faut pas en faire une leçon trop théorique comme le souligne le rapport.

⋆ ⋆ ⋆

1 Sous-variétés [Lafontaine(2010)] et [Rouvière(2009)]

1.1 Immersions et submersions

Δ Une immersion de classe C^k d'un ouvert U dans $\mathbf{R}^p$ est une application de classe C^k de différentielle injective en tout point.

Θ (immersion) Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est de classe C^1 et si df_0 est injective, alors il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^p$, un ouvert $U' \subseteq U$ tel que $f(U') \subseteq V$, et un difféomorphisme ϕ de V sur son image tels que $\phi(f(x_1,\ldots,x_n)))(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$.

E

Δ Une submersion de classe C^k d'un ouvert U dans $\mathbf{R}^p$ est une application de classe C^k de différentielle surjective en tout point.

Θ (submersion) Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est de classe C^1 et si df_0 est surjective, alors il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^p$ et un difféomorphisme ψ de W sur son image tels que $\psi(W) \subseteq U$ et $f(\psi(x_1,\ldots,x_n)) = (x_1,\ldots,x_q)$.

E

Θ (rang constant) Si f est de différentielle de rang constant sur un ouvert U, alors on peut trouver un changement de coordonnées à la source et au but pour obtenir la projection sur les r premières coordonnées.

1.2 Sous-variétés et caractérisations

Δ Une sous-variété M de dimension p est un ouvert tel que pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $U \in V(a)$ et un difféomorphisme $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbf{R}^p$.

E La sphère S^{n-1} est une variété différentielle de dimension $n-1$.

Θ Il y a équivalence entre les caractérisations suivantes des variétés différentiables M de dimension p :

- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \to \mathbf{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$
- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbf{R}^p$ contenant 0, et une application $h : \Omega \to \mathbf{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbf{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $\mathbf{R}^n \cap U$
- ⋆ pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbf{R}^p$ contenant $(a^1,\ldots,a^p)$ et une application lisse G de V dans $\mathbf{R}^{n-p}$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ soit égal au graphe de G

E
- ⋆ Le tore, le groupe orthogonal sont des variété différentiables.
- ⋆ Une paramétrisation du cercle S^1 est $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$.

Θ Une variété de dimension 1 connexe et dénombrable à l'infini est difféomorphe à S^1 si elle est compacte, à $\mathbf{R}$ sinon.

Δ Si M et N sont deux sous-variétés C^k et $f : M \to N$, f est dite de classe C^k si elle est C^k à travers des cartes locales. Plus précisément, elle est C^k en x s'il existe des paramétrisations (U,ϕ) et (V,ψ) en x et $f(x)$ telles que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \to \phi(V)$ est de classe C^k en x.

1.3 Vecteurs tangents, espaces tangents

Δ Un vecteur tangent à M en a est un vecteur u tel qu'il existe une courbe $\gamma : [-1,1] \to M$ tracée sur M telle que $\gamma'(0) = u$.
Δ L'espace tangent T_aM à M en a est l'ensemble des vecteurs tangents à M en a.

Θ Dans le cas des variétés, l'espace tangent de M en a est donné par :

- ⋆ $Im(df_a)$ si...
- ⋆ $Ker(dg_a)$ si...

E Surfaces de $\mathbf{R}^3$.

Θ (boule chevelue) Il existe un champ continu de vecteurs unitaires tangents à la sphère S^{n-1} de $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, n est pair.

1.4 Extension aux variétés générales

R Il suffit de se donner les moyens d'avoir des cartes locales pour raisonner de la même manière.
Δ Variété

Θ (Whitney) Tout variété compacte lisse de dimension n se plonge dans $\mathbf{R}^{2n}$.

Θ (Extremums liés) Si la restriction de $f \in C^1$ à $A = \{\forall i, g_i = \alpha_i\}$ admet un extremum local en a et si la famille $(dg_i(a))_i$ est libre, alors $df(a) \in Vect((dg_i(a))_i)$, ou encore $\bigcap_i Ker(dg_i(a)) \subseteq Ker df(a)$.

A Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à trois rebonds.

A (théorème spectral) Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable en base orthonormée.

A Si $K = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall i, ||M\_i| = 1$, alors K est compact et $argmax_K \det = SO_n(\mathbf{R})$.

2 Propriétés métriques sur les variétés [do Carmo(1976)] et [Laville()]

2.1 Courbes sur des variétés

Θ Si $\gamma = X(u,v)$ est une courbe tracée sur une surface lisse, alors $l_{a,b}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$ où E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale de X.

Θ Si la courbe est paramétrée par longueur d'arcs, alors on définit sa courbure normale $\kappa_N = Lu'(s)^2 + 2Mu'(s)v'(s) + Nv'(s)^2$ où $L = \frac{[\partial_u x, \partial_v x, \partial_{u^2} x]}{\|\partial_u x \wedge \partial_v x\|}, M = \frac{[\partial_u x, \partial_v x, \partial_{uv} x]}{\|\partial_u x \wedge \partial_v x\|}, N = \frac{[\partial_u x, \partial_v x, \partial_{v^2} x]}{\|\partial_u x \wedge \partial_v x\|}$.

Θ L'ensemble des courbures normales possibles est $[\kappa_1, \kappa_2]$ où $\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$ et $\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$.

2.2 Surfaces

S est une surface de $\mathbf{R}^3$, $p \in S$.

Δ La première forme quadratique fondamentale est $I_p : x \in T_pS \mapsto \langle x, x \rangle$.
Δ Une surface est orientée si on peut la munir d'une application continue qui à tout point lui associe un vecteur normal unitaire, appelée application de Gauss, notée n. Sa différentielle est l'endomorphisme de Weingarten.
Δ La seconde forme bilinéaire fondamentale est $II_p : (x,y) \in\in T_pS \times T_pS \mapsto -\langle d_pn(x), y \rangle$.
Δ La courbure de Gauss d'une surface est le produit des extremums de II_p/I_p.
Δ Isométries

Θ (theorema egregium) Si deux nappes C^3 sont isométriques, alors elles ont même courbure de Gauss.

Θ (Jordan-Brouwer) Une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ compacte connexe et orientable de dimension $n-1$ sépare $\mathbf{R}^n$ en deux composantes connexes dont une seule est bornée.

Θ Surfaces minimales

Θ Coordonnées harmoniques

Formules de Darboux-Ribeucourt ?

2.3 Métriques riemaniennes [do Carmo()] ou [Galot()]

R Il suffit de se donner les moyens d'avoir ces formes fondamentales pour raisonner de la même manière.
Δ Structure riemanienne

3 Groupes de Lie [Faraut(2006)] et [R. Mneimné(2009)]

3.1 Sous-groupes à un paramètre et algèbres de Lie

Δ Un sous-groupe à un paramètre est (l'image d')un morphisme additif continu de $\mathbf{R}$ dans $GL_n(\mathbf{C})$.

Θ Pour un groupe à un paramètre $t \mapsto \phi(t)$, il existe une unique $X \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $\phi(t) = exp(tX)$, à savoir ϕ est dérivable et $X = \phi'(0)$.
Δ Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{C})$ on définit $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbf{C}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, exp(tX) \in G\}$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre contenus dans G. $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure d'algèbre de Lie avec $[A,B] = AB - BA$, appelée l'algèbre de Lie de G.

E

- ⋆ $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}) = M_n(\mathbf{R})$
- ⋆ $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{R}) = Ker(Tr)$
- ⋆ $\mathfrak{so}_n = A_n(\mathbf{R})$
- ⋆ $\mathfrak{ts}_n(\mathbf{R}) = STS_n(\mathbf{R})$

3.2 Les groupes de Lie comme sous-variétés

Θ

- ⋆ $\lim_{p\to\infty} \left(I + \frac{1}{p}A\right)^p = exp(A)$
- ⋆ $\lim_{p\to\infty} \left(exp(\frac{A}{p})exp(\frac{B}{p})\right)^p = exp(A+B)$
- ⋆ $\lim_{p\to\infty} \left(exp(\frac{A}{p})exp(\frac{B}{p})exp(\frac{-A}{p})exp(\frac{-B}{p})\right)^{p^2} = exp(AB - BA) = \exp([A,B])$

Θ (Cartan-von Neumann) L'exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans un voisinage de I dans G. Tout groupe linéaire fermé est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, d'espace tangent en l'identité $\mathfrak{g}$.

A $\mathfrak{g}$ détermine la composante neutre de G.

3.3 Analyse sur les groupes de Lie

? cf. Faraut, si quelque chose exploite la géo diff...

Autres idées à explorer...

• **Développements.**

⋆ **Théorème de Cartan-von Neumann, [Faraut(2006)]**

⋆ **Théorème de D'Almebert-Gauss, [Milnor(1997)]**

⋆ **Variétés connexes compactes de dimension 1, [Lafontaine(2010)]**

Références

[Lafontaine(2010)] est tout indiqué pour la partie générale de cette leçon, à compléter par quelques exercices du [Rouvière(2009)]. Pour le cadre riemanien, le [Galot()] est très bien, ainsi que [do Carmo()]. Le [Faraut(2006)] fait tout ce qu'il y a à savoir d'élémentaire sur les groupes de Lie et des applications en analyse sur de tels groupes. Pour le métrique. [Laville()], [do Carmo(1976)] et [Chambert-Loir-Fermigier(1996c)] regorgent de matériel sur les courbes et les surfaces.

Rapport du jury. Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités (lorsque f et sa dérivée n-ème sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements. On fera attention au fait que les développements doivent faire intervenir les formules de Taylor de manière significative. Au hit-parade des formules de Taylor, c'est Taylor-Young qui vient en tète dans l'esprit des candidats, alors que ça devrait être Taylor avec reste intégral !

Φ Approximation des fonctions par des polynômes, utilité dans l'étude locale des comportements. On suit ici la démarche historique et intuitive des formules de Taylor : l'utilité d'une telle formule pour les polynômes pousse à chercher une approcmation du même type pour des fonctions générales, et c'est ce que donne la formule de Taylor-Young, permettant une estimation locale du comportement des fonctions. Cette estimation se précise en fonction des dérivées successives de la fonction avec la formule de Taylor-Lagrange et les nombreuses précisions de comportement que l'on en tire. Enfin, la formule de Taylor avec reste intégral explicite entièrement le reste et permet des analyses plus fines.

H Taylor et interpolation (1715), MacLaurin (1742), Lagrange (1797)

Avis. Il faut faire quelque chose de vivant avec cette leçon, ce qui ne semble pas évident au premier abord. Les petits amusements historiques autour de MacLaurin et des formules de Bernoulli sont les bienvenus, il serait néanmoins bien d'en trouver quelques aboutissements. L'analyse numérique et les formules de Taylor à plusieurs variables sont à exploiter sans conteste. La géométrie doit apparaître et les études locales donnent de beaux résultats : tangentes, points singuliers de courbes planes, lemme de Morse, rapports (Puiseux) entre courbure d'une courbe tracée sur une surface et courbure de la surface, etc. Éventuellement faire un plan suivant la démarche historique de précision croissante : attention aux preuves alors, qui généralement sont présentées comme découlant de l'expression du reste intégral ! Le faire dans le sens logique usuel est moins présentable, ou en tous cas il faut justifier d'aller vers l'affaiblissement des formes... Ne pas oublier les formules à plusieurs variables !

⋆ ⋆ ⋆

Θ (Taylor) Pour un polynôme P on a, pour tout $a \in \mathbf{C}$, $P(x) = P(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

1 Formule de Taylor-Young

1.1 Formule de Taylor-Young et développements limités

Θ Si $f \in C^n(I, \mathbf{R}^n)$ et $a \in I$, alors $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$. En fait il suffit que f admette des dérivées successives en a jusqu'à l'ordre n.

A On a les développements limités suivants :

- ★
- ★
- ★

A Calcul de limites

A Si f est de classe C^2 en a, alors $f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(x)}{h^2}$.

A Règle de l'Hospital–Bernouilli

A (lemme d'Hadamard)

Θ Unicité de la partie principale

Δ Un zéro a de f est dit d'ordre fini si $\inf\{n \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}$ est fini.

Θ Les zéros d'ordre fini d'une fonction $f \in C^2$ sont isolés.

1.2 Étude de comportement locaux des courbes et surfaces

Δ On note p le premier ordre tel que $\gamma^{(p)}(s)$ est non nul, et q le premier tel que $\gamma^{(q)}(s)$ est non colinéaire à $\gamma^{(p)}(s)$.

Θ Si s un point singulier de γ, alors

- ★ si p est pair et q pair, alors s est un point de rebroussement de seconde espère
- ★ si p est pair et q impair, alors s est un point de rebroussement de première espèce
- ★ si p est impair et q pair, alors s est un point ordinaire, ou méplat
- ★ si p est impair et q impair, alors s est un point d'inflexion

E

- ★
- ★

Θ (Forme locale canonique) On a dans le repère de Frénet :

$$\begin{cases} x(s) &= s - \frac{1}{6}s^2k^2 + R_x \\ y(s) &= \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}k's^3 + R_y \\ z(s) &= -\frac{1}{6}k\tau s^3 + R_z \end{cases}$$

où $R = (R_x, R_y, R_z) = o(s^3)$.

Θ Puiseux et rapports courbures des courbes et courbure de la surface

Θ (lemme de Morse) Soit f de classe C^3 sur un ouvert U contenant 0. Si $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe un C^1-difféomorphisme ϕ entre deux voisinages de 0, tel que $\phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \phi_1^2(x) + \cdots + \phi_p^2(x) - \phi_{p+1}^2(x) - \cdots - \phi_n^2(x)$.

1.3 Conditions et précisions d'extremums d'ordre 1

Δ Un point critique d'une application différentiable f est un point x tel que df_x n'est pas de rang maximal, *i.e.* tel que $df_x = 0$ car ici f est à valeurs réelles.

Θ (condition nécessaire d'extremum local du premier ordre) Si f est différentiable sur un ouvert et y admet un extremum, alors c'est un point critique.

R Il n'y a pas de réciproque, ainsi $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 qui n'est pas un extremum local.

A Si D_1 et D_2 sont deux droites non coplanaires de $\mathbf{R}^m$, de paramétrages respectifs $s \mapsto a + su$ et $t \mapsto b + tv$, alors la distance $(t,s) \mapsto d(D_1(s), D_2(t))$ atteint son minimum en un unique point (s_0, t_0), et $(D_1(s_0)D_2(t_0))$ est la perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

A Preuve de Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

A (moindres carrés) Si on se donne n points (x_i, y_i) du plan $\mathbf{R}^2$ avec les x_i non tous égaux, alors il existe un unique couple (λ, μ) minimisant $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

Δ Une valeur critique est l'image d'un point critique.

Θ (Sard) Si $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ est de classe C^1, alors l'ensemble des valeurs critiques de A est de mesure nulle.

1.4 Conditions et précisions d'extremums d'ordre 2

Θ Si f est deux fois différentiable, alors en un minimum (resp. maximum) local x, H_xf est positive (resp. négative).

Θ Si f est deux fois différentiable et si, en un point critique x, H_xf est définie positive (resp. négative), alors c'est un minimum (resp. un maximum) local strict.

A (cas de la dimension 2) ESi f est de classe C^2, alors en notant $r = f''_{xx}$, $s = f''_{xy}$ et $t = f''_{yy}$, on a :

- ★ si $rt - s^2 > 0$, on est en présence d'un extremum relatif
- ★ si $rt - s^2 \leqslant 0$, on ne peut rien dire

Δ On se place dans le cas $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. (x,y) est un point selle de f si $f(x,\cdot)$ admet un maximum (resp. minimum) local en y et si $f(\cdot,y)$ admet un minimum (resp. maximum) local en x.

Θ (condition de point selle) Si f est deux fois différentiable en un point critique a et si $Hf(a)$ est non-définie et non-dégénérée, alors a est un point celle de f.

1.5 Développements asymptotiques

Méthode de Laplace

Θ (Euler-MacLaurin)

2 Formule de Taylor-Lagrange

2.1 Formule de Taylor-Lagrange

Θ Si $f \in C^{n+1}([a,b])$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Il suffit en fait que la dérivée $(n+1)$-ième de f existe sur $]a,b[$.

Θ Cas à plusieurs variables

E Le résultat ne tient plus dans **C**, ainsi $f : t \mapsto e^{it}$...

Θ (Glaeser)

2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Θ Inégalité de TL

A Dérivabilité en un point

A Si $f \in C^1(I)$ admet un point fixe a, alors
- ⋆ Si $|f'(a)| < 1$, il y a un bassin d'attraction autour de a et la convergence est d'ordre 1
- ⋆ Si $f'(a) = 0$ et f'' ne s'annule pas, il y a convergence quadratique
- ⋆ Si $[f'(a) > 1|$, il y a un bassin de répulsion

A Accélération de convergence

A Indépendance de $(1, e, e^2)$

A C^2 cvx ⇔ courbe au-dessus de ses tangentes

A Comparaison exponentielle-polynômes

A (inégalités de Kolmogorov)

2.3 Méthode de calcul d'intégrale

E Analyse numérique : Newton, rectangles, Simpson, RK, Romberg, etc., différences finies

Noyau de Peano

3 Formule de Taylor avec reste intégral

3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

E Toute fonction n'est pas correctement développable en série de Taylor, ainsi qu'on le voit avec $x \mapsto e^{-1/x^2}$ qui a une partie principale nulle à tout ordre.

Θ Formule

Θ Cas à plusieurs variables

3.2 Développements en série entière

A Une fonction de classe C^∞ est un polynôme si, et seulement si, dérivées nulles à partir d'un certain rang.

A On a les développements en série entière suivants :
- ⋆ Pour tout réel x, $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$
- ⋆
- ⋆ La fonction plate $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ admet une partie principale de Taylor constamment nulle

E (Bernstein) Si une fonction f de classe C^∞ a toutes ses dérivées paires positives alors elle est développable en série entière.

Autres idées à explorer...
Théorème Central Limite, Hoffding

- **Développements.**
  - ⋆ **Formule d'Euler-MacLaurin**
  - ⋆ **Lemme de Morse, [Rouvière(2009)]**
  - ⋆ **Théorème de Glaeser, [S. Gonnord(1998)]**
  - ⋆ **Méthode de Newton pour les polynômes, [Chambert-Loir-Fermigier(1996b)]**
  - ⋆ **Phase stationnaire, [H. Queffélec(2007), ?]**

Références
[?] pour l'aspect historique et la structure du plan. Trouver quelque chose pour la base, un livre de taupe quelconque et bien rempli, tels les RDO. Puis [Rouvière(2009)] pour l'aspect différentiel, [Demailly(2006)] pour le numérique.

Rapport du jury. Bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence).

Φ Le recherche d'extremum est omniprésente tant pour les sciences théoriques que pour leurs avatars pratiques, car il s'agit de cerner le plus finement possible les limites d'une fonction donnée, que ce soit pour en contrôler les écarts ou pour en optimiser l'utilisation. Ce n'est qu'avec l'avènement du calcul différentiel de Newton que la physique et les mathématiques tirent le plein parti de cette notion étudiée depuis les problèmes isopérimétriques de l'école grecque qui n'avait pas vraiment d'outils adaptés. Dès lors, les méthodes n'ont cessé de proliférer mettant au jour des propriétés toujours plus fines des objets et des espaces étudiés, et c'est dans cette variété des méthodes, unifiées autour de la recherche d'extremums que s'insère cette leçon. On regarde le problème dans des cadres variés en augmentant le régularité des fonctions étudiées, puis en enrichissant la structure des espaces.

H Newton et Leibniz avec le calcul différentiel à une variable, rapidement étendu à plusieurs variables, puis à des espaces plus généraux avec Riemann. Cauchy apporte une grande classe d'outils d'obtention d'extremums avec les séries entières et les fonctions holomorphes. Puis topologie au début du XXe, puis explosion des recherches en ce sens avec le développement des mathématiques numériques et des ordinateurs.

Avis. Comme le titre – à peu près le seul de cette trempe dans tous les titres de leçons – l'indique, c'est une leçon d'illustrations non triviales où chaque résultat théorique général, chaque étude, chaque argument doit être motivé et mû par un problème naturel et justifié par lui, pour enfin le résoudre, le dépasser, en dévoiler l'essence pour la subsumer sous un univers plus vaste dont il n'est qu'une entrée et qui permet dès lors d'embrasser une multitude d'autres problèmes. Ce serait bien d'avoir un problème filé tout au long de la leçon... Il y a pléthore d'approches et de méthodes : puisque ce n'est pas une leçon de cours mais d'illustrations par des problèmes, il faut faire ressortir cette richesse à travers des outils topologiques, différentiels, variationnels, holomorphes, convexes, hilbertiens, numériques, etc.

⋆ ⋆ ⋆

On considère une fonction $f : X \to \mathbf{R}$ où X est une partie d'un espace E.

1 Le cadre topologique

1.1 Continuité et compacité

Θ Une fonction continue sur un compact non vide est bornée et atteint ses bornes.

A Si E est un espace métrique, la distance $d(x, A)$ d'un point $x \in E$ à un compact K de E est atteinte.

A La distance de Haussdorf $d(A, B) = \max(\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b), \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(a, b))$ munit l'ensemble des parties compactes d'une structure d'espace métrique compact.

A (Rolle) Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Δ Une application f est coercive si $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini, *i.e.* si $\forall M > 0, \exists C, \eta \in \mathbf{R}, \forall x \in X, (\|x\| \geqslant C \vee f(x, X^c) \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) > M)$.

Θ Une fonction continue et coercive en dimension finie est minorée et atteint sont minimum.

A Si E est un espace métrique, la distance $d(x, F)$ d'un point $x \in E$ à un fermé F de E est atteinte.

A (Point de Fermat) Si ABC est un triangle non plat et d'angles inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, alors il existe un point M minimisant la distance aux trois points $MA + MB + MB$.

A (D'Alembert-Gauss) $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, *i.e.* tout polynôme à coefficients complexes admet une racine de $\mathbf{C}$.

A Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

A Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue, alors il existe un polynôme de meilleure approximation $P \in \mathbf{R}_n[X]$, *i.e.* vérifiant $\|f - P\|_\infty = \inf_{E_n} \|f - Q\|_\infty$.

1.2 Semi-continuité inférieure

Δ Une fonction ϕ est semi-continue inférieurement si pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, l'ensemble $(\phi \leqslant \lambda)$ est fermé.

Θ Une application semi-continue inférieurement admet un minimum sur un compact, et ce minimum est atteint.

2 Le cadre différentiable

2.1 Extremums libres : condition d'ordre 1

Δ Un point critique d'une application différentiable f est un point x tel que df_x n'est pas de rang maximal, *i.e.* tel que $df_x = 0$ car ici f est à valeurs réelles.

Θ (condition nécessaire d'extremum local du premier ordre) Si f est différentiable sur un ouvert et y admet un extremum, alors c'est un point critique.

E Il n'y a pas de réciproque, ainsi $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 qui n'est pas un extremum local.

A Si D_1 et D_2 sont deux droites non coplanaires de $\mathbf{R}^m$, de paramétrages respectifs $s \mapsto a + su$ et $t \mapsto b + tv$, alors la distance $(t, s) \mapsto d(D_1(s), D_2(t))$ atteint son minimum en un unique point (s_0, t_0), et $(D_1(s_0)D_2(t_0))$ est la perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

A Preuve de Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

A (moindres carrés) Si on se donne n points (x_i, y_i) du plan $\mathbf{R}^2$ avec les x_i non tous égaux, alors il existe un unique couple (λ, μ) minimisant $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

Δ Une valeur critique est l'image d'un point critique.

Θ (Sard) Si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est de classe C^1, alors l'ensemble des valeurs critiques de A est de mesure nulle.

2.2 Problèmes géométriques

Δ Un sommet est un point de courbure extrémale.

Θ (Quatre sommets) Une courbe de Jordan convexe admet au moins quatre sommets.

Δ L'aire d'une partie K est $\iint_K dxdy$.

Θ (Green-Riemann) Soit K un compact à bord de $\mathbf{R}^2$, et $d\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur un ouvert contenant K. Alors $\int_{\partial K^+} d\omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

Θ L'aire d'un compact à bord K est $A = \iint_K dxdy = \int_{\partial K^+} xdy = -\int_{\partial K^+} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2 d\theta$.

E
- ⋆ l'aire de l'ellipse est πab
- ⋆ l'aire de la cardioïde $\rho(\theta) = a(1 + \cos\theta)$ est $\frac{3}{2}\pi a^2$

Θ (Inégalité isopérimétrique) Si C est une courbe fermée simple de longueur l et enfermant une aire A, alors $l^2 \geqslant 4\pi A$ et il y a égalité si, et seulement si, la courbe est un cercle.

2.3 Extremums libres : conditions d'ordre 2

Θ Si f est deux fois différentiable, alors en un minimum (resp. maximum) local x, $H_x f$ est positive (resp. négative).

Θ Si f est deux fois différentiable et si, en un point critique x, $H_x f$ est définie positive (resp. négative), alors c'est un minimum (resp. un maximum) local strict.

A (cas de la dimension 2) Si f est de classe C^2, alors en notant $r = f''_{xx}$, $s = f''_{xy}$ et $t = f''_{yy}$, on a :

- ⋆ si $rt - s^2 > 0$, on est en présence d'un extremum relatif
- ⋆ si $rt - s^2 \leqslant 0$, on ne peut rien dire

Δ On se place dans le cas $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. (x, y) est un point selle de f si $f(x, \cdot)$ admet un maximum (resp. minimum) local en y et si $f(\cdot, y)$ admet un minimum (resp. maximum) local en x.

Θ (condition de point selle) Si f est deux fois différentiable en un point critique a et si $Hf(a)$ est non-définie et non-dégénérée, alors a est un point celle de f.

2.4 Extremums liés

Θ (Extremums liés) Si la restriction de $f \in C^1$ à $A = \{\forall i, g_i = \alpha_i\}$ admet un extremum local en a et si la famille $(dg_i(a))_i$ est libre, alors $df(a) \in Vect((dg_i(a))_i)$, ou encore $\bigcap_i Ker(dg_i(a)) \subseteq Ker df(a)$.

A Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à trois rebonds.

A (théorème spectral) Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable en base orthonormée.

A Si $K = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall i, ||M\_i| = 1$, alors K est compact et $argmax_K \det = SO_n(\mathbf{R})$.

Θ (Euler-Lagrange) Pour qu'une courbe γ allant de $a = \gamma(\alpha)$ à $b = \gamma(\beta)$ soit extrémale pour le critère $\int_\alpha^\beta F(t, \phi(t), \phi'(t))dt$, il faut que les équations d'Euler-Lagrange soient vérifiée pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, soit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(t, \phi(t), \phi'(t)) = \frac{\partial L}{\partial u}(t, \phi(t), \phi'(t))$.

Δ Une géodésique entre deux points a et b est une courbe reliant a et b et de longueur minimale.

E
- ⋆ le plus court chemin entre deux points dans un espace euclidien est la ligne droite, et la distance est la distance euclidienne
- ⋆ les plus court chemin entre deux points sur une sphère sont les arcs de grands cercles, et la distance est l'angle $d(u, v) = \arccos(\langle u, v\rangle)$
- ⋆ les géodésiques du cylindre sont les hélices à pas constant

Δ Une brachistochrone est une courbe minimisant le temps de parcours d'un point pesant entre deux points a et b.

E
- ⋆ les brachistochrones du plan sont les arcs de cycloïdes

3 Le cadre analytique et harmonique

U est un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$.

3.1 Principe du maximum

Δ Une fonction f est harmonique si elle est de classe C^2 et si $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Θ (Principe du maximum) Si f est une fonction harmonique sur $D(z_0, r)$, continue sur $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$, alors :

- ⋆ le maximum est atteint sur le bord $C(z_0, r)$ du disque : $\sup_{\overline{D}(z_0,r)} |f| = \sup_{C(z_0,r)} |f|$
- ⋆ s'il est atteint à l'intérieur alors la fonction est constante sur $\overline{D}(z_0, r)$

A (Gelfond-Schneider) cf. livre de Waldschmidt, nombres transcendants, Springer

A (Hermite-Lindemann)

A Lemme des trois droites ? [H. Queffélec(2007)]

A Triangle d'aitre max dans un cercle, cf. Pompom

A (problème de Dirichlet) Su U est un ouvert connexe borné et si $g : \partial U \to \mathbf{R}$ est continue, alors il existe au plus une fonction $\overline{g} : U \to \mathbf{R}$ harmonique et prolongeant g.

Θ (lemme de Schwartz) si $f : D(0,1) \to D(0,1)$ est holomorphe et $f(0) = 0$, alors :

- ⋆ Pour tout $z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leqslant |z|$
- ⋆ $|f'(0)| \leqslant 1$
- ⋆ Si $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \neq 0$, alors f est une rotation, *i.e.* $\exists \lambda \in \mathbf{U}, f : z \mapsto \lambda z$

A (application ouverte) Si U est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f \in H(U)$ non constante, alors f est ouverte, *i.e.* $f(U)$ est ouvert.

Θ (représentation conforme) Si $U \neq \mathbf{C}$ est simplement connexe, alors il existe une application conforme, *i.e.* une bijection holomorphe, entre U et $B(0,1)$.

3.2 Inégalités de Cauchy

Θ Si f est holomorphe sur $D(z_0, r)$ et admet un développe en série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ au voisinage de z_0, alors $\forall n \in \mathbf{N}, |a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$ où M est un majorant de f sur $C(z_0, r)$.

Θ (Liouville) Une fonction entière, *i.e.* holomorphe sur $\mathbf{C}$, et bornée est constante.

A (D'Alembert-Gauss) $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

4 Applications de la convexité

4.1 Fonctions convexes

Θ Si I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction convexe dérivable, alors :

- ⋆ si f admet un maximum local strict ou global, elle est constante
- ⋆ si f admet un minimum local, il est global
- ⋆ un point $a \in I$ est un minimum global si, et seulement si, c'est un point critique, *i.e.* $f'(a) = 0$
- ⋆ si f est strictement convexe, elle admet au plus un minimum

Θ L'ensemble des points extrémaux d'une fonction convexe est un convexe.

Θ (John-Loewner) Si K est un compact convexe d'intérieur non vide, alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

4.2 Dualité

4.3 Ensembles convexes

Θ (Krein-Milman) Un compact convexe X est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux $Conv(Extr(X))$.

Θ (Choquet) Soient K un convexe compact d'un espace de Banach E et $L : E \to R$ une fonctionnelle linéaire continue. Alors L admet un minimum sur K qui est un point extrémal de K.

A (Birkhoff) Les points extrémaux de l'ensemble B_n des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

A En particulier tous les plans de transfert optimaux discrets sont des transports optimaux.

4.4 Méthodes de descente et analyse numérique

4.5 Programmation convexe

Programmation convexe : Farkas-Minkowski, cônes tangents, conditions de Kuhn-Tucker, cf. [Ciarlet(), ch. 9]

5 Espaces de Hilbert

5.1 Projection sur un convexe fermé

Θ Si C est un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H, alors :

- ⋆ $\forall x \in H, \exists! p(x) \in C, \|x - p(x)\| = f(x, C)$
- ⋆ $p(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C, \langle z - x, z - y \rangle \leqslant 0$
- ⋆ p est 1-lipschitzienne

Δ La matrice de Gram de la famille $(x_i)_i$ de l'espace euclidien E est $G((x_i)_i = (\langle x_i, x_j \rangle)_{ij}$.

Θ La distance d de x au sous-espace engendré par la famille libre $(x_i)_i$ est telle que $d^2 = \frac{\det G(x_1,\ldots,x_n,x)}{\det G(x_1,\ldots,x_n)}$.

A (Müntz)

Espérances conditionnelles

Θ (Motzkin) Si A est un fermé de $\mathbf{R}^n$, on féinit pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ la distance à x, $\phi_x : y \mapsto \|y - x\|$. Alors A est convexe si, et seulement si, pour tout $x \notin A$, ϕ_x atteint son minimum en un unique point de A

5.2 Représentations de formes bilinéaires

Δ Une forme bilinéaires a est continue s'il existe C tel que $|a(u,v)| \leqslant C|u||v|$ pour tous $u, v \in H$. Une forme linéaire est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v,v) > \alpha|v|^2$.

Θ (Stampacchia) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive et si K est un convexe fermé non vide, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \langle \phi, v-u \rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v \rangle$.

Θ (Lax-Milgram) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in H, \forall v \in H, a(u,v) = \langle \phi, v \rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v \rangle$.

Applications aux EDP (Rakotoson, Brezis)

Autres idées à explorer...

Plus de méthodes numériques, méthodes de gradient, points cols, etc.
Extrema de problèmes physiques, traces d'ensembles matriciels

Inégalité d'Hadamard
Développement 3 de 216, plus de géométrie
Convexité dans un réflexif, cf. Brezis

- **Développements.**

  ⋆ **Ellipsoïde de John-Loewner, [Alessandri(1999)]**

  ⋆ **Théorème de Choquet, Birkhoff et application aux transports, [?]**

  ⋆ **Inégalité isopérimétrique, []**

  ⋆ **Théorème des extremums liés, []**

  ⋆ **Méthode du gradient à pas optimal/conjugué, [Ciarlet()]**

Références

[**?**, chap. 2,6,7,8] pour de nombreux points de vues et de nombreuses illustrations, c'est une excellente base pour la leçon. On peut compléter avec quelques exercices de [Rouvière(2009), ch. 7] pour l'aspect différentiel, avec [**?**] pour l'analyse complexe, et surtout avec [Ciarlet()] pour les problèmes de recherche numérique ou algorithmique d'extremum.

220. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

Rapport du jury. Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en oeuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Φ Systèmes dynamiques

H La considération des équations différentielle intervient dès le XVIIe siècle avec la révolution cartésienne qui débouche avec Newton sur la mathématisation de la physique. L'aspect très physique de cette théorie n'a jamais cessé d'exister et les interprétations qualitatives du travail mathématique ont toujours éclairé l'étude purement théorique. Puis omniprésence moderne, avec l'évolution vers les EDP également.

Avis. Il faut donner vie à cette leçon, c'est déjà appelé par la mention du « qualitatif » dans l'étude, mais c'est surtout nécessaire pour remettre les équations différentielles dans leur cadre naturel. Les situations physiques et la modélisation doivent être présentes au moins dans la présentation et la défense du plan. Il ne s'agit pas de remplacer le traitement mathématique par des interprétations empiriques, mais de motiver les équations étudiées. L'aspect numérique peut apporter beaucoup.

⋆ ⋆ ⋆

U ouvert de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^m$, $f: U \to \mathbf{R}^m$ continue.

1 Premières informations qualitatives, [?]

Toutes les informations obtenues à l'aide de la seule interprétation géométrique de l'équation différentielle : barrières, entonnoirs, etc.

2 Théorie générale des équations différentielles [H. Queffélec(2007)]

2.1 Solutions maximales et globales

Δ Une équation différentielle ordinaire du premier ordre est $y' = f(t, y)$. Une solution de (E) sur un intervalle I est une fonction dérivable $y : I \to \mathbf{R}^m$ telle que $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$ et $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$. Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale $f(t_0) = y_0$.

Θ Si f est classe C^k, alors toute solution de (E) est de classe C^{k+1}.

Δ Si y et z sont solutions de (E) sur I et J, alors z est un prolongement de y si $I \subseteq J$ et $z_I = y$. Une solution est maximale si elle n'admet pas de prolongement strict. Une solution globale est une solution définie sur tout $\pi_1(U)$.

R Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse comme on le voit avec $y' = y^2$.

Θ Toute solution se prolonge en une solution maximale.

2.2 Théorie locale

Θ Une fonction y est solution du problème de Cauchy si, et seulement si, elle est continue et $\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du$.

Plein d'applications du Pommellet

Θ (Gronwall) Si $u(t) \leqslant A + \int_0^t uv$, alors $u(t) \leqslant \exp(\int_0^t v)$.

Θ (Cauchy-Lipschitz) Si f est localement lipschitzienne en y, alors le problème de Cauchy admet une unique solution exacte au voisinage de t_0.

Θ Si $f(t, \cdot)$ est $k(t)$-lipchitzienne pour tout t avec k continue, alors toute solution maximale est globale. Si $\|f(t, y)\| \leqslant c(t) + k(t)\|y\|$, alors toute solution maximale est globale.

2.3 Théorie globale

Θ (des bouts) y peut se prolonger au-delà de b si, et seulement si, il existe un compact K tel que la courbe $t \mapsto (t, y(t))$ reste contenue dans K.

3 Les équations différentielles en pratique [Pommellet(1994)]

3.1 Équations différentielles linéaires

Θ La solution générale du problème de Cauchy est $y(x) = z(x) + e^{A(x)}\left(\lambda + \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)}dt\right)$ où z est une solution particulière du système.

E
- ★ Équations de Bernouilli : $= p(x)y + q(x)y^\alpha$ pour $\alpha \neq 1$.
- ★ Équations de Riccati : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$.

Θ Équations homogènes $y' = f(y/x)$.

Δ Notons (E_0) $Y' = A(t)Y$ et, pour tout $t_0 \in I$, $R(t_0, Y_0)$ l'unique solution de (E_0) vérifiant les conditions de Cauchy $Y(t_0) = I_n$. La fonction $(t, s) \mapsto R(t, s)$ est la résolvante du système (E_0).

Θ Nous avons les propriétés suivantes concernant la résolvante :

- ★ $\forall s, t, u \in I, R(t, s)R(s, u) = R(t, u)$
- ★ $foralls, t \in I, R(s, t) \in GL_n(K)$ et $R(s, t)^{-1} = R(t, s)$
- ★ Si $\forall t, u \in I, A(t)A(u) = A(u)A(t)$, alors $R(t_0, t) = \exp \int_{t_0}^t A$

Δ Le wronskien d'un système de solutions $(Y_1, \ldots, Y_m)$ est $w(t) = det(Y_1(t), \ldots, Y_m(t))$.

Θ On a les deux relations suivantes pour tous $t_0, t \in I$:

- ★ $\det R(t_0, t) = \exp \int_{t_0}^t tr(A)$
- ★ $w(t) = \exp \int_{t_0}^t tr(A)det(V_1, \ldots, V_m)$

3.2 Équations différentielles ordinaires

Θ (cas des variables séparables) SI $y' = f(x)g(y)$, alors deux types de solutions...

Θ Si on connait une intégrale première

Autonomes

3.3 Des limites à la théorie

$y' = x - y^2$

4 Études qualitatives d'équations différentielles [H. Queffélec(2007)]

4.1 Points d'équilibre et stabilité

Δ Si x_0 est un point d'équilibre de f, on dit que x_0 est :

- ★ stable si $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in S, (\|x(t_0) - x_0\| \leqslant \eta \Longrightarrow$ x définie sur $[t_0, +\infty[$ et $\forall t \geqslant t_0, \|x(t) - x_0\| \leqslant \varepsilon$
- ★ asymptotiquement stable si $\exists\eta > 0, \forall x \in S, (\|x(t_0) - x_0\| \leqslant \eta \Longrightarrow$ x définie sur $[t_0, +\infty[$ et $x(t) \to_\infty x_0$
- ★ instable sinon

Δ On associe au système différentiel général $Y' = f(Y)$ son linéairisé $Y' = Jf(Y)$.

Θ (Lyapounov) Si $f \in C^1(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$ et $\forall\lambda \in Sp(df_0), Re(\lambda) < 0$, alors pour tout Y_0 assez proche de 0, la solution du système $Y' = f(Y), Y(0) = Y_0$ tend exponentiellement vers 0.

Θ (Hadamard-Levy) Soit $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, elle est propre et de différentielle inversible en tout point.

4.2 Linéarisation

Δ On associe au système différentiel général $Y' = f(Y)$ son linéairisé $Y' = Jf(Y)$.

Θ (Lyapounov) Si $f \in C^1(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$ et $\forall \lambda \in Sp(df_0), Re(\lambda) < 0$, alors pour tout Y_0 assez proche de 0, la solution du système $Y' = f(Y), Y(0) = Y_0$ tend exponentiellement vers 0.

4.3 Les systèmes autonomes en dimension 2

4.4 Équations différentielles d'ordre 2

5 Approche numérique [Demailly(2006)]

5.1 Méthode d'Euler et solutions approchées

Δ $C = [t \pm T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (E) si toute solution y du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ définie sur $I \subseteq [t_0 \pm T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Θ Avec $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ où $M = \sup_C \|f(t, y)\|$, $[t \pm T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (E).

Δ Une solution approchée construire par la méthode d'Euler sur la subdivision $(t_i)_i$ de I est la fonction y construite de proche en proche par $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$, $y(t) = y(t_n) + (t - t_n)f(t_n, y_n)$ où $y(t_{n+1}) = y(t_n) + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y_n)$ et $y(t_0) = y_0$.

Θ Avec $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, toute solution approchée par la méthode d'Euler reste dans le cylindre de sécurité C.

Θ Lorsque le pas δ_n de la subdivision tend vers 0, la suite y_n de solutions approchées converge uniformément sur $[t_0 \pm T]$ vers une solution de (E).

A (Cauchy-Peano-Arzela) Si f est continue, alors il existe une solution maximale au problème de Cauchy.

5.2 Méthode de Runge-Kutta

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Hadamard-Levy, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Théorème de Lyapounov, [Rouvière(2009)]**

Autres idées à explorer...

Liapounov, Résolvante
Autres variantes et utilisations de Gronwall
Utilisations de la méthode d'approximations successives dans Cauchy-Lipschitz
Parler de flots, ed redressements de champs de vecteurs, etc.

Références

[H. Queffélec(2007), ch. 10] pour la structure de base, [Pommellet(1994)] est aussi très bien pour compléter, et [Demailly(2006)] pour la partie numérique. [**?**] pour un point de vue plus physique et pour les aspects qualitatifs, le vocabulaire dynamique. [**?**], [S. Gonnord(1998)], [S. Francinou(2012)] sont plein de ressources !

Rapport du jury. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général on peut évoquer les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.

Φ Généralisation du cas général des équations différentielles par le retour au cas d'ordre 1 à partir d'une équation d'ordre quelconque, puis par l'approximation du système par le système linéairé qui donne dans bien des cas des comportements qualitatifs proches.

H La considération des équations différentielle intervient dès le XVIIe siècle avec la révolution cartésienne qui débouche avec Newton sur la mathématisation de la physique. L'aspect très physique de cette théorie n'a jamais cessé d'exister et les interprétations qualitatives du travail mathématique ont toujours éclairé l'étude purement théorique. Puis omniprésence moderne, avec l'évolution vers les EDP également.

Avis. Exploiter le caractère très particulier de ces équations, notamment les résultats d'algèbre linéaire, pour obtenir des résultats sur les équations générales en les ramenant à des systèmes linéaires. On part des cas les plus simples, à coefficients constant, où l'on a des résultats assez explicites et complets ; puis on s'intéresse au cas plus général des coefficients quelconques ou particuliers, pour enfin explorer des méthodes de détermination de comportements qualitatifs : linéairisation, perturbations, approches numériques, qui permettent d'obtenir des résultats même lorsque les équations ne sont pas linéaires ou les solutions non connues.

⋆ ⋆ ⋆

K désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et les vecteurs colonnes sont génériquement notés $X = (X_i)_i$, $Y = (Y_i)_i$, ..., les matrices $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, ... I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

1 Généralités sur les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants [Demailly(2006)]

1.1 Systèmes différentiels linéaires

Δ Un système différentiel linéaire du premier ordre dans K^m est une équation (E) $Y' = A(t)Y + B(t)$, où $A : I \to M_n(K)$ et $B : I \to K^m$ sont des fonctions continues.

Θ (Cauchy linéaire) Pour toute condition de Cauchy $(t_0, V_0) \in I \times K^m$, il existe une unique solution maximale à (E), et elle est globale.

R Il n'y a pas forcément unicité dans le cas d'un système linéaire non résolu, ainsi...

A
- ⋆ (Détermination des courbes planes) Si on se donne $k > 0$ une fonction dérivable, il existe une courbe paramétrée ayant k pour courbure, et toute autre telle courbe s'obtient par déplacement et translation de celle-là.
- ⋆ (Détermination des courbes dans l'espace) Si on se donne $k > 0$ et τ deux fonctions dérivables, il existe une courbe paramétrée ayant ces paramètres pour courbure et torsion respectivement, et toute autre telle courbe s'obtient par déplacement et translation de celle-là.

Δ Le système différentiel linéaire homogène associé à (E) est (E_0) $Y' = A(t)Y$.

Θ L'ensemble S_0 des solutions maximales de (E_0) est un K-espace vectoriel de dimension m. L'ensemble S des solutions de (E) est un K-espace affine de direction S_0.

1.2 Systèmes différentiels du premier ordre à coefficients constants

Δ Un système différentiel est à coefficients constants si A et B sont des fonctions constantes.

Θ Les solutions de la forme $Y(t) = e^{\lambda t}V$ sont les fonctions telles que V est un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ, en particulier si A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, alors une base de solutions de (E_0) est donnée par $(e^{\lambda_i t}V_i)_i$.

Δ L'exponentielle est définie par $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty}$, la série convergeant normalement sur tout compact de $M_n(K)$.

Θ Nous avons les propriétés suivantes pour l'exponentielle de matrices :

- ⋆
- ⋆
- ⋆

Θ La solution Y de (E_0) et telle que $Y(t_0) = Y_0$ est donnée par $Y : t \mapsto e^{(t-t_0)A)}V_0$.

Θ (variation de la constante) La solution Y de (E) et telle que $Y(t_0) = Y_0$ est donnée par $Y : t \mapsto e^{(t-t_0)A)}V_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A}B(u)du$.

Δ Un sous-groupe à un paramètre est (l'image d')un morphisme additif continu de $\mathbf{R}$ dans $GL_n(\mathbf{C})$.

Θ Pour un groupe à un paramètre $t \mapsto \phi(t)$, il existe une unique $X \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $\phi(t) = exp(tX)$, à savoir $X = \phi'(0)$.

1.3 Équations différentielles à coefficients constants

Δ À l'équation différentielle homogène (E) $a_p y^{(p)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ on associe le système $Y' = AY$ où...

Θ L'ensemble S des solutions de E est un K-espace vectoriel de dimension p.

Δ La recherche des solutions exponentielles mène au polynôme caractéristique de (E), $P = a_p\lambda^p + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

Θ Si les racines complexes de P sont $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_s$, alors l'ensemble des solutions de (E) est le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension p ayant pour base la famille $(t^{q_j}e^{\lambda_j t})_{0 \leqslant q_j < m_j}$.

2 Systèmes différentiels linéaires généraux

2.1 Résolvante [Demailly(2006)]

Δ Notons (E_0) $Y' = A(t)Y$ et, pour tout $t_0 \in I$, $R(t_0, Y_0)$ l'unique solution de (E_0) vérifiant les conditions de Cauchy $Y(t_0) = I_n$. La fonction $(t,s) \mapsto R(t,s)$ est la résolvante du système (E_0).

Θ Nous avons les propriétés suivantes concernant la résolvante :

- ⋆ $\forall s, t, u \in I, R(t,s)R(s,u) = R(t,u)$
- ⋆ $foralls, t \in I, R(s,t) \in GL_n(K)$ et $R(s,t)^{-1} = R(t,s)$
- ⋆ Si $\forall t, u \in I, A(t)A(u) = A(u)A(t)$, alors $R(t_0, t) = \exp \int_{t_0}^t A$

2.2 Wronskien et systèmes fondamentaux [Demailly(2006)]

Δ Le wronskien d'un système de solutions $(Y_1, \dots, Y_m)$ est $w(t) = det(Y_1(t), \dots, Y_m(t))$.

Θ On a les deux relations suivantes pour tous $t_0, t \in I$:

- ⋆ $\det R(t_0, t) = \exp \int_{t_0}^t tr(A)$
- ⋆ $w(t) = \exp \int_{t_0}^t tr(A) det(V_1, \dots, V_m)$

2.3 Équations différentielles à coefficients périodiques [Avez(1985)]

2.4 Équations différentielles à coefficients analytiques

2.5 Équations différentielles d'ordre 2 [H. Queffélec(2007), S. Gonnord(1998)]

3 Approches qualitatives et numériques

3.1 Points d'équilibre et linéarisation [H. Queffélec(2007)]

Δ Si x_0 est un point d'équilibre de f, on dit que x_0 est :

- ⋆ stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in S, (\|x(t_0) - x_0\| \leqslant \eta \implies x$ définie sur $[t_0, +\infty[$ et $\forall t \geqslant t_0, \|x(t) - x_0\| \leqslant \varepsilon$
- ⋆ asymptotiquement stable si $\exists \eta > 0, \forall x \in S, (\|x(t_0) - x_0\| \leqslant \eta \implies x$ définie sur $[t_0, +\infty[$ et $x(t) \to_\infty x_0$
- ⋆ instable sinon

Δ On associe au système différentiel général $Y' = f(Y)$ son linéairisé $Y' = Jf(Y)$.

Θ (Liapounov) Si $f \in C^1(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$ et $\forall \lambda \in Sp(df_0), Re(\lambda) < 0$, alors pour tout Y_0 assez proche de 0, la solution du système $Y' = f(Y), Y(0) = Y_0$ tend exponentiellement vers 0.

3.2 Méthodes des perturbations []

3.3 Méthodes numériques de résolution [Demailly(2006)]

Autres idées à explorer...

Séries entières, théorème de Puiseux
Du numérique
Du Laplace/Fourier/Distributions ?
Hill-Mathieu

Θ (Hadamard-Levy) Soit $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, elle est propre et de différentielle inversible en tout point.

- **Développements.**

  ⋆ **Théorème de Lyapounov, [Rouvière(2009)]**

  ⋆ **Théorème de Sturm, [H. Queffélec(2007)]**

  ⋆ **Caychy-Lipschitz**

  ⋆ **Annexe F du Avez**

Références

[Demailly(2006), ch. 7] pour le contenu fondamental, et toujours [S. Gonnord(1998)] et [S. Francinou(2012)] pour des exercices et développements plus particuliers. [?] est sûrement une bonne source d'illustrations et d'interprétations physiques. [Avez(1985)] est intéressant dans son annexe F.

Rapport du jury.

Φ Prévision de l'aboutissement d'une structure préexistante. Une fois la convergence formalisée, on peut s'intéresser à une convergence au sens plus faible de Cesaro, et aux phénomènes de densité des suites qui donnent des informations sur la répartition asymptotique. Le critère de Cauchy est un critère puissant et intéressant de convergence. Les suites monotones et adjacentes sont suffisamment bien maîtrisées pour que l'on puisse en tirer des informations de convergence. Lorsque l'espace est bien structuré, typiquement compact, on peut également en tirer des informations intéressantes sur les valeurs d'adhérence sinon sur la convergence. Les suites classiques et les systèmes dynamiques apparaissent naturellement dans la pratique, et si certaines suites sont moins connues, on peut espérer les comparer asymptotiquement à ces suites. Des suites peuvent être construites pour approcher des solutions d'équations ou des intégrales, et en pratique on peut également s'intéresser à l'accélération de leurs convergence.

H Les suites apparaissent dès les mésopotomiens (exhaustion, dénombrement), puis les grecs exploitent leur évolution (approximations), la recherche de comportements-limite apparaît avec les systèmes dynamiques (Fibonacci), mais l'intérêt numérique arrive réellement avec Cauchy, Gauss, Fourier (séries), les problèmes de convergence sont dévoilés par Abel. Dirichlet et Weierstrass s'y attèlent alors.

Avis. La leçon est élémentaires et il faut faire attention à ne pas rester à un niveau trop taupinal. Il y a de nombreuses choses à faire, les systèmes dynamiques sont notamment une belle source d'exemples et de résultats. Les suites numériques sont très présentes dans de nombreux domaines, et il convient de bien illustrer la leçon, par exemple avec des calculs de complexité, des convergences de probabilités discrètes, des méthodes numériques itératives !

⋆ ⋆ ⋆

1 Convergences de suites

1.1 Convergence et opérations

Δ Une suite $(u_n)_n$ est convergente s'il existe $l \in K$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$. On dit que $(u_n)_n$ converge vers l, ou encore que l est limite de $(u_n)_n$. Si $(u_n)_n$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Θ Si une suite a une limite, elle est unique. On note $l = \lim_{n\infty} u_n$ ou $u_n \to l$.

E
- ⋆ $(\frac{1}{n})_n$ converge vers 0
- ⋆ $(\sin(n))_n$ diverge

Θ L'ensemble des suites convergentes forme un espace vectoriel et l'opération $\lim_{n\infty}$ y est linéaire.

Θ Une suite sous-additive $(u_n)_n$, *i.e.* vérifiant $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$, est telle que $(\frac{u_n}{n})_n$ converge vers $l = \inf \frac{u_n}{n}$.

Δ Une suite $(u_n)_n$ converge au sens de Cesaro si la suite des moyennes arithmétiques $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k)_n$ converge.

Θ Une suite convergente converge au sens de Cesaro vers la même limite, mais la réciproque est fausse.

E
- ⋆
- ⋆ la suite $(-1)^n$ converge au sens de Cesaro mais ne converge pas

1.2 Suites et densité

Δ Si A est une partie de $\mathbf{N}$ et si $\frac{A \cap [\![1,n]\!]}{n} \to d$, alors on dit que A est de densité d.

Θ Les suites qui convergent vers l au sens de Cesaro sont les suites qui convergent vers l suivant une partie de densité 1.

Δ Une suite $(x_n)_n$ de $\mathbf{R}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $N(a,b,n) = card\{m \leqslant n \mid a \leqslant \{x_n\} \leqslant b\} \sim_{n\infty} n(b-a)$.

Θ Densité sur la sphère si les arguments sont équirépartis.

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- ⋆ $(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1
- ⋆ $\forall f \in R_1([0,1]), \int_0^1 f = \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty f(x_k)$
- ⋆ $\forall f \in C_1([0,1]), \int_0^1 f = \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty f(x_k)$
- ⋆ (critère de Weyl) $\forall n \in \mathbf{Z}, \sum_{k=0}^n e^{2i\pi n x_k} = o(n)$

E Pour tout $\theta \notin \mathbf{Q}$, $(n\theta)_n$ est équirépartie modulo 1.

1.3 Suites de Cauchy et nombres réels

Δ Une suite $(u_n)_n$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall p,q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$.

Θ Une suite $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, elle est de Cauchy.

R On a donc un critère donnant la convergence sans nécessiter la connaissance de la limite.

E
- ⋆ $(e^{in})_n$ diverge
- ⋆ $-(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_n$ diverge

+ Construction de $\mathbf{R}$

Θ $\mathbf{R}$ est complet.

2 Critères de convergences

2.1 Monotonie et ordre

Θ Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

A Pour toute suite $(u_n)_n$, on peut définir $\limsup_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty} \sup_{k\geqslant n} u_k$ et $\liminf_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k$.

Θ Si u, v, w sont trois suites réelles telles que $u \leqslant v \leqslant w$, et si u et w convergent vers l, alors v convergent vers l.

2.2 Suites adjacentes

Δ Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si, quitte à échanger u et v,
- ⋆ u est croissante
- ⋆ v est décroissante
- ⋆ $(|u_n - v_n|)_n$ tend vers 0

Θ Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

E
- ⋆ Les suites u et v définies par récurrence par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ sont adjacentes. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de u_0 et v_0
- ⋆

Θ (intervalles emboîtés) Si I_n est une suite décroissante d'intervalles dont la longueur tend vers 0, alors leur intersection est réduite à un point.

Δ Une série $\sum u_n$ est dite semi-convergente si elle converge mais ne converge pas absolument.

Θ (critère des séries alternées) Si $(u_n)_n$ tend vers 0 en décroissant, alors $\sum(-1)^n u_n$ converge. De plus, on a alors $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

E Un petit exemple de série harmonique alternée...

Θ Si les u_n sont les moments d'une mesure positive sur $[0,1]$, *i.e.* $u_n = \int_0^1 x^n d\mu(x)$, alors on a un procédé d'accélération de convergence efficace des séries alternées : si $= \sum c_{nk} x^k$ et $A_n = \sum_{k=0}^n c_{nk} a_k$, alors $|S - A_n| \leqslant \frac{\|P_n\|_\infty^{[0,1]}}{|P_n(-1)|} S$. On obtient une vitesse relative de l'ordre de $(3+\sqrt{8})^{-n}$ avec des polynômes de Chebyshev.

Θ (Euler) Un autre procédé de convergence est... La convergence est alors quadratique.

2.3 Compacité

Δ Un nombre l est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$ s'il existe une extraction $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $(u_{\phi(n)})_n$ converge vers l.

Θ Une suite qui converge a une unique valeur d'adhérence, mais la réciproque est fausse.

E ★ $(-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence 1 et -1, donc ne converge pas
★ $(n)_n$ n'admet pas de valeur d'adhérence
★ la suite définie par $u_n = 0$ si n impair et n sinon admet une unique valeur d'adhérence mais ne converge pas

Θ Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge vers cette limite. Plus généralement, si $\mathbf{N}$ est partitionné en un nombre fini d'ensembles $N_1, \ldots, N_k$, et si les $(u_n)_{n\in N_k}$ convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.

Θ (flaque d'eau) Si $u_{n+1} - u_n \to 0$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

A Si f est continue et si $(u_n)_n$ est définie récursivement par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, $u_{n+1} - u_n \to 1$.

Θ (Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

A Une suite converge si, et seulement si, elle est bornée et admet au plus une valeur d'adhérence.

3 Suites classiques et systèmes dynamiques

Θ Suites classiques : arithmético-géométriques, homographiques, récurrentes linéaires, etc.

Θ Si $f \in C^1(I)$ admet un point fixe a, alors
★ Si $|f'(a)| < 1$, il y a un bassin d'attraction autour de a et la convergence est d'ordre 1
★ Si $f'(a) = 0$ et f'' ne s'annule pas, il y a convergence quadratique
★ Si $[f'(a) > 1|$, il y a un bassin de répulsion

3.1 Comparaisons asymptotiques

Δ On dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_n$ s'il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $u_n = w_n v_n$ et $(w_n)_n$ est bornée. On note $u_n = O(v_n)$.
Δ On dit que $(u_n)_n$ est une borne asymptotique approchée de $(v_n)_n$ si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Θ Soient $a \geqslant 1$, $b > 1$, $(v_n)_n$ une suite. Si $(u_n)_n$ est définie par récurrence par $u_n = a u_{n/b} + v_n$, alors :

★ si $u_n = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, alors $u_n = \Theta(n^{\log_b a})$
★ si $u_n = O(n^{\log_b a})$,
★ si $u_n = O(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, si $a v_{n/b} \leqslant c v_n$ à partir d'un certain rang pour un certain $c < 1$, alors $u_n = \Theta(v_n)$

Δ On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ s'il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $u_n = w_n v_n$ et $w_n \to 0$. On note $u_n = o(v_n)$.
Δ On dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_n$ s'il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $u_n = w_n v_n$ et $w_n \to 1$. On note $u_n \sim v_n$.

E ★ (Hadamard-de la Vallée Poussin) $\pi(n) = \cap ¶ \cap [\![1, n]\!] \sim \frac{n}{\log n}$
★ (formule de Wallis) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Θ Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$, alors :

★ si $\sum u_n$ diverge, $\sum_0^n u_k \sim \sum_0^n v_k$
★ si $\sum u_n$ converge, $\sum_n^\infty u_k \sim \sum_n^\infty v_k$

Θ Cormen

4 Approximations

4.1 Méthode de Newton

4.2 Intégration numérique

4.3 Accélération de convergence

Soit $(u_n)_n$ converge vers l et $u_n - l = \lambda k^n + O(k'^n)$ où $|k'| < |k| < 1$.

Θ (Richardson) La suite de terme général $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{1-k}$ converge vers l plus rapidement que u. Plus précisément, $v_n - l = O(k'^n)$.

Θ (Aitken) La suite de terme général $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$ converge vers l plus rapidement que u. Plus précisément, $v_n - l = O((\frac{k'^n}{k})^n)$.

Δ (méthode de Steffensen) Il s'agit de la méthode d'Aitken définie par une suite itérative $(f^n(x_0))_n$.

Autres idées à explorer...

Probas, théorèmes limites !

- **Développements.**

★ **Méthode de Newton pour les polynômes, [Chambert-Loir-Fermigier(1996b)]**

★ **Suites équiréparties et critère de Weyl, [S. Francinou(2007b)]**

★ **Théorème de Sarkowskii, [S. Francinou(2007b)]**

Références

Pour l'essentiel un bon livre de taupe tel [Gourdon(2008)] est très bien et fournit des exemples non triviaux. Le [?] donne de nombreux contre-exemples à prendre. Pour les systèmes dynamiques, consulter les très bons [?] et [?]. Pour les méthodes numériques, voir... Pour les probabilités, [Lesigne(2001)] est très bien et très élémentaire, se limitant au discret, et peut être compléter avec [Ouvrard(2007)]. Pour les calculs de complexité, [?] suffit amplement.

224. Comportement asymptotiques de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

Rapport du jury.

Φ Prévision du comportement de l'évolution des systèmes dans le temps et estimations de la vitesse de convergence notamment pour prévoir les comportements et algorithmes numériques. Nous nous intéressons tout d'abord aux critères permettant de trancher, totalement ou partiellement, quant au comportement asymptotique d'une suite : convergence, valeurs d'adhérence, cycles, etc. pour ensuite nous nous pencher naturellement sur les comparaisons de vitesse de convergence, les estimations de vitesses de convergence et les procédés d'accélération ; et enfin nous cherchons à aller plus loin dans la détermination du comportement asymptotique en obtenant des développements asymptotiques ou en tâchant de déterminer des écarts stochastiques par rapport aux lois limites théoriques.

H La recherche de comportements-limite apparaît avec les systèmes dynamiques (Fibonacci), l'essor des méthodes d'approximation (Fourier) mène à l'étude des comportements asymptotiques, de même que les systèmes physiques notamment en astronomie. L'algorithmique réclame en plus de l'efficacité quant à la vitesse de convergence.

Avis. Attention à ne pas dupliquer la leçon « Convergence de suites numériques ». Il faut certes en parler un peu, mais ne pas en faire une partie majeure de la leçon et se focaliser sur les comportements asymptotiques, les développements asymptotiques, les relations de comparaison, les vitesses de convergence : déviations et théorèmes limites en probabilités, répartition des nombres premiers ou encore méthodes numériques sont des mines à exploiter activement ici ! Les séries trouvent naturellement leur place dans cette leçon, à condition de ne pas en faire la théorie générale et de se focaliser sur le comportement asymptotique des restes, des sommes partielles, etc.

⋆ ⋆ ⋆

On se place sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ munis de leur topologies usuelles, et on note une suite $u = (u_n)_n = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1 Convergence de suites [Pommellet(1994)]

1.1 Convergence

Δ Une suite $(u_n)_n$ est convergente s'il existe $l \in K$ tel que $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$. On dit que $(u_n)_n$ converge vers l, ou encore que l est limite de $(u_n)_n$. Si $(u_n)_n$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Θ Si une suite a une limite, elle est unique. On note $l = \lim_{n\infty} u_n$ ou $u_n \to l$.

E
- ⋆ $(\frac{1}{n})_n$ converge vers 0
- ⋆ $(\sin(n))_n$ diverge

Θ Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

A Pour toute suite $(u_n)_n$, on peut définir $\limsup_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty} \sup_{k\geqslant n} u_k$ et $\liminf_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k$.

Θ L'ensemble des suites convergentes forme un espace vectoriel et l'opération $\lim_{n\infty}$ y est linéaire.

1.2 Compacité

Δ Un nombre l est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$ s'il existe une extraction $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $(u_{\phi(n)})_n$ converge vers l.

Θ Une suite qui converge a une unique valeur d'adhérence, mais la réciproque est fausse.

E
- ⋆ $(-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence 1 et -1, donc ne converge pas
- ⋆ $(n)_n$ n'admet pas de valeur d'adhérence
- ⋆ la suite définie par $u_n = 0$ si n impair et n sinon admet une unique valeur d'adhérence mais ne converge pas

Θ Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge vers cette limite. Plus généralement, si $\mathbf{N}$ est partitionné en un nombre fini d'ensembles $N_1, \ldots, N_k$, et si les $(u_n)_{n\in N_k}$ convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.

Θ (flaque d'eau) Si $u_{n+1} - u_n \to 0$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

A Si f est continue et si $(u_n)_n$ est définie récursivement par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, $u_{n+1} - u_n \to 1$.

1.3 Densités [S. Francinou(2007b)]

Δ Une suite $(x_n)_n$ de $\mathbf{R}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $N(a,b,n) = card\{m \leqslant n \mid a \leqslant \{x_n\} \leqslant b\} \sim_{n\infty} n(b-a)$.

Θ Densité sur la sphère si les arguments sont équirépartis.

Θ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ⋆ $(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1
- ⋆ $\forall f \in R_1([0,1]), \int_0^1 f = \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$
- ⋆ $\forall f \in C_1([0,1]), \int_0^1 f = \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$
- ⋆ (critère de Weyl) $\forall n \in \mathbf{Z}, \sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi n x_k} = o(n)$

E Pour tout $\theta \notin \mathbf{Q}$, $(n\theta)_n$ est équirépartie modulo 1.

Δ Une suite $(u_n)_n$ converge au sens de Cesaro si la suite des moyennes arithmétiques $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k)_n$ converge.

Θ Une suite convergente converge au sens de Cesaro vers la même limite, mais la réciproque est fausse.

E
- ⋆
- ⋆ la suite $(-1)^n$ converge au sens de Cesaro mais ne converge pas

Θ Les suites qui convergent vers l au sens de Cesaro sont les suites qui convergent vers l suivant une partie de densité 1.

2 Comparaisons asymptotiques [Pommellet(1994)]

2.1 Relations de comparaison

Δ On dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_n$ s'il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $u_n = w_n v_n$ et $(w_n)_n$ est bornée. On note $u_n = O(v_n)$.

Δ On dit que $(u_n)_n$ est une borne asymptotique approchée de $(v_n)_n$ si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Θ Soient $a \geqslant 1$, $b > 1$, $(v_n)_n$ une suite. Si $(u_n)_n$ est définie par récurrence par $u_n = a u_{n/b} + v_n$, alors :

- ⋆ si $u_n = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, alors $u_n = \Theta(n^{\log_b a})$
- ⋆ si $u_n = O(n^{\log_b a})$,
- ⋆ si $u_n = O(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$, si $a v_{n/b} \leqslant c v_n$ à partir d'un certain rang pour un certain $c < 1$, alors $u_n = \Theta(v_n)$

Δ On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ s'il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $u_n = w_n v_n$ et $w_n \to 0$. On note $u_n = o(v_n)$.

Δ On dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_n$ s'il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $u_n = w_n v_n$ et $w_n \to 1$. On note $u_n \sim v_n$.

2.2 Quelques estimations

E
- ⋆ (Hadamard-de la Vallée Poussin) $\pi(n) = \cap\P \cap [\![1,n]\!] \sim \frac{n}{\log n}$
- ⋆ (formule de Wallis) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Θ Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$, alors :

- ⋆ si $\sum u_n$ diverge, $\sum_0^n u_k \sim \sum_0^n v_k$
- ⋆ si $\sum u_n$ converge, $\sum_n^\infty u_k \sim \sum_n^\infty v_k$

Θ Cormen

3 Vitesses de convergence et accélérations

3.1 Systèmes dynamiques, cycles et stabilité [?, ?]

Θ (Sarkowskii) Si $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point périodique de période 3, alors il existe des points périodiques de toute période n.

Θ (Banach-Picard) Si f est une application contractante et si $(u_n)_n$ est définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $(u_n)_n$ converge vers une limite l qui est point fixe de f et $|u_n - l| \leqslant \frac{k^n}{1-k}[u_1 - u_0|$.

Θ Si $f \in C^1(I)$ admet un point fixe a, alors

- ⋆ Si $|f'(a)| < 1$, il y a un bassin d'attraction autour de a et la convergence est d'ordre 1
- ⋆ Si $f'(a) = 0$ et f'' ne s'annule pas, il y a convergence quadratique, plus généralement convergence d'ordre p si p est le premier ordre de dérivation non nul en a
- ⋆ Si $[f'(a) > 1|$, il y a un bassin de répulsion d'ordre 1

E
- ⋆
- ⋆

3.2 Méthode de Newton

Θ Méthode de Newton

Θ Fraction continues

Δ Séries et suites de coefficients ?

Θ Sommes de Riemann

3.3 Suites adjacentes et séries alternées

Δ Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si, quitte à échanger u et v,

- ⋆ u est croissante
- ⋆ v est décroissante
- ⋆ $(|u_n - v_n|)_n$ tend vers 0

Θ Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

E
- ⋆ Les suites u et v définies par récurrence par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ sont adjacentes. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de u_0 et v_0
- ⋆

Δ Une série $\sum u_n$ est dite semi-convergente si elle converge mais ne converge pas absolument.

Θ (critère des séries alternées) Si $(u_n)_n$ tend vers 0 en décroissant, alors $\sum(-1)^n u_n$ converge. De plus, on a alors $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

E Un petit exemple de série harmonique alternée...

Θ Si les u_n sont les moments d'une mesure positive sur $[0,1]$, *i.e.* $u_n = \int_0^1 x^n d\mu(x)$, alors on a un procédé d'accélération de convergence efficace des séries alternées : si $= \sum c_{nk} x^k$ et $A_n = \sum_{k=0}^n c_{nk} a_k$, alors $|S - A_n| \leqslant \frac{\|P_n\|_\infty^{[0,1]}}{|P_n(-1)|} S$. On obtient une vitesse relative de l'ordre de $(3+\sqrt{8})^{-n}$ avec des polynômes de Chebyshev.

Θ (Euler) Un autre procédé de convergence est... La convergence est alors quadratique.

3.4 Accélération de convergence

Soit $(u_n)_n$ converge vers l et $u_n - l = \lambda k^n + O(k'^n)$ où $|k'| < |k| < 1$.

Θ (Richardson) La suite de terme général $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{1-k}$ converge vers l plus rapidement que u. Plus précisément, $v_n - l = O(k'^n)$.

Θ (Aitken) La suite de terme général $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$ converge vers l plus rapidement que u. Plus précisément, $v_n - l = O((\frac{k'^n}{k})^n)$.

Δ (méthode de Steffensen) Il s'agit de la méthode d'Aitken définie par une suite itérative $(f^n(x_0))_n$.

4 Précision des comportements asymptotiques

4.1 Développements asymptotiques [Pommellet(1994)]

E DA de la série harmonique, de $tan(x) = x$

Full exemples

Θ La transformation de Laplace transforme développements limités au voisinage de 0 en développements asymptotiques :

Θ Transformation de Toeplitz

4.2 Comparaisons séries-intégrales [Pommellet(1994)]

Θ L'idée fondamentale de la comparaison est que si $u_n = f(n)$ et f est monotone, disons décroissante, alors on peut écrire $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$, et en intégrant $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k+1)$.

A On obtient ainsi un développement asymptotique des nombres harmoniques $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Θ Si $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est décroissante, alors $\sum_0^n f(i) - \int_0^n f$ converge. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int f$ sont de même nature.

A Riemann, Bertrand

Θ (Formule d'Euler Mac-Laurin)

Θ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

4.3 Théorèmes limites [Lesigne(2001)]

4.4 Estimation de déviations [Lesigne(2001)]

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Formule d'Euler-MacLaurin**
  - ⋆ **Méthode de Newton pour les polynômes, [Chambert-Loir-Fermigier(1996b)]**
  - ⋆ **Théorème de Sarkovskii, [S. Francinou(2007b)]**
  - ⋆ **Critère de densité de Weyl, [S. Francinou(2007b)]**
  - ⋆ **Étude de système dynamique**
  - ⋆ **Théorèmes de probas**

Références

Pour l'essentiel un bon livre de taupe tel [Gourdon(2008)] est très bien et fournit des exemples non triviaux, [?] pour définir les relations de comparaison. Le [?] donne de nombreux contre-exemples à prendre. Pour les systèmes dynamiques, consulter les très bons [?] et [?]. Pour les méthodes numériques, voir... Pour les probabilités, [Lesigne(2001)] est très bien et très élémentaire, se limitant au discret, et peut être compléter avec [Ouvrard(2007)]. Pour les calculs de complexité, [?] suffit amplement.

226. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

Rapport du jury. Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$. L'étude des suites homographiques pose des problèmes si on se restreint à R ou C. Il ne faut pas négliger la recherche préalable de sous-ensembles (intervalles) stables par f.

Φ Les systèmes dynamiques discrets sont le modèle naturel de modélisation d'un système évoluant explicitement en fonction de ses états précédents. De très nombreuses propriétés peuvent être déduites de la structure particulière de **R**, menant au déblocage d'études fines sur des évolutions de populations qui sont tant celles qui ont motivé la théorie historiquement que celles qui recellent les idées importantes pour une première mise en théorie. La théorie s'applique également au cas vectoriel, et est notamment le berceau des méthodes itératives en analyse numérique et en optimisation.

H Premiers systèmes dynamiques formels avec Fibonacci, puis de nombreuses études de dynamique de populations permettent aux idées de se développer, cf. [Bacaër(2008)].

Avis. Les systèmes dynamiques discrets aussi simples sont très généraux et se retrouvent dans de nombreux domaines. C'est donc une leçon qui mérite d'être variée tout autant qu'illustrée de nombreux exemples et de motivations historiques ou concrètes. Ne pas trop sortir du réel comme l'indique le titre, mais des petites excursions du côté des fractales ne peut pas faire de mal. Ne pas oublier les dessins !

⋆ ⋆ ⋆

On s'intéresse aux systèmes dynamiques discrets $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant définie sur A et vérifiant $f(A) \subseteq A$.

1 Systèmes dynamiques discrets réels [Pommellet(1994)]

1.1 Monotonie et points fixes

Θ Le sens de variation de $(u_n)_n$ est donné par le signe de $f(x) - x$.
Si f est croissante, alors $(u_n)_n$ est monotone de sens de variation donné par le signe de $u_1 - u_0$.
Si f est décroissante, alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens opposés.

E
- ⋆ la suite définie par $u_0 \in]0, \pi[$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ décroît
- ⋆

Θ Si f est continue, alors les valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ sont des points fixes de f.

E
- ⋆
- ⋆

A Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue, $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, $u_{n+1} - u_n \to 0$.

Θ Si f est croissante et continue sur I, si λ_1 et λ_2 sont deux points fixes consécutifs de f, alors $(u_n)_n$, $u_0 \in]\lambda_1, \lambda_2[$, converge vers λ_1 ou λ_2 selon que le graphe de f est au-dessous ou en-dessous de la diagonale.

E
- ⋆ $u_n = (2 - \sqrt{u_n})$
- ⋆

1.2 Cycles du système

Δ Un point $x \in I$ est n-périodique si $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $0 < k < n$.

Θ (Sarkovskii, 1964) S'il y a un point 3-période, alors il y a des points n-périodiques pour tout n. Généralisation...

E
- ⋆
- ⋆

A L'équation $f^3 = id$ dans $C([0, 1], [0, 1])$ n'a que la solution triviale $f = id$.

1.3 Théorème de point fixe de Picard

Θ (Banach-Picard) Une application f contractante d'un complet non vide dans lui-même admet un unique point fixe, limite de toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Si cette application dépend continûment d'un paramètre λ et que k ne dépend pas de λ, alors le point fixe dépend continûment de λ.

A Si seule f^p est contractante, alors f admet aussi un point fixe unique, et c'est un point p-périodique (?).

Θ Si X est compact et f diminue strictement les distances, alors admet un unique point fixe, limite de toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

Cas convexe

1.4 Stabilité des points fixes

Θ Si $f \in C^1(I)$ admet un point fixe a, alors

- ⋆ Si $|f'(a)| < 1$, il y a un bassin d'attraction autour de a et la convergence est d'ordre 1
- ⋆ Si $f'(a) = 0$ et f'' ne s'annule pas, il y a convergence quadratique
- ⋆ Si $[f'(a) > 1|$, il y a un bassin de répulsion

E Pour $f(x) = \alpha x(x-1)$ et $\alpha \in [0,4]$, on a...

Θ (Cartan) Si Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbf{C}$ et $f \in H(\Omega,\Omega)$ telle que $f(a) = a$, alors :

- ⋆ $|f'(a)| \leqslant 1$
- ⋆ $|f'(a)| = 1 \Longleftrightarrow f \in Aut(\Omega)$
- ⋆ $|f'(a)| < 1 \Longrightarrow (f^n)_n$ converge uniformémnt vers a

2 Exemples de systèmes et de populations [Bacaër(2008)]

Exemples de dynamique de population, Galton-Watson, Fibonacci, Bacaer, etc.
Bifurcations, suite logistique, points de Feigenbaum, ...

2.1 Suites classiques

Θ Les suites arithmético-géométriques $u_{n+1} = au_n + b$ ont pour terme général $u_n = u_0 + nb$ si $a = 1$, $u_n = a^n(u_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}$ sinon. Elle converge si, et seulement si, $|a| < 1$ ou $u_0 = \frac{b}{1-a}$.

Θ Les suites homographiques $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ ont pour terme général ... (cf. Gourdon).

E Moyenne arithmético-géométrique

2.2 La suite logistique

2.3 Le processus de Galton-Watson

2.4 Autres exemples...

3 Cas vectoriel [?]

Θ (Banach-Picard) Le théorème de point fixe précédant est valable dans tout espace de Banach.

Θ Cas diagonalisable, suites récurrentes linéaires, Householder

Θ Hartman-Grobman

Θ Cartan (cf. Queffélec-Zuily)

3.1 Hypercyclicité

Δ Un point x est hypercyclique si $(A^n x)_n$ est dense dans E. Un opérateur A est hypercyclique lorsque l'ensemble $HC(A)$ de ses points hypercycliques est dense dans E.

Θ Soient (E,d) est un espace polonais, *i.e.* métrique séparable et complet. S est un ensemble dénombrable dense, et A un endomorphisme continu de E. Si X et Y sont deux parties denses de E et si $B : Y \to Y$ tel que

- ⋆ $\forall x \in X, A^n x \to 0$
- ⋆ $\forall y \in Y, B^n y \to 0$
- ⋆ $\forall y \in Y, AB(y) = y$

alors A est hypercyclique.

4 Optimisation et approximations [?, Ciarlet()]

Θ (Newton) Si $f(l) = 0$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, si $f \in C^2$ et f' ne s'annule pas, alors $(u_n)_n$ converge quadratiquement vers l.

Θ Sécante

Θ (Gradient à pas optimal)

Θ (Euler)

Θ (Aitken) Si $(u_n)_n$ converge vers l, la suite $(u_n - \frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n})_n$ converge vers l plus rapidement : $v_n - l = o(u_n - l)$.

Θ Optimisation sous contrainte, théorème de Stampacchia

Méthodes itératives, etc.

Autres idées à explorer...

Fractales

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Sarkowskii (1964), [S. Francinou(2007b)]**
  - ⋆ **Critère de Weyl**
  - ⋆ **Méthode de Newton pour les polynômes**
  - ⋆ **Gradient à pas optimal**

Références

Pour l'essentiel un bon livre de taupe tel [Pommellet(1994), Gourdon(2008)] est très bien et fournit des exemples non triviaux, à compléter avec [Chambert-Loir-Fermigier(1996a), S. Francinou(2007b)]. Le [?] donne de nombreux contre-exemples à prendre. Pour les systèmes dynamiques, consulter par exemple ce qu'en dit [?] et [?], [?] pour les fractales et les itérations complexes. Pour les méthodes numériques, voir... Pour les probabilités, [Lesigne(2001)] est très bien et très élémentaire, se limitant au discret, et peut être compléter avec [Ouvrard(2007)]. Pour les calculs de complexité, [?] suffit amplement. Les systèmes de populations sont très bien illustrés dans le petit [Bacaër(2008)] et permettent de donner un peu plus de vie à cette leçon.

228. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Rapport du jury. Un plan découpé en deux parties (I - Continuité, II - Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Enfin les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu), le théorème de Peano, etc. sont les bienvenues. un candidat qui indique dans son plan que l'ensemble des fonctions continues, nulle part dérivablescontient un G_δ dense de $C^0([0,1], R)$ doit pouvoir donner une telle fonction, ou du moins indiquer un principe de sa construction. Certains développements intéressants mais techniques, comme la construction d'une fonction continue partout non dérivable, ou le théorème de Balagner-Colominas, sont à déconseiller fortement aux candidats moyens, et peuvent aboutir à des oraux globalement catastrophiques. Les candidats font beaucoup trop confiance à leur mémoire et pas assez à leur compréhension, ce qui leur vaut de rester embourbés au milieu d'un développement ambitieux, par exemple « théorème de Montel » ou bien « différentielle isométrique en tout point implique isométrique pour l'application elle-même ».

Φ La notion de fonction apparaît intuitivement avec Leibniz (check), mais son utilisation reste très peu consciente d'elle-même. Les fonctions se dérivent sans trop se soucier de leur dérivabilité dès Newton, et les fonctions les plus pathologiques sont encore avec Euler des fonctions continues par morceaux. Ce sont Cauchy et Abel qui sont les premiers à souligner ces erreurs et à motiver l'introduction rigoureuse et la formalisation de ces propriétés. La théorie des fonctions prend alors tout son essor au début du XXe siècle avec l'école française, notamment Baire, Borel et Lebesgue, mais la théorie dépasse alors les simples fonctions réelles d'une variable réelle.

H L'un des plus grands obstacles mathématiques des grecs a été l'absence d'un calcul symbolique, qui nait dans les écoles arabes médiévales à la suite des premières formalisations d'Al-Khwarizmi, mais sans prendre toute l'ampleur d'une théorie des fonctions qui ne s'élabore qu'au cours du XVIIe siècle, prenant tout son essor avec Leibniz et les Bernoulli. L'analyse ne cessera de se développer autour de cette notion, largement étudiée et développée par Cauchy puis formalisée par Dirichlet.

Avis. Il faut bien veiller à sortir des trivialités du lycée ou de première année, ce qui en fait une leçon assurément délicate à préparer, d'autant plus que l'on est contraint au cas d'une variable réelle. C'est une leçon d'exemple, et ils ne manquent pas ! Les exemples et erreurs historiques sont les bienvenus, les constructions de contre-exemples sont intéressants et chaque théorème doit être illustré d'exemples et de contre-exemples pour en cerner la portée. On peut organiser le plan des propriétés locales vers les propriétés globales, en disséminant les différentes régularités, ou aller vers le plus (analyticité) ou le moins (mesurabilité, BV) de régularité. Des dessins de contre-exemples sont les bienvenus.

⋆ ⋆ ⋆

1 Notions de régularité locale

1.1 Continuité

Δ Une fonction f est continue en x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

E
- ⋆ les fonctions affines sont continues
- ⋆ l'exponentielle est continue

Θ Une fonction f est continue en x_0 si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x_0, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.

E
- ⋆ $\sin(\frac{1}{x})$ est discontinue en 0
- ⋆ $frm[o]--_{\mathbf{Q}}$ est discontinue en tout point

A Une fonction continue et surjective $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point fixe.

A (Sarkowskii) Si un système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ admet un cycle d'ordre 3, alors il admet des cycles de tous ordres.

Θ Une fonction est continue si, et seulement si, l'image réciproque de tout fermé est fermée, ou encore si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.

Θ $(C(I), +, \cdot, \times)$ est une algèbre.

1.2 Dérivabilité

Δ Une fonction est dérivable en x_0 si ses taux d'accroissements $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admettent une limite lorsque $x \to x_0$. Cette limite est le nombre dérivé de f en x_0.

E
- ⋆ tout polynôme est dérivable sur $\mathbf{R}$
- ⋆ $\sqrt{}$ est dérivable sauf en 0

Θ $(D(I), +, \cdot, \times)$ est une algèbre. De plus la dérivation D est une application linéaire vérifiant de plus $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Θ (Leibniz) $(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Θ (Faa di Bruno) $(f \circ g)^{(n)} = \sum_{\sum_{i=1}^{n} i m_i = n} \frac{n!}{m_1!\, 1!^{m_1}\, m_2!\, 2!^{m_2} \cdots m_n!\, n!^{m_n}} f^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ g \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(g^{(j)}\right)^{m_j}$.

Θ Une fonction dérivable en un point y est continue.

1.3 Points de discontinuité

Θ Les points de discontinuité d'une fonction monotone ou réglée sont en quantité dénombrable.

Θ Une fonction convexe est continue et dérivable presque partout.

Δ Si f est discontinue en x_0, alors on dit que x_0 est une :
- ⋆ discontinuité de première espèce si f admet une limite à droite et à gauche en x_0
- ⋆ discontinuité de seconde espèce sinon

E
- ⋆ la discontinuité de $1_{[0,1]}$ en 0 est de première espèce
- ⋆ la discontinuité de $\sin(\frac{1}{x})$ en 0 est de seconde espèce

Θ L'ensemble des fonctions continues mais nulle par dérivables est dense dans $C([a,b])$.

E
- ★ (Weierstrass) si g est le périodifié de $|\cdot|$ sur $[-1,1]$, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n g(4^n x)$ est continue mais nulle par dérivable
- ★ (Lebesgue)
- ★ (Peano)

Θ (mathXtreme) plus précis

2 Du local vers le global

2.1 Précision du comportement local

Θ Si $f \in C^n(I, \mathbf{R}^n)$ et $a \in I$, alors $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$. En fait il suffit que f admette des dérivées successives en a jusqu'à l'ordre n.

A (Kolmogorov)

A On peut facilement étudier les singularités de courbes paramétrées.

Θ (représentation de Borel) Si $(a_n)_n$ est une suite de réels, alors il existe une fonction f de classe $C^\infty(\mathbf{R})$ telle que, pour tout n, $f^{(n)}(0) = a_n$.

A (Sunyer i Balaguer) Si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ est telle que $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n_x \in \mathbf{N}, f^{(n_x)}(x) = 0$, alors f est un polynôme.

Δ DSE

Θ (Bernstein)

Θ CNS

2.2 Théorèmes implicites

Θ L'image continue d'un compact est compact.

Θ (valeurs intermédiaires) L'image continue d'un connexe est connexe. En particulier l'image continue d'un intervalle est un intervalle.

Θ réciproques

Θ (Rolle) Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

A Toute polynôme scindé est de dérivée scindée.

Θ (des accroissements finis) Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

A (théorème des cordes universelles)

Θ (Darboux) Si f est dérivable, alors l'image de tout intervalle par f' est un intervalle.

Θ (Croft)

2.3 Régularités globales

Θ Une fonction continue et injective est monotone.

Δ Une fonction f est uniformément continue sur I si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, (|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

Θ (Heine) une fonction continue sur un compact est uniformément continue. En particulier c'est vrai sur les segments.

Δ Une fonction est lipschitzienne de rapport k si $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Θ Une fonction dérivable est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée. En particulier tout fonction C^1 est lipschitzienne sur un segment.

3 Stabilité et approximations

3.1 Régularité des séries et intégrales

Sommes, intégrales, séries de Fourier (et carac de la régularité par la décroissance des coeff)

3.2 Suites de fonctions

Θ Une limite uniforme de fonction continues est continue.

E
- ★
- ★

Θ Si I ets un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant a, $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1(I)$ telle que :
- ★ $(f_n')_n$ converge uniformément vers g sur tout segment de I
- ★ $(f_n(a))_n$ converge vers un b

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f : x \mapsto b + \int_a^x g$.

Θ (Ascoli-Arzela) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur un compact métrique et si
- ★ Pour tout x de K, $(f_n)_n(x)$ est bornée
- ★ $(f_n)_n$ est équicontinue

alors il existe une sous-suite convergeant uniformément.

A Opérateurs à noyaux, équations intégrales

A (Cauchy-Peano-Arzela) Si f est continue, alors il existe une solution maximale au problème de Cauchy.

Θ (Dini) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue, si la suite est croissante ou si les fonctions sont croissantes, alors la convergence est uniforme.

3.3 Prolongements et rapports avec les moins régulières

Θ Si $f \in L^p$, alors f est continue presque partout et admet un unique représentant continu.

Θ (Egorov ?) Si f est mesurable sur un ensemble de mesure finie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\mu({}^cK) \leqslant \varepsilon$ et f continue sur K.

Δ Une fonction défnie sur $[a,b]$ est dite à variation bornée si $\sup_{\sigma|[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\sigma_{k+1}) - f(\sigma_k)|$ est fini.

Θ Les fonctions à variations bornées sur $[a,b]$ sont les différences de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$.

AM ?

3.4 Approximations et régularisations

Θ (Stone-Weierstrass) Si A est une sous-algèbre séparant les points, stable par conjugaison et contenant les constantes de $C(K, \mathbf{C})$ avec K compact, alors A est dense dans $C(K, \mathbf{C})$.

A L'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C([a, b])$. Mais le résultat est toujours faux sur $\mathbf{R}$, sauf pour les polynômes.

Δ Dès que cela a un sens, on définit la convolée de f par g comme $f \star g : x \mapsto \int f(x-y)g(y)dy$.

Θ Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, pour toutes $f \in L^1, g \in L^p$, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^n$, $f \star g \in L^p$ et $\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Θ Pour $f \in C_c^k, g \in L^1_{loc}, f \star g \in C^r$ et $D^a(f \star g) = D^a(f) \star g$ pour tout multi-indice a tel que $|a| \leqslant k$.

Δ Une suite régularisante – ou suite de noyaux réguliers – est une suite $(\rho_n)_n$ de C_c^∞ telle que :

- ⋆ $\rho_n \geqslant 0$
- ⋆ $supp(\rho_n) \subseteq B(0, \frac{1}{n})$
- ⋆ $\int \rho_n = 1$

Θ Il existe des suites régularisantes.

Θ (Noyaux réguliers) Si $(\rho_n)_n$ est une suite régularisante, alors :

- ⋆ si $f \in C$, alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{R}^n$
- ⋆ si $f \in L^p$ pour $p < \infty$, alors $\rho_n \star f$ converge au sens L^p vers f

A C_c^∞ est dans dans L^p pour tout $p < \infty$.

Θ (Lusin) Si μ est une mesure de Borel régulière, alors pour tout $p < \infty$ et tous $f \in L^p, \varepsilon > 0$, il existe $\phi_\varepsilon \in L^p \cap C$ telle que $\|\phi_{\varepsilon\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty}$, $\|\phi_\varepsilon - f\|_p \leqslant \varepsilon$ et $\mu(f \neq \phi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Autres idées à explorer...
BEAUCOUP PLUS D'EXEMPLES ! ! ! Oscillation ?
Helly-Bray
Mazur, Gateau-diff, etc.

- **Développements.**
  - ⋆ **Fonctions à variations bornées, [S. Francinou(2007b)]**
  - ⋆ **Glaeser**
  - ⋆ **Sarkowskii**
  - ⋆ **Mazur**

Références
CHECK [Testard(2012)] ! Un bon livre de taupe tel [Pommellet(1994)] un peu réorganisé, ou [Gourdon(2008)], pour les propriétés élémentaires, sûrement bien illustrés par des livres plus riches et avancés. Le [**?**] pour de nombreux contre-exemples est idéal. [**?**] doit contenir beaucoup de choses intéressantes tant au niveau du point de vue que de l'éclairage historique. Voir [S. Gonnord(1998)] !

Rapport du jury. Les candidats sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Le jury souhaiterait que les candidats illustrent leurs propos et raisonnements sur les fonctions convexes par des dessins clairs. Il n'est pas déraisonnable de parler de fonctions à variation bornée.

Φ La monotonie est une propriété forte de rigidité dès que l'on a une notion d'ordre. Les fonctions convexes, primitives des fonctions croissantes, amplifient cette rigidité. Après l'introduction de ces notions, on s'intéresse à la forte régularité de telles fonctions et aux résultats qui en découlent.

H L'un des plus grands obstacles mathématiques des grecs a été l'absence d'un calcul symbolique, qui nait dans les écoles arabes médiévales à la suite des premières formalisations d'Al-Khwarizmi, mais sans prendre toute l'ampleur d'une théorie des fonctions qui ne s'élabore qu'au cours du XVIIe siècle, prenant tout son essor avec Leibniz et les Bernoulli. L'analyse ne cessera de se développer autour de cette notion, largement étudiée et développée par Cauchy puis formalisée par Dirichlet.

Avis. Il y a de nombreuses applications de ces deux notions, à éviter de traîter de manière disjointes puisqu'elles ne le sont pas et que cela donnerait un plan artificiel et peu satisfaisant. De nombreuses applications dans différentes directions en découlent (systèmes dynamiques discrets, optimisation, probabilités, etc.) et doivent faire vivre la leçon.

⋆ ⋆ ⋆

1 Définitions

1.1 Monotonie

Δ Une fonction f est croissante (resp. décroissante) si $\forall x, y \in X, (x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ $(resp. f(x) \geqslant f(y))$. Elle est monotone si elle est croissante ou décroissante. On a les analogues des notions strictes avec des inégalités strictes.

E
- ⋆ Les fonctions affines sont monotones
- ⋆ L'exponentielle est strictement croissante
- ⋆ La fonction $\chi_{\mathbf{Q}}$ n'est ni croissante ni décroissante
- ⋆ les fonctions de répartition sont croissantes

Θ f est croissante si, et seulement si, $-f$ est décroissante.

Δ Une fonction défnie sur $[a,b]$ est dite à variation bornée si $\sup_{\sigma|[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\sigma_{k+1}) - f(\sigma_k)|$ est fini.

Θ Les fonctions à variations bornées sur $[a,b]$ sont les différences de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$.

1.2 Propriétés de la monotonie

Θ Si f et g sont croissantes, alors $f+g$, $\sup(f,g)$ et λf sont croissantes pour $\lambda \geqslant 0$.

Θ Si $f : Y \to \mathbf{R}$ et $g : X \to Y$ sont monotones, alors $f \circ g$ est monotone, croissante si f et g sont monotones de même sens, décroissante sinon.

A Si $(u_n)_n$ est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors la suite est monotone si f est croissante, et $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens contraire si f est décroissante.

Θ Si f est dérivable, alors elle est croissante si, et seulement si, $f' \geqslant 0$. Si on a $f' > 0$, alors elle est strictement croissante.

E x^3

Θ (de la bijection) Si X est un intervalle, f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone. Et alors f^{-1} est strictement monotone de même sens.

Θ Si f est continue et strictement monotone, alors f réalise un homéomorphisme de l'intervalle I dans son image.

1.3 Convexité et caractérisations

Δ Une fonction est convexe si ses cordes sont au-dessus de la courbe : $\forall \lambda \in [0,1], f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

Θ Une fonction est convexe si, et seulement si, on a l'une des propriétés suivantes :
- ⋆ f est au-dessus de ses tangentes : $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$
- ⋆ On a la croissante des cordes en un point : $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- ⋆ On a la triple inégalité $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leqslant \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$
- ⋆ Si f est dérivable, f' est croissante
- ⋆ Si f est deux fois dérivable, f'' est positive

A Γ est ln-convexe.

2 Régularité et applications

2.1 Régularité

Θ Une fonction monotone admet en tout point une limite à droite et à gauche, rangées dans l'ordre de variation de la fonction.

Θ L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.

A Les automorhismes de corps de**R** sont continus et sont les $x \mapsto ax, a \in \mathbf{R}$.

A (Helly) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes de I dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout x, $(f_n(x))_n$ est bornée, alors il existe une suite extraite qui converge simplement vers une fonction croissante.

Θ Si f est convexe, alors elle est dérivable à gauche et à droite. En particulier elle est continue, et ses points de non dérivabilité sont au plus dénombrables.

2.2 Inégalités de convexité

Δ Une fonction est convexe si $\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, *i.e.* si la courbe de f est sous ses cordes.

E
- ⋆ Les fonctions affines sont concaves et convexes, et ce sont les seules.
- ⋆ exp est convexe alors que ln est concavve.

Θ (Hölder) Pour toutes $f \in L^p, g \in L^q$, on a $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Θ (Minkowski) Pour toutes f, g mesurables, on a pour tout $p \in [1, \infty]$, $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Θ (interpolation) Si $f \in L^p \cap L^{p'}$, alors $f \in L^r$ pour tout $p \leqslant r \leqslant p'$, et $\|f\|_r = \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}$ où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p'}$.

Θ Si f est convexe, alors on a $\forall (\lambda_i)_i \in \mathbf{R}_0^n, \sum \lambda_i = 1, \forall (x_i)_i \in I^n, f(\sum \lambda_i x_i) \leqslant \sum \lambda_i f(x_i)$.

A (inégalité arithmético-géométrique) Si les s_i sont positifs, alors $\frac{n}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

A Le maximum des produits des distances d'un point intérieur à un tétraèdre régulier à ses sommets est atteint au centre du tétraèdre et vaut $(\frac{3V}{4S})^4$.

Θ (Jensen) Si f est convexe, alors $\forall \phi \in C([0,1], I), f(\int_0^1 \phi) \leqslant \int_0^1 f \circ \phi$. Autrement dit, $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.

A (Rao-Blackwell) en statistiques ? probas ? physique ?

Θ Si f et g sont convexes, alors $f+g$, $\sup(f,g)$ et λf sont convexes pour $\lambda \geqslant 0$, ainsi que $f \circ g$ si elle est définie.

Θ Inégalités de Clarkson

A Les L^p, $1 < p < \infty$, sont réflexifs.

2.3 Applications de la monotonie

+ Systèmes dynamiques discrets

Θ L'idée fondamentale de la comparaison est que si $u_n = f(n)$ et f est monotone, disons décroissante, alors on peut écrire $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$, et en intégrant $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k+1)$.

A On obtient ainsi un développement asymptotique des nombres harmoniques $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Θ Si $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est décroissante, alors $\sum_0^n f(i) - \int_0^n f$ converge. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int f$ sont de même nature.

A La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^a \log^b(n)}$ converge si, et seulement si, $a > 1$ ou $a = 1$ et $b > 1$.

3 Suites et approximations

3.1 Passages à la limite

Θ La limite simple de fonctions croissantes est croissante.

Θ (Dini) Di $f(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues et croissantes convergeant simplement vers une fonction f continue, alors la convergence est uniforme.

Θ La limite supérieure ou le supremum de fonctions convexe est convexe.

3.2 Optimisation

Θ (Farkas-Minkowski) $\{w \in H \mid \forall i \in I, \langle w, a_i \rangle \geqslant 0\} \subseteq \{w \in H \mid \langle w, b \rangle\}$ si, et seulement si, il existe une famille $(\lambda_i)_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, telle que $b = \sum_I \lambda_i a_i$.

Δ Cône tangent

Θ (condition nécessaire d'extremum)

Δ Contrainte qualifiée

Θ (relations de Kuhn-Tucker : conditions nécesaires d'extremum) Soient ϕ_i sont des fonctions définies sur un ouvert Ω de H, soit J une fonction dérivable en u, soit $U = \{v \in \Omega \mid \forall i, \phi_i(u) = 0\}$, et soit $I(u) = \{i \mid \phi_i(u) = 0\}$. Si les ϕ_i sont dérivables si $i \in U$, continues sinon, si J admet en u un minimum relatif en u et si les contraintes sont qualifiées en u, alors il existe des $\lambda_i(u) \geqslant 0, i \in I(u)$, tels que $J'(u) + \sum_{i \in I(u)} \lambda_i(u) \phi_i'(u) = 0$.

Θ (relations de Kuhn-Tucker : conditions nécessaires et suffisantes d'extremum dans le cas convexe) Soient ϕ_i sont des fonctions convexes sur un ouvert Ω de H et dérivables en u, soit J une fonction convexe soit $U = \{v \in \Omega \mid \forall i, \phi_i(u) = 0\}$, et soit $I(u) = \{i \mid \phi_i(u) = 0\}$. Alors s'il existe des $\lambda_i(u) \geqslant 0, i \in I(u)$, tels que $J' - u) + \sum_{i \in I(u)} \lambda_i(u) \phi_i'(u) = 0$, alors J admet en u un minimum par rapport à U.

3.3 Analyse numérique

GPO, GPC

Autres idées à explorer...

PLUS D'EXEMPLES Convexité sur $\mathbf{R}^n$ (ABSOLUMENT) ? Monotonie sur $\mathbf{R}^n$? Optimisation ! ! !

Il y a beaucoup à faire en probas !
Conjugaison convexe, Fenchel, etc.
Équations différentielles de la forme $y'' + qy = 0$ avec q cvx, monotone, etc.

- **Développements.**

  ⋆ **Fonctions à variations bornées, [S. Francinou(2007b)]**

  ⋆ **Théorème de sélection de Helly, [S. Francinou(2004)]**

  ⋆ **John-Loewner**

  ⋆ **Gradient à pas optimal**

Galton-Watson GPO Mazur

Références

Un bon livre de taupe tel [Gourdon(2008)] ou un RDO pour l'essentiel du cours, qui est assez élémentaire, complétés par [S. Francinou(2007b)] et [**?**] pour des exemples. De nombreuses applications non triviales se trouvent dans [S. Gonnord(1998)], peut-être dans [H. Queffélec(2007)]. Pour aller plus loin et regarder les fonctions à plusieurs variables, mentionner les monotonies définies avec des cônes convexes ou dans des Hilbert (réf ?), ainsi que les fonctions convexes plus générales pour lesquelles [Rockafellar(1970)] est parfait, peut-être remplacé plus élémentairement par [**?**] ou [Barvinok(2002)].

230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

Rapport du jury. L'étude de la convergence d'une série élémentaire par une hiérarchisation des méthodes et par la vérification des hypothèses correspondantes est appréciée du jury. Il faut soigner la présentation du plan et ne pas oublier les valeurs absolues lorsqu'on veut énoncer un théorème de convergence absolue (même remarque pour l'intégration). Le jury demande que les candidats ne confondent pas équivalents et développements asymptotiques. Les meilleurs pourront invoquer les méthodes classiques de renormalisation des séries divergentes.

Φ Certaines quantités ne sont connues que comme limites, souvent sous forme de séries : raffinements successifs, oscillations, évaluations de fonctions développables en série, formule de Taylor, etc. il convient donc d'étudier ces objets pour en connaître un peu mieux le comportement.

H Les Bernoulli étudient les $\sum f(k)$, Euler-MacLaurin inversent les formules de Taylor et obtiennent des formules sommatoires mais sans se soucier le la convergence. D'Alembert et Abel s'en inquiètent et trouvent des contre-exemples. Gauss et Cauchy développent proprement la théorie.

Avis. Ne pas oublier les études asymptotiques et s'en servir pour les cas où les théorèmes usuels ne s'appliquent pas (convergence uniforme non normale, TSCSA, etc.). Veiller à mettre beaucoup d'exemples !

⋆ ⋆ ⋆

1 Généralités et convergences

1.1 Généralités

Δ Étant donnée une suite $(u_n)_n$, la série de terme général u_n est la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = u_0 + \cdots + u_n$, appelée suite des sommes partielles. La série est notée $\sum u_n$, et elle converge si S_n converge, on note alors $\sum_0^\infty u_n = \lim S_n$. Dans ce cas, on peut définir le reste de la série $R_n = S - S_n$.

E
- ⋆ La série arithmétique $\sum(an+b)$ diverge sauf pour $a = b = 0$
- ⋆ La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si, et seulement si, $(u_n)_n$ converge : il y a équivalence entre suites et séries par ce procédé
- ⋆ La série géométrique $\sum x^n$ si, et seulement si, $|x| < 1$

A Développements p-adiques, séries Enguel

Θ On définit les combinaisons linéaires de séries par $\lambda \sum u_n + \sum v_n = \sum(\lambda u_n + v_n)$. Les séries convergentes forment un espace vectoriel.

Θ Si $\sum u_n$ converge, alors u_n converge vers 0. Une série de terme général ne tendant pas vers 0 est dite grossièrement divergente.

1.2 Critère de Cauchy

Θ Une série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, ses tranches de Cauchy convergent vers 0, *i.e.* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $n, m \geqslant n_\varepsilon$, on ait $\left|\sum_{k=n}^m u_k\right| \leqslant \varepsilon$.

E La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

E Si $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$, alors $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

A Su $(u_n)_n$ décroît et $\sum u_n$ converge, alors nu_n tend vers 0.

Θ (sommation par paquets) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \sum_{\phi(n)}^{\phi(n+1)} u_n$ converge. La réciproque est vraie si $(\phi(n+1) - \phi(n))_n$ est bornée, et toujours vraie si les termes sont positifs.

E Si p_n désigne le n-ième entier sans chiffre « 9 », alors $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

A (critère de condensation de Cauchy) Su $(u_n)_n$ décroît et $p \geqslant 2$, alors $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum p^n u_{p^n}$ converge.

1.3 Convergence absolue

Δ Une série $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Θ La convergence absolue implique la convergence. Ce fait caractérise les espaces complets.

E $\sum \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge.

Θ L'ensemble des séries convergeant absolument forment une algèbre $l^1(\mathbf{N})$.

Δ Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{a+b=n} u_a v_b$.

Θ (Cauchy-Mertens) Le produit de Cauchy d'une série convergente $\sum u_n$ et d'une série absolument convergence $\sum v_n$ est une série convergente et de somme $\sum_n u_n \sum_n v_n$.

2 Séries à termes positifs

2.1 Critères de convergence

Θ Dans le cas d'une série $\sum u_n$ à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante donc converge si, et seulement si, elle est bornée. La quantité $\sum_{n=0}^\infty u_n$ a toujours un sens, éventuellement ∞.

Θ (Utilisation des relations de comparaison)
- ⋆ si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
- ⋆ si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge
- ⋆ si $u_n = \Omega(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge

A $\sum \frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$ converge.

Θ (Règles de D'Alembert et de Cauchy) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers l et si $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers l, alors
- ⋆ Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent
- ⋆ Si $l = 1$, alors on ne peut conclure
- ⋆ Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent

E
- ⋆ Bertrand par Riemann
- ⋆ Permutations
- ⋆ Nombres sans 9
- ⋆ Contre-exemple lacunaire

A (Inégalité de Carleman) Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, ...

2.2 Comportement asymptotique

Θ (Règle de Raabe-Duhamel) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + O(n^{-2})$, alors $u_n \sim \frac{C}{n^a}$

Θ (Sommation des relations de comparaison)
- ⋆ si $u_n = o(v_n)$, alors
- ⋆ si $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n cv$, alors
- ⋆ si $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n dv$, alors

E Développements asymptotiques de H_n, $n!$

Θ (Critère de condensation de Cauchy) Si u_n décroît, alors $\sum u_n$ et $\sum p^n u_{p^n}$ sont de même nature.

2.3 Comparaison aux intégrales

Θ L'idée fondamentale de la comparaison est que si $u_n = f(n)$ et f est monotone, disons décroissante, alors on peut écrire $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$, et en intégrant $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k+1)$.

A On obtient ainsi un développement asymptotique des nombres harmoniques $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Θ Si $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est décroissante, alors $\sum_0^n f(i) - \int_0^n f$ converge. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int f$ sont de même nature.

A Riemann, Bertrand

A (Formule d'Euler Mac-Laurin) Oopa...

Θ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

3 Séries semi-convergentes

3.1 Séries alternées

Δ Une série $\sum u_n$ est dite semi-convergente si elle converge mais ne converge pas absolument.

Θ (Critère des séries alternées) Si $(u_n)_n$ tend vers 0 en décroissant, alors $\sum(-1)^n u_n$ converge. De plus, on a alors $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

E Un petit exemple de série harmonique alternée...

Θ Si les u_n sont les moments d'une mesure positive sur $[0,1]$, *i.e.* $u_n = \int_0^1 x^n d\mu(x)$, alors on a un procédé d'accélération de convergence efficace des séries alternées : si $= \sum c_{nk}x^k$ et $A_n = \sum_{k=0}^n c_{nk}a_k$, alors $|S - A_n| \leqslant \frac{\|P_n\|_\infty^{[0,1]}}{|P_n(-1)|} S$. On obtient une vitesse relative de l'ordre de $(3+\sqrt{8})^{-n}$ avec des polynômes de Chebyshev.

Θ (Euler) Un autre procédé de convergence est... La convergence est alors quadratique.

3.2 Transformation d'Abel

Θ (Transformation d'Abel) $\sum_n^m u_k v_k = \sum_n^{m-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_m v_m$.

Θ (Critère d'Abel) Si U_n est bornée et v_n décroît vers 0, alors $\sum u_n v_n$ converge.

3.3 Convergence commutative

Δ Une série $\sum u_n$ est dite commutativement convergente si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$, on a $\sum u_{\sigma(n)}$ qui converge vers la même somme.

Θ Une série est commutativement convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

Θ (Riemann) Si $\sum u_n$ est semi-convergente et $l \in \mathbf{R}$, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et soit de somme l.

4 Sommations explicites [S. Francinou(2007b), S. Francinou(2004)]

4.1 Manipulations directes de séries

Produits de Cauchy (proba de deux nombres premiers entre eux)
Nombres harmoniques (les reconnaître et se servir de leur dl)

4.2 Évaluation de séries entières

E
- ⋆ $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$
- ⋆ $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Θ (Hardy-Littlewood) Si $a_n = O(\frac{1}{n})$ et $\sum a_n x^n \to_{1^-} l$, alors $\sum a_n$ converge vers l.

4.3 Utilisation de séries de Fourier

Θ (Parseval)

E
- ⋆
- ⋆

Θ (Dirichlet) Si fC^1M, alors il y a convergence simple de la série de Fourier vers la fonction régularisée en tout point.

E
- ⋆ avec 1 sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve
- ⋆ avec t sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve
- ⋆ avec t^2 sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve

Θ (formule sommatoire de Poisson) Si f est de classe C^2, alors $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)$.

4.4 Utilisation d'une intégrale

Autres idées à explorer...

Renormalisation de séries divergentes
Formule d'Euler-MacLaurin
Plus d'estimations et d'études asymptotiques (exploiter l'équivalence suite-série)
Probabilités : Borell-Cantelli, Martingales, surtout Markov !
Séries doubles et Fubini ?

- **Développements.**

  - ⋆ **Inégalité de Carleman, [S. Francinou(2007b)]**
  - ⋆ **Théorème de Riemann, [S. Francinou(2007b)]**
  - ⋆ **Théorème taubérien de Hardy-Littlewood, [Gourdon(2008), ?]**

Références

Le plan du [Nourdin(2001)] est très bien. Le [Pommellet(1994)] donne une base honnête et bien illustrée. Le [?] pour les contre-exemples ainsi que les usuels [Chambert-Loir-Fermigier(1996a)] et [S. Francinou(2007b)] pour de nombreux résultats et exemples.

Rapport du jury. Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner un vecteur.

Φ Si la modélisation mathématique aboutit souvent à des équations du type $f(x) = 0$, on ne peut en général obtenir des solutions exactes, ainsi déjà pour des polynômes de degrés supérieurs à 5. On s'intéresse donc naturellement à la possibilité de les approcher numériquement. Ces méthodes ont d'ailleurs une portée bien supérieure à la simple recherche de zéros, ainsi la recherche de points critiques permet de localiser d'éventuels extremums, etc.

H Depuis les babyloniens des méthodes d'approximation systématiques, notamment d'extractions de racines carrées, sont attestées et pratiquées pour la résolution de problèmes pratiques. L'essor des constructions et de l'économie ne cessent de nécessite des méthodes d'approximations plus générales et puissantes.

Avis. C'est assurément une leçon où une grande place doit être faite à l'analyse numérique, et de nombreuses méthodes doivent illustrer la variété des idées et des outils permettant d'approcher des solutions. Il se s'agit pas de résolutions explicites mais bien d'apprixmations, ce sont donc des algorithmes qui doivent être présentés et suppléer aux formules dans les cas où celles-ci ne sont pas connues dans le cas général, et ces algorithmes doivent être bien détaillés. Insister sur les complexités en temps et en espace semble également bienvenu dans cette leçon explicitement pratique, ainsi que les mettre en application sur des cas particulier, non pour faire les calculs mais pour montrer le nombre de chiffres corrects que l'on peut espérer après n itérations. Mentionner sans insister les limites de chaque algorithme.

⋆ ⋆ ⋆

L'objectif de cette leçon est de trouver des procédés algorithmiques d'approximation de zéros de fonctions, et d'étudier les vitesses de convergence associées.

1 Premières méthodes

1.1 Recherche par dichotomie

Θ Soit $f \in C([a,b],\mathbf{R})$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors f d'annule sur $[a,b]$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$, puis pour tout $n \in \mathbf{N}$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$ si $f(a_n)f(c_n) < 0$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$ sinon. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et convergent vers un zéro de f.

Θ La convergence de la recherche par dichotomie est quadratique, *i.e.* $|a_n - b_n| = 2^{-n}|a_0 - b_0|$.

Faire des dessins en annexe illustrant les itérations. Traiter un exemple particulier. Rapport avec Baire ou les fermés emboités ?

Θ Soit f convexe de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, alors la connaissance de $f(x)$ pour $x \in \{a,b,c,d\}$ avec $a < c < d < b$ permet de restreindre la recherche du minimum de f à l'un des trois sous-segments. La convergence est quasi-quadratique, *i.e.* $|a_n - b_n| =)(t + \frac{1}{2})^n|a_0 - b_0|$, pour $t > 0$.

1.2 Approximations successives de Picard [Rouvière(2009)]

R On ramène la résolution de $f(x) = 0$ au problème de point fixe $f(x) - x = x$.

Θ (Banach-Picard) Une application f contractante d'un complet non vide dans lui-même admet un unique point fixe, limite de toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Si cette application dépend continûment d'un paramètre λ et que k ne dépend pas de λ, alors le point fixe dépend continûment de λ.

Θ La convergence est géométrique, plus précisément pour tout $x_0 \in E$, $|f^n(x_0) - l| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|f(x_0) - x_0|$.

E
- ⋆ (rouvière)
- ⋆
- ⋆

R La convergence est globale.

Δ Si $f \in C^1$ admet l comme point fixe, alors on dit que :

- ⋆ l est répulsif si $|f'(l)| > 1$
- ⋆ l est attractif si $|f'(l)| < 1$
- ⋆ l est super-attractif si $f'(l) = 0$, la convergence est alors quadratique

Θ (Ostrovski) Si $f \in C^1$ au voisinage d'un point fixe l, alors :

- ⋆ si l est attractif, alors il existe un bassin d'attraction autour de l, *i.e.* un voisinage V de l tel que toute suite $f^n(x_0)$ avec $x_0 \in V$ converge vers l. Alors si p désigne le premier ordre de dérivée non nulle en l, on a $|u_{n+1} - l| \sim \frac{|f^{(p)}(l)|}{p!}|u_n - l|^p$.
- ⋆ si l est répulsif, alors il existe un bassin de répulsion autour de l, *i.e.* un voisinage V de l tel que toute suite $f^n(x_0)$ avec $x_0 \in V\backslash\{l\}$ sor de V.
- ⋆ si $|f'(l)| = 1$, alors cela dépend des dérivées suivantes, mais la convergence est plus lente.

Θ Si f est de classe C^{p+1} au voisinage d'un point fixe l, et si $f^{(i)}(l) = 0$ pour tout $i \leqslant p$, alors la méthode itérative définie par f est d'ordre au moins $p+1$.

2 Le problème dans le cas réel

2.1 Méthode de Newton

Θ Le problème $F(x) = 0$ se ramène au problème de point fixe $G(x) = \lambda F(x) + x = x$. La meilleure convergence de cette méthode est obtenue lorsque le zéro est superattractif, et on obtient la méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

R Un cas particulier qui remonte au moins à l'Antiquité tardive est la méthode de Héron d'approximation des racines carrées $\sqrt{a}$, via $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

A (des valeurs intermédiaires) Si $f \in C([a,b])$ est telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors f s'annule sur $[a,b]$.

2.2 Méthode de la sécante

Θ (méthode de la sécante) Si F est de classe C^2 au voisinage d'un zéro l et si $F'(l) \neq 0$, alors pour x_0 et x_1 suffisamment proches de sorte que la suite récurrence $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$ soit bien définie, alors la méthode de la sécante converge vers l et est d'ordre au moins 1.

R L'avantage de ces méthodes est qu'elle ne nécessite pas la connaissance de la dérivée mais seulement des valeurs de la fonction. Numériquement, on évite des erreurs d'approximations dues au calcul nécessairement approché de la limite.

2.3 Accélérations de convergence

Δ (méthode Δ^2 d'Aitken) On définit $(\Delta^2 x)_n = \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$.

Δ (méthode de Steffensen) Il s'agit de la méthode d'Aitken définie par une suite itérative $(f^n(x_0))_n$.

Θ S'il existe $|k| < 1$ tel que $x_{n+1} - l = (k + \delta_n)(x_n - l)$ avec $\delta_n \to 0$, alors la méthode d'Aitken est définie à partir d'un certain rang et $\frac{(\Delta^2 x)_n - l}{x_n - l} \to 0$. Autrement dit, la convergence est plus rapide.

2.4 Suites de Sturm

3 Le problème en dimension finie quelconque

3.1 Méthodes de descente

3.2 Méthodes itératives

3.3 Méthodes de Newton-Raphson

Jacobi, Gauss-Seidel

4 Approximation de zéros de polynômes

Parler aussi d'élimination, de résultant, bases de Grobner, etc.

4.1 Méthode de Newton pour les polynômes

4.2 Localisation de racines de polynômes

Θ (Gauss-Lucas) Si $P \in \mathbf{C}[X]$ est non constant, alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P.

Θ Si $P = X^n + \sum a_i X^i \in \mathbf{R}[X]$, alors toute racine complexe x de P vérifie $|x| \leqslant \min(1, \sum a_i)$.

Θ (Eneström-Kakeya) Si $P = X^n + \sum a_i X^i \in \mathbf{R}[X]$, alors toute racine complexe x de P vérifie $\min \frac{a_k}{a_{k+1}} \leqslant |x| \leqslant \max \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

5 Résolution de systèmes linéaires [?]

R La méthode du pivot de Gauss permet d'approcher des solutions à un système linéaire inversible, ainsi que les formules de Cramer, mais ces deux méthodes sont trop coûteuses pour être exploitables en pratique, à savoir en $O(n^3)$.

5.1 Opérations et décompositions matricielles

Θ (décomposition LU) Pour toute matrice $A \in GL_n(K)$ de mineurs principaux non nuls, il existe une unique matrice triangulaire inférieure L et une unique matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. L et U sont effectivement constructibles en $O(n^3)$.

Θ Pour toute matrice $A \in GL_n(K)$, il existe une matrice de permutation P telle que $PA = LU$.

A Dans ce cas, la résolution de $Ax = b$ est en $O(n^2)$.

Θ (décomposition de Choleski) $\forall A \in S_n^{++}, \exists! L \in TI_n^+, A =^t LL$. Cette construction est effective en $I(n^3)$.

Θ (décomposition QR) $\forall A \in GL_n(K), \exists!(Q,R) \in O_n \times TS_n^+, A = QR$. Cette construction est effective en $I(n^3)$.

Θ (Hadamard) $\forall A \in M_n(\mathbf{R}), |det(A)| \leqslant \prod ||C_i||$.

5.2 Méthodes itératives

5.3 Méthodes de gradient

5.4 Approximation aux moindres carrés

Autres idées à explorer...

Équations fonctionnelles : EDP, équa diff, etc ? méthode d'Euler qui converge, Liapounov, ...
Parler de problèmes d'extremum, points critiques, etc ?
Dunford effectif, cf. von zur Gatten
Mentionner les méthodes de différences finies pour motiver le cas matriciel ?

- **Développements.**

  ⋆ **Méthode de Newton pour les polynômes**

  ⋆ **Gradient à pas optimal**

  ⋆

Méthodes de Newton, de gradient, etc.

Références

C'est une leçon numérique, donc les références d'analyse numérique sont centrales, notamment [**?**] et [**?**]. Sinon, [Rouvière(2009)] pour les approximations de points fixes, [Demailly(2006)] pour les aspects numériques, [Ciarlet()] pour les méthodes de gradient, [**?**] pour le cas linéaire et le numérique matriciel. Il y a plusieurs exercices détaillés explorant des méthodes intéressantes dans [Chambert-Loir-Fermigier(1996b)].

234. Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Rapport du jury. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie L2 ⊆ L1 (ou même Lp ⊆ Lq si p ⩽ q). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple L1 * L1).

Φ Les fortes conditions que régularité que sont la continuité laissent place à la seule possibilité d'intégrer, qui suffit à obtenir de nombreuses propriétés...

H Les procédés d'intégration vus comme réciproque de la dérivation ou comme procédé de sommation infinitésimal remontent à Leibniz et Newton. Cauchy est le premier à formaliser rigoureusement cette notion et met en place l'intégrale usuelle sur les fonctions continues, malheureusement bien trop rigide. Riemann élargit un peu la définition sans gagner de propriétés intéressantes au niveau structurel, notamment les fonctions intégrables ne passent pas à la limite. C'est Lebesgue qui fonde la théorie de la mesure et de l'intégration qui répond à ces attentes : les espaces de fonctions intégrables sont des espaces de Banach et les théorèmes d'interversion de symboles ne nécessitent que peu d'hypothèses. Un mot de Kurtzweil-Henstock ?

Avis. La théorie des L^p élémentaire est assez bien ficelée, il faut essayer de se démarquer par des applications et des résultats un peu plus poussés. Ainsi les résultats d'interpolation, les espaces de Sobolev, et surtout les applications aux EDP qui donnent ici un réel aboutissement à la théorie.

⋆ ⋆ ⋆

Nous nous plaçons donc dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ que l'on omet dans les notations si cela ne prête pas à confusion, et q désigne toujours l'exposant conjugué de p, à savoir $\frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1 Espaces L^p [Brezis(2005)]

1.1 L'espace de Banach L^p

Δ On définit $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid f$ mesurable et $\int |f|^p < \infty\}$ et $L^p = \mathcal{L}^p/\tilde{}$ où la relation d'équivalence˜est celle d'égalité presque partout.

Δ On définit, pour $f \in L^p$, $\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p$.

Δ On définit $\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid \exists C > 0, |f| \leqslant C\ pp\}$ et $L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\tilde{}$.

Δ on définit, pour $f \in L^\infty$, $\|f\|_\infty = supess f = \inf\{C > 0 \mid |f| \leqslant C\ pp\}$.

1.2 Propriétés des espaces L^p

Θ (Hölder) Pour toutes $f \in L^p, g \in L^q$, on a $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$.

Θ (Minkowski) Pour toutes f, g mesurables, on a pour tout $p \in [1, \infty]$, $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Θ (interpolation) Si $f \in L^p \cap L^{p'}$, alors $f \in L^r$ pour tout $p \leqslant r \leqslant p'$, et $\|f\|_r = \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$ où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p'}$.

Θ Si Ω est de mesure bornée, alors on a $L^p \subseteq L^{p'}$ pour $p' \leqslant p$.

Θ $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour tout $p \in [1, \infty]$.

Θ (Riesz-Fischer) L^p est un espace de Banach pour tout $p \in [1, \infty]$.

Θ Si $(f_n)_n$ est une suite de L^p convergeant au sens L^p vers $f \in L^p$, alors on peut en extraire une sous suite qui converge presque partout vers f et qui est presque partout dominée par une fonction de L^p.

1.3 Dualité et séparabilité

Θ $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Θ L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

R Ni L^1, ni L^∞ ne sont réflexifs.

Θ (Riesz) Pour tout $1 \leqslant p < \infty$, pour toute forme linéaire $\phi \in (L^p)'$, il exitste $u \in L^q$ qui représente $\phi : \forall f \in L^p, \langle \phi, f\rangle = \int uf$. Ainsi $(L^p)' \cong L^q$.

Θ L^p est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.

R L^∞ n'est pas séparable.

2 Convolution et régularisation [Brezis(2005)]

2.1 Convolution

Δ Dès que cela a un sens, on définit la convolée de f par g comme $f \star g : x \mapsto \int f(x - y)g(y)dy$.

Θ Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, pour toutes $f \in L^1, g \in L^p$, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^n$, $f \star g \in L^p$ et $\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p$.

Δ Support

Θ Support de la convolée

2.2 Régularisation

Θ Pour $f \in C_c^k, g \in L^1_{loc}, f \star g \in C^r$ et $D^a(f \star g) = D^a(f) \star g$ pour tout multi-indice a tel que $|a| \leqslant k$.

Δ Une suite régularisante – ou suite de noyaux réguliers – est une suite $(\rho_n)_n$ de C_c^∞ telle que :

- ⋆ $\rho_n \geqslant 0$
- ⋆ $supp(\rho_n) \subseteq B(0, \frac{1}{n})$
- ⋆ $\int \rho_n = 1$

Θ Il existe des suites régularisantes.

Θ (Noyaux réguliers) Si $(\rho_n)_n$ est une suite régularisante, alors :

- ⋆ si $f \in C$, alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{R}^n$
- ⋆ si $f \in L^p$ pour $p < \infty$, alors $\rho_n \star f$ converge au sens L^p vers f

A C_c^∞ est dans dans L^p pour tout $p < \infty$.

Θ (Lusin) Si μ est une mesure de Borel régulière, alors pour tout $p < \infty$ et tous $f \in L^p, \varepsilon > 0$, il existe $\phi_\varepsilon \in L^p \cap C$ telle que $\|\phi_{\varepsilon\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty}, \|\phi_\varepsilon - f\|_p \leqslant \varepsilon$ et $\mu(f \neq \phi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

2.3 Séries de Fourier [Candelpergher(2009)]

Δ Le noyau de Féjer d'ordre N est $F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N D_n(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$.

Θ Pour tout $x_0 \in [0, 1]$, on a $C_N(f)(x_0) = \int_0^1 F_N(x - x_0)f(x)dx = F_N \star f(x_0)$.

Θ (Féjer) Si f est dans L^1, alors :

- ⋆ $C_N(f)$ converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ $C_N(f)$ converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ $C_N(f)$ converge au sens L^1 vers f

Δ Une série de Fourier est convergente au sens d'Abel si $f_r(x) = \sum c_n(f)e^{2i\pi nx}r^{|n|}$ admet une limite lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures.

Δ Le noyau de Poisson d'ordre r est $P_r(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{2i\pi nx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos 2\pi x + r^2}$.

Θ Pour tout r, $f_r = P_r \star f$.

Θ (Abel) Si f est dans L^1, alors

- ⋆ f_r converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ f_r converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ f_r converge au sens L^1 vers f

3 Parties de L^p

3.1 Densité dans les L^p

Θ Si $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p.

Θ L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans L^p, pour $p \in [1, \infty[$.

Θ L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p, pour $p \in [1, \infty[$.

Θ Si μ est une mesure régulière extérieurement, alors $Lip_b \cap L^p(\mu)$ est dense dans L^p au sens L^p, pour $p \in [1, \infty[$.

Θ Si X est un espace métrique localement compact séparable et μ une mesure de Borel, alors $Lip_c \cap L^p(\mu)$ est dense dans L^p, pour $p \in [1, \infty[$.

Θ (Lusin)

3.2 Caractérisations de propriétés de parties de L^p

Θ (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Si $\omega \subset\subset \Omega$ et si F est une famille de L^p, $p < \infty$, telle que :

- ⋆ F est borné dans L^p
- ⋆ $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < d(\omega, \Omega^c), \forall |h| < \delta, \forall f \in F, \|\tau_h f - f\|_p^\omega < \varepsilon$

alors F_ω est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Θ (Grothendieck) Si $0 < p < \infty$ et si :

- ⋆ μ est une mesure de probabilité sur Ω
- ⋆ S est un sous-espace fermé de L^p
- ⋆ $S \subseteq L^\infty$

alors S est de dimension finie.

4 L'espace L^2 et les espaces de Sobolev

4.1 Le cas particulier de L^2

Θ L^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}$.

OA pour les polynômes orthogonaux

4.2 Espaces de Sobolev

Δ On définit $W^{1,p} = \{u \in L^p \mid \exists g_1, \dots, g_n \in L^p, \forall \phi \in C_c^\infty, \int u\phi_i' = -\int g_i\phi\}$, et $H^1 = W^{1,2}$. On définit alors, pour $u \in W^{1,p}$, $\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_i \|u_i'\|_p$.

Θ $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Θ $W^{1,p}$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.

Θ $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Θ Caractérisations

Θ Les H^s sont des espaces de Hilbert.

Quelques propriétés en plus sur les Sobolev.

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Riesz-Fischer, [Brezis(2005)]**
  - ⋆ **Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, [Brezis(2005)]**
  - ⋆ **Théorème de Grothendieck ?, [S. Gonnord(1996)]**
  - ⋆ **Théorème de Lusin ?, [M. Briane(2009)]**

Autres idées à explorer...

Plancherel, Bergman, Equation de la chaleur

Références

[Brezis(2005), ch. 4] pour la partie la plus imminente du plan ainsi que pour les Sobolev, qui peut être bien complété par [M. Briane(2009)]. Un bon livre d'intégration peut également faire l'affaire pour quelques résultats, ainsi le [?]. Voir aussi [?] !

Rapport du jury. Bien lire l'énoncé ! Il faut savoir illustrer sur des exemples l'utilité de l'hypothèse de domination pour la convergence dominée et les théorèmes de permutation séries-intégrales. Il faut aussi proposer des suites de fonctions qui convergent au sens L^1 sans converger presque partout. Beaucoup trop de candidats pensent que l'étude des séries se limite à l'étude des suites, oubliant la structure vectorielle sous-jacente.

Φ L'intégrabilité est la propriété de base pour pouvoir manipuler des fonctions de manière non triviale, faire des probabilités, de l'analyse de Fourier, etc. il convient donc de bien mettre en évidence les propriétés de ces fonctions, notamment en ce qui concerne les suites et séries qui sont les outils principaux de tout approximation.

H École française du début du XXe, puis développement des probas ?

Avis. Une leçon qui appelle des probabilités et des problèmes de convergence. Ne pas oublier les contre-exemples, et les structures classiques d'espaces de fonctions intégrables.

⋆ ⋆ ⋆

On se place de manière générale sur un espace mesuré (Ω, F, μ).

1 Comportements des suites et des séries

1.1 Convergence au sens L^1 [M. Briane(2009)]

Θ Soit $f(n)_n$ une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann de $[a, b]$ dans K. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f. Alors f est intégrable et $\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n$.

E (Riemann Lebesgue) Si f est intégrable sur $]a, b[$, alors $\lim \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.

E La converge simple ne suffit pas : si $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ et $f_n = \chi_{r_1,\dots,r_n}$, il y a convergence simple vers $\chi_{\mathbf{Q}}$ qui n'est pas Riemann-intégrable.

Δ On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions converge vers f
- ⋆ en norme 1 si $\int |f_n - f| < \infty$ et converge vers 0
- ⋆ presque partout s'il existe A de complémentaire de mesure nulle tel qu'il y ait convergence simple sur A

Θ Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions intégrables et convergeant vers f en norme 1, alors $\int f_n$ converge vers $\int f$ et il existe une sous-suite qui converge vers f presque partout.

E $(f_n)_n$ peut ne pas converger vers f comme on le voit avec $f_{n,k} = \chi_{[k/n,(k+1)/n}$ et les f_nk pris dans l'ordre lexicographique.

1.2 Théorèmes d'interversion

Θ (convergence monotone de Beppo-Levy) Si $f(_n)_n$ est une suite croissante de fonctionsmesurables positives, alors $f = \lim f_n$ est mesurable et on a $\lim \int f_n = \int f$.

E $\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{ax} dx$ converge vers $(1 - a)^{-1}$ si $a < 1$, ∞ sinon.

Θ Si les f_n sont mesurables et positives, alors $\sum \int f_n d\mu = \int \sum f_n d\mu$.

E $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \int \sum = \sum \int = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

A (Borel-Cantelli) Si les A_n sont mesurables, et si $\sum \mu(A_n) < \infty$, alors $\{n | x \in A_n\}$ est de cardinal fini pour presque tout x.

Θ (Fatou) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives, $0 \leqslant \int \liminf f_n d\mu \leqslant \liminf \int f_n d\mu$

A Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f et que $\sup \int |f_n| < \infty$, alors$f$ est intégrable.

Θ (Convergence dominée) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables et intégrables telles que
- ⋆ f_n converge simplement vers f presque partout
- ⋆ il existe g intégrable telle que $|f_n| \leqslant g$ presque partout

alors f est intégrable et $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

A
- ⋆ $f_n(x) = \sum (-1)^n x^n$ sur $[0, 1]$ donne $\sum \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$
- ⋆ $\int_0^{\pi/2} \sin^n \to 0$

A (continuité de l'intégration de f) Si f est intégrable, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in F, (\mu(A) \leqslant \delta \Longrightarrow \int_A |f| \leqslant \varepsilon$

1.3 Théorèmes de convergence [?]

Équiintégrabilité, Vitali-Hahn-Sacks, etc.

2 Espaces L^p [Brezis(2005)]

2.1 Premières propriétés

Δ On définit $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid f \text{ mesurable et } \int |f|^p < \infty\}$ et $L^p = \mathcal{L}^p/\tilde{}$ où la relation d'équivalence˜est celle d'égalité presque partout.

Δ On définit $\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid \exists C > 0, |f| \leqslant C \; pp\}$ et $L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\tilde{}$.

Θ $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour tout $p \in [1, \infty]$.

Θ (Riesz-Fischer) L^p est un espace de Banach pour tout $p \in [1, \infty]$.

Θ Si $(f_n)_n$ est une suite de L^p convergeant au sens L^p vers $f \in L^p$, alors on peut en extraire une sous suite qui converge presque partout vers f et qui est presque partout dominée par une fonction de L^p.

2.2 Parties de L^p [H. Queffélec(2007)]

Θ (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Si $\omega \subset\subset \Omega$ et si F est une famille de L^p, $p < \infty$, telle que :

- ⋆ F est borné dans L^p
- ⋆ $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < d(\omega, \Omega^c), \forall |h| < \delta, \forall f \in F, \|\tau_h f - f\|_p^\omega < \varepsilon$

alors F_ω est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Θ (Grothendieck) Si $0 < p < \infty$ et si :

- ⋆ μ est une mesure de probabilité sur Ω
- ⋆ S est un sous-espace fermé de L^p
- ⋆ $S \subseteq L^\infty$

alors S est de dimension finie.

2.3 Convolution et régularisation

Δ Dès que cela a un sens, on définit la convolée de f par g comme $f \star g : x \mapsto \int f(x-y)g(y)dy$.

Θ Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, pour toutes $f \in L^1, g \in L^p$, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^n$, $f \star g \in L^p$ et $\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Θ Pour $f \in C_c^k, g \in L_{loc}^1$, $f \star g \in C^r$ et $D^a(f \star g) = D^a(f) \star g$ pour tout multi-indice a tel que $|a| \leqslant k$.

Δ Une suite régularisante – ou suite de noyaux réguliers – est une suite $(\rho_n)_n$ de C_c^∞ telle que :

- ⋆ $\rho_n \geqslant 0$
- ⋆ $supp(\rho_n) \subseteq B(0, \frac{1}{n})$
- ⋆ $\int \rho_n = 1$

Θ Il existe des suites régularisantes.

Θ (Noyaux réguliers) Si $(\rho_n)_n$ est une suite régularisante, alors :

- ⋆ si $f \in C$, alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{R}^n$
- ⋆ si $f \in L^p$ pour $p < \infty$, alors $\rho_n \star f$ converge au sens L^p vers f

A C_c^∞ est dans dans L^p pour tout $p < \infty$.

2.4 Densités dans les L^p

3 Suites de variables aléatoires intégrables [Ouvrard(2009)]

3.1 Convergences de mesures [H. Queffélec(2007)]

Δ Sur l'espace des mesures bornées par M, on pose trois topologies :

- ⋆ $\mu_n \to \mu$ vaguement si $\forall f \in C_k, \int f d\mu_n \to \int f f d\mu$
- ⋆ $\mu_n \to \mu$ faiblement si $\forall f \in C_0, \int f d\mu_n \to \int f f d\mu$
- ⋆ $\mu_n \to \mu$ étroitement, ou en loi, si $\forall f \in C_b, \int f d\mu_n \to \int f f d\mu$

Θ (Lévy) Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires, on a équivalence entre :

- ⋆ $X_n \to X$ en loi
- ⋆ $\phi_{X_n} \to \phi_X$ simplement

De plus, si $\phi_n \to \psi$ continue en 0, alors $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de caractéristique ψ.

3.2 Les théorèmes limites

Θ (de la limite centrale)

3.3 Martingales [?]

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Féjer, [Candelpergher(2009)]**
  - ⋆ **Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, [Brezis(2005)]**
  - ⋆ **Théorème de Lévy, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Théorème de Riesz-Fischer**

Références

Pour la partie intégration, [M. Briane(2009)] est bien. Il faut une partie de cette leçon consacrée aux résultats et les outils de probabilités, notamment les processus. Le [?] est une bonne base assez simple, complété avec des exercices du [?] et peut-être de [Ouvrard(2009)].

236. Illustrer quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Rapport du jury. Il est souhaitable que les candidats précisent le cadre théorique de l'intégration qu'ils considèrent lors de leur leçon. Il ne faut pas exclure le recours à la variable complexe. Il faut savoir énoncer correctement le théorème de changement de variables en dimension n et l'appliquer. La méthode des résidus ne doit pas être oubliée. Il est important de montrer, sur des exemples, l'interaction entre le calcul d'intégrales multiples et d'intégrales simples. Les candidats choisissant ces leçons ont en général de bonnes connaissances sur le sujet. Certains éprouvent le besoin de parler de l'intégrale de Riemann, ceci n'a qu'un intérêt limité si on se contente des résultats les plus élémentaires reposant sur la convergence uniforme.

Φ Opération réciproque de la dérivation, nécessaire pour la résolution d'équations différentielles. Aitre sous les courbes.

H L'intégration est un procédé qui intéresse les mathématiciens depuis l'Antiquité, avec la calcul d'aires. C'est Leibniz et Johann Bernoulli qui découvrent qu'il s'agit du procédé réciproque de la dérivation. S'ensuit alors une grande carrière de l'intégrale, d'abord définie par Cauchy et Riemann, puis généralisée de manière fonctionnelle par Lebesgue, pour enfin être au coeur de bien des domaines où les variations sur les définitions ou les propriétés de l'intégrale font toute la richesse de ce procédé de sommation généralisé.

Avis. Il y a de très nombreues méthodes de calculs d'intégrales, il s'agit de les *illustrer* de manière assez équilibrée. Il faut insister sur les nombreuses intégrales particulières que l'on peut calculer par certaines méthodes détournées mais qui ne sont pas calculables par les moyens directs : intégrales elliptiques, etc. Sûrement la leçon peut gagner un peu à être plongée dans un cadre un peu plus vivant d'où sortent les intégrales considérées : théorie des nombres, longueurs de courbes, physique, etc. Attention au point de vue sur l'intégrale : l'intégrale de Lebesgue est plus générale et a une bien meilleure structure. Être conscient des limites des notions d'intégrales et de leurs intérêts, telle celle de Kurzweil-Henstock, etc.

⋆ ⋆ ⋆

1 Intégration élémentaire [?]

1.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Θ Si $f \in C([a,b],\mathbf{R})$, alors f admet une primitive F sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

R Cette expression explicite d'une intégrale en fonction d'une primitive est la clé de nombreuses résolutions d'équations différentielles, ainsi les linéaires.

Θ On a les primitives usuelles suivantes, avec des notations abusives :

Fonction	Primitive	Intervalle
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbf{R}^\star$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0,\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbf{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbf{R}$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x)$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x)$	$]-1,1[$

E
- ⋆ l'aire d'un disque de rayon r est πr^2, le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$
- ⋆ $\int_0^{\pi/4} \cos^{-2} = \tan(\pi/4) - \tan(0) = 1$
- ⋆ $\int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}$

Θ Pour calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples, et on a alors : si $F = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{(X-a_i)^j}$, alors $\int F = \sum_{i;j\neq 1} \frac{-a_{ij}}{(j-1)(X-a_i)^{j-1}} + \sum_i a_{i1} \ln(x-a_i)$.

1.2 Intégration par parties

Θ Si u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$, alors $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.

E
- ⋆ une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$
- ⋆ (Wallis) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n$ vérifie $I_0 = 1$, $I_1 = \pi/2$ et $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
- ⋆ (Γ d'Euler) $\Gamma : x > 0 \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ vérifie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- ⋆ Calcul de longueur

Θ (formule des sauts) Si $f \in C^1M(\mathbf{R})$ admet $a_1,\dots,a_n$ pour points de discontinuité, alors si $f' \in L^1_{loc}$ on a au sens des distributions : $T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^n (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}$.

1.3 Changement de variables

Θ Si ϕ est un C^1-difféomorphisme de $[a,b]$ sur son image, alors pour toute fonction continue f définie sur $\phi^{-1}([a,b])$, on a $\int_a^b (f\circ\phi)\phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f$.

E
- ⋆ (Dirichlet) $\int_0^{\pi/2} \ln\circ\sin = -\pi\frac{\ln 2}{2}$
- ⋆

Θ (règles de substitution) On utilise avec profit les substitutions suivantes pour calculer $\int f$:

- si $f = F(\sqrt[n]{ax+b}, x)$, alors on pose $u = \sqrt[n]{ax+b}$
- si $f = F(e^{\lambda x})$, alors on pose $u = e^{\lambda x}$
-

E
-
-

Θ (règles de Bioche) Pour calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle en sin et cos, on peut effectuer le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$. Dans certains cas particulier, on peut appliquer les règles de Bioche :

Symétrie de $\omega(t) = f(t)dt$	Changement de variable
$\omega(-t) = \omega(t)$	$u = \cos(t)$
$\omega(\pi - t) = \omega(t)$	$u = \sin(t)$
$\omega(\pi + t) = \omega(t)$	$u = \tan(t)$

E
- $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt = \frac{\pi}{2}$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos(t)} = 1$

2 Méthodes d'intégration indirectes

2.1 Méthodes d'interversion [Pommellet(1994)]

Θ (convergence monotone) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions positives intégrables sur X qui croît vers f, alors f est mesurable et $\int_X f_n \to \int_X f$.

Θ (convergence dominée) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions intégrables sur X, convergeant presque partout vers f sur X, telle qu'il existe g mesurable sur X telle que $\forall n \in \mathbf{N}, |f_n| \leqslant g$, alors f est intégrable sur X et $\int_X |f_n - f| \to 0$.

E
- Indices pour le théorème de Jordan
-

Θ (méthode de Laplace)

Θ (sommation terme à terme)

E
-
-
- La longueur de l'ellipse est $l = \int ...$

2.2 Intégrales à paramètres [Pommellet(1994)]

On s'intéresse aux fonctions de la forme $F(x) = \int_I f(x,t)dt$.

Θ (Continuité) On suppose que $f : X \times E \to \mathbf{C}$ est telle que
- Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est mesurable
- Pour tout $t \in X$, $x \mapsto f(t,x)$ est continue
- Pour tout compact, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\forall x \in K, |f(t,x)| \leqslant g(t)$ presque partout

Alors f est intégrable et $F : x \mapsto \int_X f(t,x)dt$ est définie et continue sur E.

Θ (Dérivabilité) On suppose que E est un intervalle réel et que $f : X \times E \to \mathbf{C}$ est telle que
- Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable
- Pour tout $t \in X$, $x \mapsto f(t,x)$ est dérivable presque partout
- Pour tout compact, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\forall x \in K, |\partial_2 f(t,x)| \leqslant g(t)$ presque partout

Alors $\partial_2 f$ est intégrable et $F : x \mapsto \int_X f(t,x)dt$ est dérivable sur E et $\forall x \in E, F'(x) = \int_X \partial_2 f(t,x)dx$.

E
- $\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt$ et donc $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$
- $\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$ vérifie une équation différentielle, donnant $\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$

Δ Fourier, Laplace

E Fresnel

2.3 Calcul des résidus [?]

Δ Si z_0 est une singularité de f, le résidus de f en z_0 est le premier coefficient du développement limité de g en z_0, noté $Res(f, z_0)$.

Θ (des résidus) Soit f holomorphe sur D privé de quelques points. Soit Γ le bord orienté d'un compact A de D qui ne contient aucun point singulier de f. Alors les points singuliers z_k de f dans A sont en nombre fini et $\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_k Res(f, z_k)$.

E
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.
- $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$
- $\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ pour $s \in]0,1[$
- $\forall \alpha \in]0,1[, \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}(1+t) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

Θ L'intégrale d'une fonction holomorphe sur tout contour fermé est nulle.

A (Paley-Wiener) Soit f continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. Alors f est dans D à support dans $[-M, M]$ si, et seulement si, Ff se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbf{C}$ et vérifie $\forall k \in \mathbf{N}, \exists C, |Ff(z)| \leqslant C|z|^{-k}e^{2\pi M|Im(z)|}$.

3 Calcul d'intégrales de plusieurs variables réelles [?]

Définition d'intégrales multiples par récurrence (correct ? justifier) puis limitation à deux variables -> ok avec Lebesgue

3.1 Théorèmes de Fubini

Θ (Fubini-Tonelli) Si $f : (X \times Y, A \otimes B) \to \overline{\mathbf{R}_+}$ est mesure et si μ et ν sont des mesures σ-finies sur X et Y, alors :
- $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est A-mesurable
- $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ est B-mesurable
- $\int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$

Θ (Fubini-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$, alors :

- ⋆ $f(x,\cdot)$ est μ-pp dans $L^1(\nu)$
- ⋆ $f(\cdot,y)$ est ν-pp dans $L^1(\mu)$
- ⋆ $\int_Y f(\cdot,y)d\nu$ est $L^1(\mu)$
- ⋆ $\int_X f(x,\cdot)d\mu$ est $L^1(\nu)$
- ⋆ $\int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu = \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$

E

- ⋆ $\int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$... et on en déduit $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- ⋆ (contre-exemple) $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ n'est pas intégrable sur $[-1,1]^2$

3.2 Changements de variables

Θ CV

E

- ⋆ $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- ⋆ (volume de la boule unité)

3.3 Intégrales curvilignes

Θ Stokes

Θ Green – Riemann

3.4 EDP

4 Un peu d'intégration numérique [?]

Autres idées à explorer...

Mettre des probas, calculs de lois, etc.
Insister sur les double calculs, principes de symétrie, etc.
INtégrales curvilignes et formes différentielles (pas trop, mais elles ont leur pce)

- **Développements.**
  - ⋆ **Un calcul à la Pac-Man, [Candelpergher(2009)]**
  - ⋆ **Théorème de Paley-Wiener, [Candelpergher(2009)]**
  - ⋆ **Inégalité de Heisenberg, [Candelpergher(2009)]**

Références

Un très bon cadre et un enrobage historique sont dans [**?**]. Les bons livres de taupe pour les méthodes usuelles, tels [Gourdon(2008)] ou [S. Francinou(2010)]. Le [Cartan(1961)] ou [**?**] pour le théorème des résidus et applications, le [Demailly(2006)] et [**?**] pour l'analyse numérique. Pour le cas à plusieurs variables, par exemple [M. Briane(2009)]. Des exemples sympathiques dans [Nourdin(2001)].

239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Rapport du jury. Se placer dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. La dérivation de fonctions du type « intégrale de 0 à x de f(x,t)dt » a souvent posé bien des problèmes aux candidats. Le jury a proposé d'´etudier la fonction de deux variables « intégrale de 0 à y de f(x,t)dt » mais aucun candidat, à qui cette question a été posée, n'a songé à utiliser et n'a évoqué la caractérisation des fonctions de classe C^1 par la continuité de leurs dérivées partielles.

Φ De nombreuses fonctions ne sont pas définissables explicitement à l'aide des fonctions classiques, mais nous en connaissons des expressions intégrales, ce qui pousse à étudier de manière générale les propriétés des fonctions définies à l'aide d'intégrales, dont on pourra espérer de bonnes propriétés compte tenu de la bonne connaissance que l'on a de l'intégrale.

H

Avis. De nombreux résultats généraux permettent d'obtenir des propriétés des intégrales à paramètres et des transformations classiques (Laplace, Fourier, etc.).

⋆ ⋆ ⋆

Nous nous plaçons dans le cadre de l'intégrale est celle de Lebesgue et toutes les fonctions sont supposées mesurables. On se place de manière générale dans un espace mesuré (X, T, μ) et un espace métrique E.

1 Intégrales à paramètres [Nourdin(2001)]

1.1 Suites d'intégrales

Θ Si u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$, alors $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.

E

- ★ (Wallis) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n$ vérifie $I_0 = 1$, $I_1 = \pi/2$ et $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
- ★ (Γ d'Euler) la fonction $\Gamma : x > 0 \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ vérifie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Θ (Convergence monotone) Si $(f_n)_n$ est une suite positive croissante de fonctions, alors sa limite simple est mesurable et $\int_I f_n \to \int_I f$.

Θ (Beppo-Levi) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions telles que $\forall n, \int_I f_n < \infty$, alors la limite simple f est L^1 et $\int_I f_n \to \int_I f$.

Θ (Fatou) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions positives, alors la limite inférieure est mesurable et $\int_I \liminf f_n \leqslant \liminf \int_I f_n$.

Θ (Convergence dominée) Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I et s'il existe une fonction $g \in L^1(I)$ telle que $\forall n, |f_n| \leqslant g$, alors $\int_I f_n \to \int_I f$.

A

1.2 Régularité des intégrales à paramètres

Θ (Continuité) On suppose que $f : X \times E \to \mathbf{C}$ est telle que

- ★ Pour tout $x \in E, t \mapsto f(t,x)$ est mesurable
- ★ Pour tout $t \in X, x \mapsto f(t,x)$ est continue
- ★ Pour tout compact, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\forall x \in K, |f(t,x)| \leqslant g(t)$ presque partout

Alors f est intégrable et $F : x \mapsto \int_X f(t,x)dt$ est définie et continue sur E.

Θ (Dérivabilité) On suppose que E est un intervalle réel et que $f : X \times E \to \mathbf{C}$ est telle que

- ★ Pour tout $x \in E, t \mapsto f(t,x)$ est intégrable
- ★ Pour tout $t \in X, x \mapsto f(t,x)$ est dérivable presque partout
- ★ Pour tout compact, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\forall x \in K, |\partial_2 f(t,x)| \leqslant g(t)$ presque partout

Alors $\partial_2 f$ est intégrable et $F : x \mapsto \int_X f(t,x)dt$ est dérivable sur E et $\forall x \in E, F'(x) = \int_X \partial_2 f(t,x)dx$.

Θ Si on définit $\phi : t \mapsto \int_{a(t)}^{b(t)} f(c(s),s)ds$ avec a,b,c de classe C^1 (attention aux intervalles de définition de c), alors ϕ est de classe C^1 et

$$\forall t \in J, \phi'(t) = a'(t)f(c(a(t)),a(t)) - b'(t)f(c(b(t)),b(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} c'(s)\partial_1 f(c(s),s)ds$$

Θ Fonction de Riemann ζ, prolongements

2 Intégrales de fonctions holomorphes [?]

2.1 Holomorphie sous l'intégrale

Θ L'intégrale d'une fonction holomorphe sur un contoure fermé est nulle.

Θ (Paley-Wiener) Soit f continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. Alors f est dans D à support dans $[-M,M]$ si, et seulement si, Ff se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbf{C}$ et vérifie $\forall k \in \mathbf{N}, \exists C, |Ff(z)| \leqslant C|z|^{-k}e^{2\pi M|Im(z)|}$.

Θ (Holomorphie) On suppose que E est un ouvert de $\mathbf{C}$ et que $f : X \times E \to \mathbf{C}$ est telle que

- ★ Pour tout $x \in E, t \mapsto f(t,x)$ est mesurable
- ★ Pour tout $t \in X, x \mapsto f(t,x)$ est holomorphe presque partout
- ★ Pour tout compact, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\forall x \in K, |f(t,x)| \leqslant g(t)$ presque partout

Alors f est intégrable et $F : x \mapsto \int_X f(t,x)dt$ est définie et holomorphe sur E, et toutes ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous le symbole d'intégration.

2.2 La fonction d'Euler [Nourdin(2001)]

Δ La fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x > 0$.

Θ La fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,\infty[$, vérifie l'identité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et est logarithmiquement convexe.

Θ (formule d'Euler) on a $\Gamma(x) = \lim_{n\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

Θ La fonction Γ admet un unique prolongement holomorhpe à $\mathbf{C}\backslash - \mathbf{N}$. Celui-ci ne s'annule pas et admet chaque $-n$ comme pôle simple.

Δ La fonction B d'Euler est définie par $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ pour $x, y > 0$.

Θ On a $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

2.3 Théorème des résidus

Δ Si z_0 est une singularité de f, le résidus de f en z_0 est le premier coefficient du développement limité de g en z_0, noté $Res(f, z_0)$.

Θ (des résidus) Soit f holomorphe sur D privé de quelques points. Soit Γ le bord orienté d'un compact A de D qui ne contient aucun point singulier de f. Alors les points singuliers z_k de f dans A sont en nombre fini et $\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_k Res(f, z_k)$.

A $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

A $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

A $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ pour $s \in]0,1[$.

Θ (argument) Si $f \in M(\Omega)$ est non constante ...

Θ (détermination principale du log)

Θ Le nombre de zéros de f entourés une fois par le lacet γ est $n_\gamma(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}$.

A (Rouché) Si $f, g \in H(\Omega)$ et si pour $D(a,r) \subseteq \Omega$ on a $|f-g| \leqslant |f|$ sur $C(a,r)$, alors f et g ont le même nombre de zéros sur $D(a,r)$.

3 Transformations intégrales [?]

3.1 Convolution

Θ Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1 pour presque tout x, et on pose $f \star g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dx$.

Θ La convolution est un produit bilinéaire, associatif, commutatif, continu et non unifère dans L^1.

Θ (Régularisation) si $\phi \in C_c^k$ et $f \in L^1$, alors $f \star \phi \in C^k$ et $\partial^\alpha(f \star \phi) = f \star \partial^\alpha \phi$.

Δ Un noyau régulier est une fonction K_a dépendant d'un paramètre a, telle que :

- ⋆ $\forall a \in A, K_a \geqslant 0$
- ⋆ $\forall a \in A, K_a$ est périodique
- ⋆ $\forall a \in A, \int_0^1 K_a = 1$
- ⋆ $\forall 0 < \delta < 1/2, K_a$ converge uniformément vers 0 hors de $]-\delta, \delta[$

Θ (Noyaux réguliers) Si $(K_a)_a$ est un noyau régulier et si f est dans L^1, alors :

- ⋆ $K_a \star f$ converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ $K_a \star f$ converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ $K_a \star f$ converge au sens L^1 vers f

3.2 Transformation de Laplace

Transferts de développements asymptotiques

3.3 Transmation de Fourier

Δ Pour $f \in L^1$, on pose $Ff(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$.

Θ La transformation de Fourier est linéaire, continue, à valeurs dans C_0, conserve la parité, "autoadjointe".

Θ Si $f, g \in L^1$, alors $(Ff = Fg \Longrightarrow f = g$ presque partout.

Θ Si f et Ff sont dans L^1, alors $f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\pi\xi}Ff(\xi)d\xi$ pour presque tout x, avec égalité en tout point de continuité.

Θ F ne prolonge de manière unique de D à L^2 en une application linéaire continue, encore notée F. C'est une isométrie de L^2.

Autres idées à explorer...
De la théorie des nombres !

- **Développements.**
  - ⋆ **Échantillonnage de Shannon, Wilhem**
  - ⋆ **Prolongement de la fonction Γ, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Théorème de Jordan C^1, [S. Gonnord(1998)]**
  - ⋆ **Inégalité de Heisenberg, [Candelpergher(2009)]**
  - ⋆ **Théorème de Paley-Wiener, [Candelpergher(2009)]**
  - ⋆ **Un calcul à la Pac-Man, formule des compléments, [E. amar(2004)]**

Références

Le contenu est dans [Nourdin(2001)], qui est bien pour ces leçons d'exemples. Pour la théorie générale, un livre de cours de base synthétique, tel [Pommellet(1994)] ou [H. Queffélec(2007)]. [?] pour la partie résidus ainsi que Fourier. Pour Laplace, voir [Pommellet(1994)].

Rapport du jury. Cette leçon ne peut se résumer à une collection de relations algébriques (analyse algébrique de la transformée de Fourier). Elle nécessite, pour s'inscrire dans le contexte de l'analyse, une étude minutieuse et une réflexion sur les hypothèses et les définitions des objets manipulés. L'extension de la transformée de Fourier aux distributions tempérées trouvera sa place ici.

Φ Il s'agit de généraliser la décomposition d'un signal en série de Fourier dans le cas d'un signal quelconque, la décomposition se faisant selon un spectre continu. Heureusement, non seulement la transformation est algébriquement appréciable, mais elle conserve l'injectivité que l'on connaît pour les séries de Fourier dans le cas de signaux périodiques : on peut donc obtenir de nombreuses informations sur un fonction en étudiant sa transformée de Fourier, qui est plus régulière et plus manipulable. L'idée se généralise même aux distributions en définissant la transformation de Fourier par transposition, et apporte également des résultats analogues.

H Hairer ? GW ?

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

On peut introduire formellement la transformation de Fourier en passant à la limite dans ce que l'on ferait pour des séries de Fourier de fonctions de périodes plus en plus grandes, cf. [**?**].

1 Transformation de Fourier

1.1 La transformation de Fourier dans L^1

Δ Pour $f \in L^1$, on définit sa transformée de Fourier par $Ff(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$, pour $\xi \in \mathbf{R}$.

E La transformée de Fourier de la gaussienne $x \mapsto e^{-ax^2}$ est la gaussienne $\xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\xi^2/a}$.

Θ La transformation de Fourier vérifie les propriétés suivantes :

- ⋆ linéaire : $F(f+\lambda g) = F(f) + \lambda F(g)$
- ⋆ tend vers 0 en l'infini (Rieman-Lebesgue)
- ⋆ à valeurs dans $C_0(\mathbf{R})$
- ⋆ continue $F : L^1(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R})$
- ⋆ conserve la parité
- ⋆ autoadjointe : $\int_{\mathbf{R}} F(f)g = \int_{\mathbf{R}} fF(g)$
- ⋆ linéairise les dérivations : si $f \in C^k \cap L^1$, $F(\partial^k f) = (-ix)^k F(f)$

E Mais $F(f)$ n'est pas forcément intégrable si f l'est, ainsi avec $f = 1_{[-a,a]}$.

R L'objet est donc génial algébriquement. Heureusement, il n'est pas condamné à l'inutilité :

Θ La transformation de Fourier est injective : si $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ sont telles que $F(f) = F(g)$, alors $f = g$ presque partout.

1.2 Transformation inverse de Fourier

Θ (inversion) Si f et Ff sont dans L^1, alors on a la formule d'inversion $2\pi f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\pi\xi}Ff(\xi)d\xi = F(F(-\xi))$ pour presque tout x, avec égalité en tout point de continuité.

E Avec $f_a = e^{-2\pi a|x|}$, on obtient que $F(\frac{a}{a^2+x^2})(\xi) = \pi e^{-2\pi a|\xi|}$.

Θ (inversion ponctuelle) Si $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^1M(\mathbf{R})$, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$ la formule $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \lim_{R\infty} \int_{|\xi|\leqslant R} e^{2i\pi\xi x}Ff(\xi)d\xi$.

Θ (formule sommatoire de Poisson)

Θ (Paley-Wiener) Soit f continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. Alors f est dans D à support dans $[-M, M]$ si, et seulement si, Ff se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbf{C}$ et vérifie $\forall k \in \mathbf{N}, \exists C, |Ff(z)| \leqslant C|z|^{-k}e^{2\pi M|Im(z)|}$.

1.3 L'espace de Schwartz

R Les opérations sur les distributions sont définies comme la transposée de l'opération sur les fonctions-test. Or $D(\mathbf{R}^n)$ n'est pas stable par transformation de Fourier : il faut augmenter la taille de l'espace des fonctions-tests pour garantir cette stabilité, c'est la raison d'être de la classe de Schwartz.

Δ On définit l'espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \mid \forall a, b \in \mathbf{N}^d, \exists C > 0, \forall x \in \mathbf{R}^d, |x^a\partial^b f(x)| \leqslant C\}$. On dit que ces fonctions sont à décroissance rapide.

E Les exponentielles décroissantes $x \mapsto \exp(-z|x|^2)$ où $Re(z) > 0$ sont dans $S(\mathbf{R}^d)$.

Θ $S(\mathbf{R}^d) \subseteq L^p(\mathbf{R}^d)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Θ $S(\mathbf{R}^d)$ est la cloture par transformation de Fourier de $D(\mathbf{R}^d)$.

Θ $S(\mathbf{R}^d)$ est stable par produit et par dérivation, et ces opérations y sont continues.

Θ La formule d'inversion de Fourier prouve que $F : S(\mathbf{R}) \to S(\mathbf{R})$ est un isomorphisme.

2 Convolution et régularisation

R Les limites des bonnes propriétés de la transformation de Fourier apparaissent lorsque la régularité manque : on s'intéresse donc naturellement à un procédé de régularisation se comportant bien vis à vis de F.

2.1 Convolution

Θ Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1 pour presque tout x, et on pose $f \star g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dx$.

Θ La convolution est un produit bilinéaire, associatif, commutatif, continu et non unifère dans L^1.

Θ (régularisation) si $\phi \in C^k_c$ et $f \in L^1$, alors $f \star \phi \in C^k$ et $\partial^\alpha(f \star \phi) = f \star \partial^\alpha \phi$.

Δ $D(\mathbf{R}) = D$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

E
- ⋆ $x \mapsto exp((x-a)^{-1}(x-b)^{-1})$ est dans D
- ⋆ Les gaussièmes sont dans D

A Pour toute $f \in L^1$, $\phi \star f \in C^\infty$.

2.2 Régularisation

Δ Un noyau régulier est une fonction K_a dépendant d'un paramètre a, telle que :

- ⋆ $\forall a \in A, K_a \geqslant 0$
- ⋆ $\forall a \in A, K_a$ est périodique
- ⋆ $\forall a \in A, \int_0^1 K_a = 1$
- ⋆ $\forall 0 < \delta < 1/2, K_a$ converge uniformément vers 0 hors de $]-\delta, \delta[$

Θ (Noyaux réguliers) Si $(K_a)_a$ est un noyau régulier et si f est dans L^1, alors :

- ⋆ $K_a \star f$ converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ $K_a \star f$ converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ $K_a \star f$ converge au sens L^p vers f si elle est L^p

Δ Une suite régularisante $(\rho_n)_n$ est une suite de fonctions positives de D, d'intégrales 1 et telle que $supp(\rho_n) \subseteq B(0, \frac{1}{n})$

E La suite $\rho_n = n\phi(nx)$, après normalisation, est une suite régularisante.

Θ Si $f \in L^p$, alors pour toute suite régularisante $(\rho_n)_n$ on a $\rho_n \star f \to f$ dans L^p. C^∞ est dense dans L^p.

2.3 Les noyaux de sommation

Δ Le noyau de Dirichlet d'ordre N est $D_n(x) = \sum_{-N}^N e_n(x)$. Il vaut $2N+1$ si $x = 0$, $\frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ sinon.

Θ Pour tout $x_0 \in [0,1]$, on a $S_N(f)(x_0) = \int_0^1 D_N(x-x_0)f(x)dx = D_N \star f(x_0)$.

Θ (Dirichlet) Si fC^1M, alors il y a convergence simple de la série de Fourier vers la fonction régularisée en tout point.

E
- ⋆ avec 1 sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve
- ⋆ avec t sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve
- ⋆ avec t^2 sur $[0,1]$ prolongée par imparité, on trouve

Δ Le noyau de Féjer d'ordre N est $F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N D_n(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$.

Θ Pour tout $x_0 \in [0,1]$, on a $C_N(f)(x_0) = \int_0^1 F_N(x-x_0)f(x)dx = F_N \star f(x_0)$.

Θ (Féjer) Si f est dans L^1, alors :
- ⋆ $C_N(f)$ converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ $C_N(f)$ converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ $C_N(f)$ converge au sens L^1 vers f

Δ Le noyau de Poisson d'ordre r est $P_r(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{2i\pi nx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos 2\pi x + r^2}$.

Θ Pour tout r, $f_r = P_r \star f$.

Θ (Abel) Si f est dans L^1, alors
- ⋆ f_r converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ f_r converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ f_r converge au sens L^1 vers f

Θ Les fonctions continues de coefficients de Fourier négatifs nuls sont les fonctions analytiques sur le disque qui se prolongent au cercle.

A Problème de Dirichlet

3 Extensions de la transformation de Fourier

3.1 Transformation de Fourier et convolution

Θ Si $f, g \in L^1$, $F(f \star g) = FfFg$.

E $f_a \star f_b = \pi f_{a+b}$

A $F(L^1)$ est dense dans C_0.

Θ Si $f, g \in L^1$, $fg \in L^1$ et $F(f), F(g) \in L^1$, alors $F(fg) = F(f) \star F(g)$.

3.2 Transformation de Fourier dans L^2

Θ F ne prolonge de manière unique de D à L^2 en une application linéaire continue, encore notée F. Plus précisément, si $f \in L^2$ est limite des $f_n \in D$, on définit $F(f) = \lim F(f_n)$.

Θ F est une isométrie de L^2 prolongeant la transformation de Fourier de L^1.

Θ (Plancherel) F est un isomorphisme unitaire.

E Calcul d'une transformée de Fourier

Δ La dispersion de $F(f)$ autour de ξ_0 est définie comme $V(F(f)) = \int_{\mathbf{R}} (\xi - \xi_0)^2 |F(f)|^2 d\xi = \|(\xi - \xi_0)F(f)\|_2^2$.

Θ (inégalité de Heisenberg) Pour $f \in S(\mathbf{R})$, on a $V(f)V(F(f)) \geqslant \frac{1}{16\pi^2}$.

R Et cette inégalité est optimale puisqu'elles sont atteintes par les gaussiennes.

3.3 Transformation de Fourier dans l'espace de Bargmann

3.4 Transformation de Fourier des distributions tempérées

R On peut définir la transformation de Fourier par transposition sur le dual de $S(\mathbf{R})$, puisqu'on a vu que S est stable par tranformation de Fourier.

Δ L'espace des distributions tempérées est $S'(\mathbf{R}^n)_D$, *i.e.* l'ensemble des formes linéaires continues sur S restreintes à D.

Θ $u \in D($
$R^n)$ est une distribution tempérée si, et seulement si, $\exists C > 0, \exists k, l \in \mathbf{N}, \forall \phi \in D(\Omega), |u(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_{k,l}$. En particulier u est d'ordre au plus l.

Δ On définit la transformation de Fourier dans S' par $\langle Fu, \phi \rangle = \langle u, F\phi \rangle$, et alors $Fu \in S'$.

Θ La transformation de Fourier est un automorphisme bicontinu de S' dans S', et on a la formule d'inversion de Fourier : $F^{-1} = \overline{F}$.

4 Mesures & Probabilités

Θ (Riesz) Si λ est une distribution positive d'ordre 0, *i.e.* une mesure de Radon, alors il existe une unique mesure régulière μ définie sur les boréliens de $\mathbf{R}^d$ telle que $\forall \phi \in C_0(\mathbf{R}^d, K), \lambda(\phi) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi d\mu$.

Θ Les mesures régulières finies peuvent être identifiées à des distributions tempérées d'ordre 0. On note M^1 l'ensemble des mesures bornées.

Θ (Lévy) Si $(\mu_n)_n$ est une suite de mesures finies uniformément bornées sur $\mathbf{R}^d$, et s'il existe une fonction $\phi : \mathbf{R}^d \to K$ continue en zéro telle que $\forall x \in \mathbf{R}^d, \lim_{n\infty} F\mu_n(x) \to \phi(x)$, alors il existe une mesure finie μ telle que $\phi = F\mu$ et $(\mu_n)_n$ converge étroitement vers μ.
Autrement dit, si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires dont les fonctions caractéristiques convergent simplement vers une fonction continue en 0, alors ces variables aléatoires convergent étroitement vers la transformée Fourier inverse de cette fonction.

Θ (Centrale limite) Si $(X_n)_n$ est une quite de variables aléatoires sur le même espace de probabilité, indépendantes, identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre 2 et à valeurs réelles, alors si m est leur espérance et σ leur variance, on a $Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i - m \to_L N(0,1)$. Autrement dit, Y_n converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

Θ (Poisson) Si on a une suite de variables aléatoires $(\rho_n)_n$ telle que ρ_n ait pour loi $B(n, p_n)$ telle que $np_n \to \lambda > 0$, alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Autres idées à explorer...

- **Développements.**

★ **Théorème de Paley-Wiener [Candelpergher(2009)]**

★ **Théorème de Plancherel [Wagschal(2012a)]**

★ **Inégalité de Heisenberg [Candelpergher(2009)]**

★ **Théorème de Lévy [H. Queffélec(2007)]**

★ **Théorème de Féjer**

Références

Pour le cours le [Gesquet-Witomski(1995), ch. 6] est excellent et souligne les motivations et applications physiques qui sous-tendent la théorie, il y a également un chapitre dédié dans [Candelpergher(2009)] qui est de même contenu et qui se transpose bien sans grand changement. De nombreux exercices et développements sont dans [H. Queffélec(2007)]. Pour les probabilités, le [**?**] est assez complet concernant les fonctions caractéristiques, et le [H. Queffélec(2007)] peut compléter efficacement.

Rapport du jury.

Φ Suites et séries à paramètres...

H Si des suites et séries de fonctions sont considérées, il n'y a pas de précautions prises sur la manipulation des objets avant le XIXe siècle. Cauchy est le premier à s'intéresser à l'analyse générale de ces questions, mais commet de nombreuses fautes qu'Abel met en évidence en donnant les premiers contre-exemples.

Avis. C'est une leçon d'exemples, donc il faut mettre en avant les limites et la portée de chaque résultat donné en l'illustrant suffisamment. Les exemples et erreurs historiques ou pratiques sont une bonne motivation, notamment du temps de Cauchy et d'Abel. Il faut mettre en évidence les différents types de convergence, les comportements dans différentes structures d'espaces, et également les différents types de séries de fonctions (entières, de Fourier, etc.). Les probabilités sont aussi une bonne source d'exemples.

⋆ ⋆ ⋆

1 Plusieurs modes de convergence

1.1 cvs, cvu, cvn, ...

Δ cvs

E
- ⋆ $f_n(x) = x^n$ cvs vers χ_1 sur $[0,1]$, qui est discontinue.
- ⋆ $\sum e^{-nx}$ cvs sur $\mathbf{R}_+$

Θ La cvs conserve les propriétés liées à l'ordre : convexité, K-lipschitzianité, croissance, etc.

Δ cvu

E
- ⋆ $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ cvu vers 0 sur $\mathbf{R}$
- ⋆ $\sum$ cvu

Θ Si F est complet, $(f_n)_n$ cvu si, et seulement si, $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall p,q \geqslant N, \forall x \in X, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \varepsilon$.

Θ (Dini)

Δ cvn

Θ cvn implique cvu implique cvs

1.2 Extractions de sous-suites

Θ (Ascoli-Arzela)

Θ (Helly)

1.3 L^p et pp

2 Théorèmes de transfert

2.1 Continuité, dérivabilité

2.2 Intégration

2.3 Interversion des limites

2.4 Holomorphie

3 Approximations

3.1 Approximations polynômiales

Θ (Korovkine) Si $(u_n)_n$ est une suite d'opérateurs positifs telle que $u_n(X^k)$ converge vers X^k pour $k \in \{0,1,2\}$, alors pour tout $f \in E$, $u_n(f)$ converge uniformément vers f.

A (Weierstrass) L'ensemble des fonctions polynômiales réelles est dense dans $C([a,b])$.

E Pas sur tout $\mathbf{R}$, ce sont nécessairement des polynômes !

Θ (Chudnovski)

Θ (Stone-Weierstrass) Si A est une sous-algèbre séparant les points, stable par conjugaison et contenant les constantes de $C(K,\mathbf{C})$ avec K compact, alors A est dense dans $C(K,\mathbf{C})$.

A L'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C(K)$.

A L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C_{2\pi}$.

Autres idées à explorer...

Banach-Steinhaus et séries de Fourier divergentes
Riesz-Fréchet-Kolmogorov

- **Développements.**

  ⋆ **Théorème de Stone-Weierstrass, [Wagschal(2012b), p. 432]**

Références

Un bon livre de taupe tel [Gourdon(2008)] ou [Pommellet(1994)] sont très bien pour un début, complétés par des résultats et exemples du [S. Francinou(2007b)] et [S. Francinou(2004)], ainsi que des contre-exemples du [**?**]. Les suites de fonctions holomorphes et les topologies sont bien traitées dans [Cartan(1961)]. Le [H. Queffélec(2007)] complète tous ces points par quelques développements et résultats plus précis.

242. Utilisation en probabilités de la transformation de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution.

Rapport du jury.

Φ Généralisation naturelle des suites et des séries aux fonctions. La convergence peut être interprétée différemment et les propriétés qui en découlent sont très variées.

H Rêve de Fourier pour la décomposition de toute fonction, les joyeux délires de Cauchy, les contre-exemples d'Abel.

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

1 Les différents modes de convergence

1.1 Convergences simple, uniforme, normale

Δ La suite $(f_n)_n$ convergence simplement vers f sur E si pour tout x de E on a $f_n(x) \to f(x)$, *i.e.* si la convergence est ponctuelle.

E
- ⋆ $x \mapsto x^n$ converge simplement vers χ_1 sur $[0,1]$.
- ⋆ $\sum x \mapsto e^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ vers $x \mapsto (1-e^{-x})^{-1}$

Δ La suite $(f_n)_n$ convergence uniformément vers f sur E si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

E
- ⋆ $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$.
- ⋆ $\sum x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Plus généralement les séries alternées dont le terne général décroît vers 0.

Θ Si F est complet, $(f_n)_n$ converge uniformément si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall p,q \geqslant N, \forall x \in X, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \varepsilon$

Θ La convergence uniforme implique la convergence simple.

E Les « bosses glissantes $x \mapsto e^{-x}xn^2$ » convergent simplement vers 0 sur $[0,1]$ mais pas uniformément.

Θ (Dini) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue, si la suite est croissante ou si les fonctions sont croissantes, alors la convergence est uniforme.

Θ (Croft) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues convergeant simplement, alors la limite est continue sur un dense.

Δ La série $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$

Θ Si F est un espace de Banach, la convergence normale implique la convergence uniforme.

E Les séries entières convergent normalement sur tout compact de leur disque de convergence

E cex

1.2 Extraction de sous-suites

Θ (Ascoli-Arzela) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur un compact métrique et si
- ⋆ Pour tout x de K, $(f_n)_n(x)$ est bornée
- ⋆ $(f_n)_n$ est équicontinue

alors il existe une sous-suite convergeant uniformément.

Θ (Helly) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes d'un intervalle et à valeurs réelles, si les $(f_n(x))_n$ sont bornées, alors il existe une sous-suite convergeant simplement.

Applications aux probas

1.3 Convergence dans L^p et presque partout

Δ (cvpp)

E

Δ cv Lp

E

Θ (Riesz-Fischer)

2 Propriétés de la limite

2.1 Continuité et dérivabilité

Θ cvu sur un métrique implique continue

E

E

E Fonction continue partout nulle part dérivable

Θ cvu dérivation

2.2 Intégration

Θ cv sous l'intégrale

Θ cvm

Θ cvd

2.3 Interversion de limites

Θ cvu lim

Θ (Réciproque à Hardy-Littlewood)

2.4 Holomorphie

Θ

3 Approximation de fonctions par des suites et des séries

3.1 Produit de convolution

Δ suite régularisante

Θ aprox par convol

3.2 Séries de Fourier

Δ série de Fourier associée à f

Δ noyaux de Poisson et Dirichlet

Θ Exprtession des noyaux

Θ (Féjer)

A (Weierstrass)

Θ (Dirichlet)

3.3 Approximation par des polynômes

Θ Interpolation

Θ Convergence

E

Δ Séries entières

Θ Propriétés des séries entières

A Calcul d'intégrale

Autres idées à explorer...

Bernstein pour Weierstrass

Phénomène de Runge

Convergence radiale pour les séries entières

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆ **Stone-Weierstrasss**
  - ⋆ **Féjer**
  - ⋆ **Müntz**
  - ⋆ **Riesz-Fischer**

Lévy

Références

Les ouvrages classiques et riches de probabilités font l'affaitre : l'élémentaire et efficace [**?**] complété par le très agréable [**?**], et des exemples et développements des [Ouvrard(2009)], [**?**] ainsi que [H. Queffélec(2007)].

243. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Rapport du jury. Il est dommage de ne parler que de dérivabilité par rapport à une variable réelle quand on énonce (ou utilise) ensuite ces résultats sur les fonctions holomorphes. : la leçon relative à la convergence des séries entières et aux propriétés de la somme a trop souvent été limitée à la variable complexe (voire réelle), excluant de ce fait les séries matricielles, ou sur une algèbre de Banach. Méthode de Laplace ?

Φ Généralisation de la notion de développement limité

H Les premiers développements en séries apparaissent avec Mercator au XVIIe, mais il faut attendre Newton pour avoir de nombreux développements en séries et pour une utilisation débridée des séries entières. Taylor énonce sa formule au XVIIIe, mais l'utilisation demeure essentiellement formelle, ainsi les étranges sommes d'Euler, et Cauchy est le premier à jeter des bases solides à l'analyse des séries entières, qui seront à la base de l'analyse complexe de Riemann et Weierstrass.

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

1 Séries entières [Pommellet(1994)]

1.1 Rayon et convergence

Δ La série entière de terme général a_n est la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n x^n$.

R La théorie a un sens dans une algèbre de Banach générale, et les résultats présentés ici portent leur fruits dans ce cas général car la convergence absolue implique la convergence.

Θ (lemme d'Abel) Si $\sum a_n z_0^n$ converge, ou si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| < |z_0|$.

Δ Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \sup\{z \in \mathbf{C} \mid \sum a_n z^n$ converge$\}$. Le domaine de convergence d'une série entière est situé entre le disque ouvert et le disque fermé de rayon R.

E
- ⋆ la série entière exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon infini
- ⋆ la série géométrique $\sum z^n$ a un rayon 1 et ne converge pas en 1

A Dans un algèbre de Banach, si $\|a\| < 1$ alors $1 + a$ est inversible d'inverse $(1+a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n$.

Θ Une série entière converge absolument dans son disque de convergence ouvert, diverge grossièrement à l'extérieur du disque fermé, converge normalement sur tout compact du disque ouvert. (cf. fig. 1)

1.2 Critères de détermination du rayon

Θ (règles de comparaison) On étudie la suite $|a_n| r^n$ par croissances comparées : si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \leqslant R_b$.

Θ Une série semi-convergente en $z_0 = Re^{i\theta}$ est de rayon R.

Θ (D'Alembert) Si la limite existe, R^{-1} est la limite de $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Θ (Cauchy) Si la limite existe, R^{-1} est la limite de $\sqrt[n]{u_n}$.

Θ (Hadamard) Le rayon de convergence est $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{a_n}$.

E
- ⋆ la série $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence e^{-1}
- ⋆ les séries entières $\sum R(n) z^n$ où R est une fraction rationnelle ont pour rayon de convergence 1

1.3 Opérations sur les séries entières[Cartan(1961)]

Δ On définit la combinaison linéaire comme $\lambda \sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (\lambda a_n + b_n) z^n$.

Θ Toute combinaison linéaire deux séries entières de rayons R et R' est de rayon supérieur à $\min(R, R')$, et égal si les rayons sont différents.

Δ On définit la produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z_n$ comme étant $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Θ Le produit de convolution de deux séries entières de rayons R et R' est de rayon supérieur à $\min(R, R')$.

Θ Si $\sum a_n x^n$ est telle que $a_0 \neq 0$ et est de rayon de convergence non nul, alors elle admet une série entière inverse de rayon de convergence non nul.

Θ Si $a_0 = 0$ et si les rayons de $\sum a_n z_n$ et $\sum b_n z_n$, alors la série entière substituée $\sum b_n X_n \circ \sum a_n Y^n$ a un rayon de convergence non nul et vaut sur le disque de convergence la composée des deux fonctions sommes.

Θ Si $\sum a_n x^n$ est telle que $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ et est de rayon de convergence non nul, alors elle admet une série réciproque nulle en 0 et de rayon de convergence non nul.

2 Fonctions développables en série entière [Pommellet(1994)]

2.1 Opérations sur les fonctions développables

Δ La série formelle dérivée de $\sum a_n x^n$ est $\sum n a_n x^{n-1}$.

Θ Séries entière et dérivée ont meme rayon de convergence, et sur le disque ouvert de convergence $x \mapsto \sum a_n x^n$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \sum n a_n x^{n-1}$. Plus généralement, on peut dériver terme à terme ou intégrer terme à terme une série entière à l'intérieur de son domaine de convergence.

E On a $\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt =$.

Θ Si f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon non nul, alors $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

E $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ est de classe C^∞ et sa série de Taylor est de rayon de convergence infini, mais elle n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

2.2 Développements en série entière usuels

Θ On a les développements en série entière suivants :
- ⋆ $\forall z \in \mathbf{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- ⋆ $\forall z \in \mathbf{C}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- ⋆ $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
- ⋆ $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- ⋆ $\forall x \in]-1, 1[, \forall \alpha \in \mathbf{R}, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)$
- ⋆ toute fraction rationnelle n'ayant pas 0 pour pôle est développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon égal au minimum des modules de pôles

2.3 Utilisation des séries entières

Θ Si $(u_n)_n$ est une suite récurrence linéaire, alors sa série génératrice $\sum u_n x^n$ est de rayon de convergence non nul et est une fraction rationnelle.

Δ Le nombre de $Bell B_n$ est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments...

Δ Le nombre de Catalan C_n est le nombre d'arbres binaires à n sommets. La suite $(C_n)_n$ vérifie la récurrence $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$. La série génératrice f des nombres de Catalan est $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. On a donc $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{n}{2n}$.

Équa diff, équa fonct, Bessel, etc.

2.4 Holomorphie et analyticité

Δ Une fonction est analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point.

Θ L'ensemble des points d'analyticité d'une fonction est ouvert.

Θ Une fonction de classe $C^\infty(I)$ est analytique si, et seulement si, pour tout segment J de I il existe des constantes C et r telles que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in J, |f^{(n)}(x)| \leqslant Cr^n n!$.

Θ Une fonction est analytique si, et seulement si, elle est holomorphe.

R Les forts résultats de rigidité des fonctions analytiques s'appliquent donc en particulier aux fonctions holomorhpes, notamment permettent des passages du local au global.

Θ (zéros isolés) Si f une fonction analytique non constante sur un ouvert connexe, alors les zéros de f forment un ensemble de points isolés.

Θ (inégalités de Cauchy) $\forall n \in \mathbf{N}, |a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$ où $M(r) = \sup_{C(a,r)} |f|$.

Θ (Liouville) Une fonction entière et bornée est constante.

A (D'Alembert-Gauss) $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

3 Comportement au bord

3.1 Résultats abéliens et convergence uniforme [Pommellet(1994)]

Θ Si $\sum a_n$ converge absolument ou est alternée, alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $B(0,1)$.

E
- ⋆ avec ln on obtient $\ln(2) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
- ⋆ avec *Arctan* on obtient $\frac{\pi}{4} = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Θ (Abel-Dirichlet) Si $\sum a_n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et la somme possède $\sum_n a_n$ pour limite en 1, *i.e.* est continue en 1.

A Un produit de Cauchy convergeant de deux séries convergentes est de somme égale au produit des deux sommes.

Θ (Stolz-Abel non tangentiel) Si une série entière converge en un point z_0 de son bord, alors la série entière converge uniformément sur le secteur angulaire $\{z_0(1 - re^{i\theta}) \mid r \in [0, \rho < 2\cos\phi[, |\theta| \leqslant \phi\}$.

Θ (Abel) Il y a équivalence entre convergence uniforme sur le disque ouvert, le disque fermé et le cercle de convergence.

3.2 Résultats taubériens [?]

Θ (Hardy-Littlewood) Si $a_n = O(\frac{1}{n})$ et $\sum a_n x^n \to_{1^-} l$, alors $\sum a_n$ converge vers l.

3.3 Points singuliers et séries lacunaires [H. Queffélec(2007), Nourdin(2001)]

Δ Un point régulier de f est un point autour duquel f est développable en série entière. Un point non régulier est un point singulier.

Θ Une fonction analytique possède au moins une singularité sur le bord de son disque de convergence.

Θ Si les a_n sont positifs, alors 1 est point singulier de $\sum a_n x^n$.

Θ Si a est un point du bord du disque de convergence, a est régulier si, et seulement si, il existe un voisinage V de a dans le bord du disque et des réels $r_a > 1/2$ et $C_a > 0$ tels que $b \in V \Longrightarrow \sup_k \frac{f^{(k)}(b/2)}{k!} r_a^k \leqslant C_a$.

Θ (lacunes de Hadamard) Si $(\lambda_n)_n$ est une suite d'entiers telle que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant \alpha > 1$, si $\sum a_n x^{\lambda_n}$ est de rayon 1, alors tous les points du bord sont singuliers.

Θ Si $(\lambda_n)_n$ est une suite strictement croissante d'entiers telle que $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ converge, si $\sum a_n x^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence infini et de somme f de sorte que $f'(0) \neq 0$, alors f est surjective.

Autres idées à explorer...

Fonction de Tschakalov
Théorèmes taubériens
Fonction ζ de Riemann

- **Développements.**

  - ⋆ **Théorème des lacunes de Hadamard, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Théorème taubérien de Hardy-Littlewood, [Gourdon(2008), ?]**
  - ⋆ **Nombres de Bell, [S. Francinou(2004)]**

Références

La théorie est bien traitée dans un livre de taupe, particulièrement [Pommellet(1994)] qui est rempli d'exemples bien pensés avec un bon plan. Il y a également des résultats bien présentés concernant les opérations dans le [Cartan(1961)], qui sert de plus de référence pour la partie holomorphe. On va un peu plus loin avec [H. Queffélec(2007)] et surtout les théorèmes taubériens et abéliens de [?].

245. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

Rapport du jury. es conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation « intégrale de f sur gamma » a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe ! Dans ce domaine, les leçons sont en général d'un bon niveau. Le théorème de Cauchy est souvent énoncé sous une forme particulière en prenant l'intégrale le long du bord d'un disque, alors que, pour le théorème des résidus, on considère des compacts à bord régulier ; ceci est assez incohérent. La définition d'une fonction méromorphe est parfois erronée l'ensemble des pôles doit être une partie fermée et discrète. Des candidats ont montré une perception limitée des rapports entre holomorphie, conformité et différentiabilité. Ils ont eu alors des difficultés pour trouver que toute fonction holomorphe est ouverte dés que sa dérivée ne s'annule pas sur le domaine de définition.

Φ On cherche à étudier la notion de dérivabilité que l'on connait dans le complexe, qui se trouve être immensément plus contraignante et apporter des propriétés bien plus rigides.

H XIXe ? (Cauchy, Thullen)

Avis. L'holomorphie est une hypothèse très forte malgré les apparences, il faut souligner ce point. La régularité est immense grâce à l'analycité qui implique beaucoup de rigidité et le principe du maximum. La formule de Cauchy permet de relier la fonction et ses dérivées permettant d'obtenir des convergences à moindres hypothèses, etc. Il faut faire ressortir cette diversité dans les propriétés, et surtout sortir un peu de la théorie pour elle-même : géométrie et théorie analytique des nombres sont les bienvenues ! Ouvrir un tout petit peu sur le plusieurs variables peut-être, en ramenant tout par Fubini à une variable ?

⋆ ⋆ ⋆

On assimile $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^2$ via $z = x + iz \mapsto (x, y)$. D est un ouvert de $\mathbf{C}$.

1 Fonctions holomorphes [Cartan(1961)]

1.1 Holomorphie

Δ Une fonction f est holomorphe en $z_0 \in D$ si le taux d'accroissement $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ admet une limite lorsque $h \to h, h \neq 0$, *i.e.* lorsque f est $\mathbf{C}$-dérivable en z_0. Elle est holomorphe sur D si elle est holomorphe en tout point de D.

E
- ⋆ tout polynôme est holomorphe sur $\mathbf{C}$
- ⋆ l'exponentielle est holomorphe sur $\mathbf{C}$
- ⋆ toute fonction analytique est holomorphe sur son domaine

Θ (Cauchy-Riemann) Pour que $f = P + iQ$ soit holomorphe en z_0, il faut et il suffit que f soit différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ et que l'une des propositions suivantes soit vérifiée :
- ⋆ $df_{(x_0,y_0)}$ est une similitude directe
- ⋆ $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$
- ⋆ $\overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- ⋆ $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

A Si f est de partie réelle, de partie imaginaire, de module ou d'argument constant sur un ouvert connexe, alors elle est constante.

A Si f est holomorhpe, alors elle est harmonique, *i.e.* $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Θ Les fonctions harmoniques sont les parties réelles de fonctions holomorphes. (ici ?)

1.2 Formule de Cauchy & analyticité

Θ (Goursat) Sur un ouvert connexe, si la fonction f est holomorphe sur un ouvert D, alors $f(z)dz$ est une forme différentielle fermée, *i.e.* l'intégrale est nulle sur le bord de tout triangle contenu dans le domaine. En particulier, une fonction holomorphe admet localement une primitive holomorphe.

Θ (Morera) Sur un ouvert connexe, si l'intégrale de f est nulle sur le bord de tout triangle, alors elle est holomorphe.

A Si f est holomorhpe sur D sauf en un nombre fini de points ou sur une droite, alors elle est holomorhpe sur D.

A Si f est holomorphe, alors f' est continue.

Θ (Cauchy) Si f est holomorphe sur D, alors pour tout $a \in D$ et tout chemin γ ne rencontrant pas a, on a la formule intégrale de Cauchy : $Ind_\gamma(a) f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$. En particulier si γ est le paramétrage $t \mapsto a + re^{it}$ du cercle $C(a,r)$, on a $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$.

Θ Si f est holomorphe sur un disque ouvert, alors elle est développable en série entière sur *ce* disque. Si f s'écrit $\sum a_n(z - z_0)^n$ au voisinage de z_0, alors $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

Θ $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-it} dt$.

Θ (inégalités de Cauchy) $\forall n \in \mathbf{N}, |a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$ où $M(r) = \sup_{C(a,r)} |f|$.

Δ Une fonction entière est une fonction holomorhpe sur $\mathbf{C}$.

Θ (Liouville) Une fonction entière et bornée est constante.

A (D'Alembert-Gauss) $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

1.3 Topologie et convergence de suites holomorphes

Δ La topologie est celle de la convergence uniforme sur tout compacts, *i.e.* celle induite par les semi-normes $\|\cdot\|_\infty^K$ où K est un compact inclus dans le domaine.

Δ Un borné est un borné pour chaque semi-norme.

Θ (Montel) Les compacts de $H(\Omega)$ sont les fermés bornés.

Θ Si $(f_n)_n$ est une suite de $H(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compacts, alors la limite f est dans $H(\Omega)$. De plus, toutes les dérivées succesives $(f_n^{(k)})_n$ convergent uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.

2 Propriétés découlant de l'analycité [Cartan(1961)]

2.1 Fonctions analytiques

Propriétés élémentaires du début du Cartan...

Θ (Paley-Wiener) Soit f continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. Alors f est dans D à support dans $[-M, M]$ si, et seulement si, Ff se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbf{C}$ et vérifie $\forall k \in \mathbf{N}, \exists C, |Ff(z)| \leqslant C|z|^{-k} e^{2\pi M |Im(z)|}$.

2.2 Principe du maximum [H. Queffélec(2007)]

Θ (principe du maximum) Si f vérifie la propriété de la moyenne sur D et est continue sur D, et si f atteint un maximum local sur D alors elle est constante au voisinage de ce maximum local.

A Si f est continue sur l'adhérence $\overline{D}$ d'un ouvert borné connexe, et si elle vérifie la propriété de la moyenne, alors f atteint sont maximum sur sa frontière. Si elle l'atteint à l'intérieur, elle est constante.

2.3 Principe du prolongement analytique

Θ (zéros isolés) Si f une fonction analytique non constante sur un ouvert connexe, alors les zéros de f forment un ensemble de points isolés.

A Une fonction analytique possède au moins une singularité sur le bord de son disque de convergence.

Θ (prolongement analytique) Si f et g sont deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe qui sont égales sur une partie comportant un point d'accumulation, alors elles sont égales.

A Γ

A (principe de symétrie de Schwartz) Si D est un ouvert connexe non vide symétrique par rapport à l'axe réel, si $D_+ = D \cap [Im \geqslant 0]$ et $D_- = D \cap [Im \leqslant 0]$, alors toute fonction continue sur D_+ et holomorphe sur $D_+ \backslash \mathbf{R}$ se prolonge de manière unique à D tout entier.

Θ (Cartan) Si Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbf{C}$ et $f \in H(\Omega, \Omega)$ telle que $f(a) = a$, alors :

- ⋆ $|f'(a)| \leqslant 1$
- ⋆ $|f'(a)| = 1 \Longleftrightarrow f \in Aut(\Omega)$
- ⋆ $|f'(a)| < 1 \Longrightarrow (f^n)_n$ converge uniformémnt vers a

3 Singularités et fonctions méromorphes [Cartan(1961)]

3.1 Développements de Laurent

Δ Une série de Laurent est une série $\sum a_n z^n$ à indices variant dans $\mathbf{Z}$.

Θ Il existe R_1 et R_2 tels que la série de Laurent $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de la couronne $R_2 < |z| < R_1$. Plus précisément, R_1 est le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$, et R_2 celui de la série $\sum_{n \leqslant 0} a_n z^{-n}$.

Θ Si une fonction est développable en série de Laurent, ce développement est unique.

Θ Toute fonction holomorphe dans une couronne est développable en série de Laurent sur cette couronne.

A Une fonction holomorphe dans la couronne $R_2 < |z| < R_1$ se décompose de manière unique sous la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ avec f_1 holomorphe sur $|z| < R_1$ et f_2 holomorphe sur $|z| > R_2$ et tendant vers 0 à l'infini.

3.2 Singularités et méromorphie

Θ Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D \backslash \{0\}$, alors on est dans l'une des trois situations :

- ⋆ f est bornée au voisinage de 0, et alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur D : le point singulier est illusoire
- ⋆ f n'a qu'un nombre fini de coefficients de Laurent d'indice négatif et on peut l'écrire $z^{-n} g(z)$ avec g holomorphe sur D
- ⋆ f n'est pas méromorphe en 0 : c'est un point singulier essentiel

Δ Dans le second cas, on dit que la fonction f est méromorphe au voisinage de 0.

Θ (Casorati-Weierstrass) Si 0 est un point singulier essentiel de f, alors l'image de tout disque épointé $D(0, \varepsilon) \backslash \{0\}$ est dense dans $\mathbf{C}$.

Θ (Cartan) Si 0 est un point singulier essentiel de f, alors l'image de tout disque épointé $D(0, \varepsilon) \backslash \{0\}$ est $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}$ privé d'un point.

3.3 Résidus et intégration

Δ Si z_0 est une singularité de f, le résidus de f en z_0 est le premier coefficient du développement limité de g en z_0, noté $Res(f, z_0)$.

Θ (des résidus) Soit f holomorphe sur D privé de quelques points. Soit Γ le bord orienté d'un compact A de D qui ne contient aucun point singulier de f. Alors les points singuliers z_k de f dans A sont en nombre fini et $\int_\Gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_k Res(f, z_k)$.

A $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

A $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

A $\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ pour $s \in]0,1[$.

Θ (argument) Si $f \in M(\Omega)$ est non constante ...

Θ (détermination principale du log)

Θ Le nombre de zéros de f entourés une fois par le lacet γ est $n_\gamma(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f}$.

A (Rouché) Si $f, g \in H(\Omega)$ et si pour $D(a,r) \subseteq \Omega$ on a $|f - g| \leqslant |f|$ sur $C(a,r)$, alors f et g ont le même nombre de zéros sur $D(a,r)$.

4 Théorie analytique des nombres [Hindry(2008), Tenenbaum(2008)]

Fonctions elliptiques, nombres premiers, Chebotarev, etc.

5 Gémétrie complexe [Cartan(1961)]

5.1 Représentation conforme

Δ Un ouvert U est simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet est homotope à un point.

Θ Si U est un ouvert connexe non vide, alors chaque proposition implique la suivante :

- ⋆
- ⋆
- ⋆
- ⋆
- ⋆

Θ (représentation conforme de Riemann) Si $U \neq \mathbf{C}$, les propriétés précédentes sont équivalentes. Tout ouvert simplement connexe est donc conforme à $\mathbf{C}$ ou au disque unité D.

5.2 Détermination des applications conformes

Θ (lemme de Schwartz) Si f est holomorphe sur le disque unité $D = D(0,1)$, avec $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour $|z| < 1$. Alors :

- ⋆ $\forall z \in D, |f(z)| \leqslant |z|$
- ⋆ S'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{U}$ tel que $f(z) = \lambda z$

Θ Pour $a \in D$, l'homographie $\phi_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est une application conforme, d'inverse ϕ_{-a}.

A Les automorphismes conformes de D sont les $z \mapsto e^{i\theta}\phi_a(z)$ pour $\theta \in \mathbf{R}$ et $a \in D$.

Autres idées à explorer...

Du Chebotarev-like ? Plus de théorie analytique des nombres !
Indices par rapport aux courbes, citer Jordan ?
Produits infinis

- **Développements.**
  - ⋆ **Théorème de Paley-Wiener, [?]**
  - ⋆ **Représentation conforme de Riemann, [Cartan(1961)]**
  - ⋆ **Prolongement et pôles de la fonction Γ, [H. Queffélec(2007)]**
  - ⋆ **Formule des compléments**

Références

[Cartan(1961)] pour le plan général, très efficace et complet, un bon découpage pour faire le plan. Peut-être complété par le très dense [?], et des applications des résidus sont dans [?]. On peut ouvrir un peu sur l'analyse complexe à plusieurs variables avec le [Hörmander(2000)]. Pour la théorie analytique [Tenenbaum(2008), partie II] et [Hindry(2008), ch. 4] sont parfaits. Des développements au principe du maximum sont dans [H. Queffélec(2007)]. Il y a des applications et des points de vue intéressants dans le [?] et [Nourdin(2001)].

Rapport du jury. Les différents modes de convergence (L2, Fejer, Dirichlet etc...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et C1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier.

Φ Les fonctions sinusoïdales sont des fonctions extrêment régulières et bien connues, il est donc naturel de s'intéresser à la décomposition d'un signal périodique général en sommes de fonctions de ce type : c'est l'essence des séries de Fourier. Si des problèmes de convergence apparaissent du fait du manque de régularité de certaines fonctions, il y a néanmoins toujours de bons résultats à partir du moment où la continuité est assurée.

H Bernoulli est le premier à décomposer une fonction en série trigonométrique (1753) pour résoudre l'équation des ondes. Fourier généralise les séries de Fourier (1800) pour le problème de diffusion de la chaleur, sans se pose la question de la convergence. C'est Dirichlet (1829) qui apporte une réponse positive à la convergence simple dans le cas C^1M. Heine (1870) prouve la convergence uniforme dans le cas C^1M en absence de discontinuité. Mais Du Bois Raymond (1876) donne un exemple continu qui diverge en un point. Féjer (1908) renforce la convergence avec le procédé de Cesàro et prouve la convergence uniforme (resp. L^p) des sommes partielles de Cesàro si la fonction est continue (resp. L^p). Kolmogorov donne un exemple de série de Fourier partout divergente pour une fonction L^1, mais Carleson (1967) prouve la conjecture de Lusin (1966) : il y a convergence presque partout dans le cas L^p dès que $p > 1$.

Avis. Les séries de Fourier servent dans beaucoup de domaines et restent toutefois un outil assez aisé à manipuler : ce sont des séries munies d'une bonne convergence, d'une grande rigidité, et malgré tout assez générales. Il faut montrer cette richesse dans le plan. Les résultats élémentaires et les cours usuels sont évidemment indispensables, mais il faut sortir du programme de taupe. Des résolutions d'équations non triviales, les inégalités isopérimétriques, l'existence de séries de Fourier divergentes, l'étude de séries entières sur le bord de leur disque de convergence, les séries de Fourier de distributions, etc. sont autant de sujets qui méritent leur place !

⋆ ⋆ ⋆

On ne considère que des fonctions 1-périodiques, quitte à remplacer $f(x)$ par $f(Tx)$, et on travaille naturellement sur $[0, 1[$ qui détermine entièrement la fonction.

1 Séries de Fourier et convergence L^2 [Candelpergher(2009)]

Toutes les propriétés sont relatives à une fonction $f \in L^2$.

1.1 Polynômes trigonométriques

Δ On introduit $e_n : x \mapsto e^{2i\pi nx}, \forall n \in \mathbf{Z}$.

Δ Un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $P : x \mapsto \sum_{i=-n}^{n} c_n e_n$, où $(c_n)_n \in \mathbf{R}^{2n+1}$. Alors P est 1-périodique et on obtient les coefficients par $c_n = \langle P, e_n \rangle = \int_0^1 P(x)e^{-2i\pi nx}$.

Θ (Bernstein) Si f est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n, on a $\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty$.

Δ Une série de Fourier est une série indexée par $\mathbf{Z}$ de la forme $\sum c_n e_n$. Elle converge si ses sommes partielles symétriques $\sum_{n=-N}^{N} c_n$ convergent.

R Cela n'implique aucune la convergence usuelle de la série, ainsi $\sum n$ converge au sens de Fourier.

1.2 Coefficients de Fourier

Θ $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2 = L^2([0, 1[)$ muni du produit scalaire usuel $(f|g) = \int_0^1 f\overline{g}$, *i.e.* $\forall f \in L^2, f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f|e_n)e_n$, *i.e.* $\|S_N(f) - f\|_2 \to 0$.

Δ On définit les coefficients de Fourier de f par :

- ⋆ $c_n(f) = (f|e_n) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}dt$ les coefficients exponentiels
- ⋆ $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 2\int_0^1 f(t)\cos(2\pi nt)dt$
- ⋆ $b_n(f) = i(c_n(f) - +c_{-n}(f)) = 2\int_0^1 f(t)\sin(2\pi nt)dt$

A Les coefficients de Fourier a_n (resp. b_n) d'une fonction paire (resp. impaire) sont nuls.

Δ L'espace $l^2(\mathbf{Z})$ est l'espace des suites de carrés de modules sommables, muni du produit scalaire $(c|d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n$. Il est complet.

Θ La suite $\hat{f} = (c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ est dans $l^2(\mathbf{Z})$.

Θ Si $\sum c_n e_n$ converge uniformément vers f, alors f est développable en série de Fourier et $c_n(f) = c_n$.

1.3 Convergence dans L^2 et aspects hilbertiens

Δ La somme partielle de Fourier de f est $S_n(f) = \hat{f}(n) = Ff(n) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$.

Θ (Bessel-Parseval) Pour toute $f \in L^2$, $(c_n(f))_n \in l^2(\mathbf{Z})$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \|(c_n(f))_n\|_2^2$. On a également $\forall f, g \in L^2, (\hat{f}|\hat{g}) = (f|g)$.

Θ (Wirtinger) Si $\int_0^1 f = 0$, alors $\|f\|_2 \leqslant \|f\|$.

A (inégalité isopérimétrique) Si C est une courbe fermée simple de longueur l et enfermant une aire A, alors $l^2 \geqslant 4\pi A$ et il y a égalité si, et seulement si, la courbe est un cercle.

Θ (Riesz) $F : f \in L^2 \mapsto (c_n(f))_n \in l^2$ est un isomoprhisme unitaire.

R Si on utilise l'intégrale de Riemann ici, ce n'est plus un isomorphisme car $(L^2, \|\cdot\|_2^R)$ n'est pas complet.

2 Convergences de la série de Fourier [Candelpergher(2009)]

2.1 Séries ponctuellement divergentes

Θ Il existe un G_δ dense non dénombrable de fonctions de $(C_1^0(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ dont la série de Fourier diverge en presque tout point.

E La fonction paire et 2π-périodique définie par $\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin((2^{p^3} + 1)x/2)$.

Θ (Kolmogorov) Il existe une fonction $f \in L_1^1$ de série de Fourier divergente en tout point.

2.2 Convergence uniforme

Θ (Riemann-Lebesgue) Si $f, g \in L^1$ ont mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

E $\sum \frac{1}{n} \cos(2^n \pi x)$ diverse sur l'ensemble dense formé des $j2^{-n}$.

Θ (Dirichlet uniforme) Si fL^1 et si $(c_n(f))_n \in l^1$, la série de Fourier de f converge uniformément et presque partout vers f. Si f est continue, alors il y a convergence ponctuelle vers f partout.

Θ Si $f \in C^1$, alors il y a convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ de $S_N(f)$ vers f.

E La fonction $x \in [0, 1[\mapsto x(1-x)$ est limite uniforme de sa série de Fourier $\frac{1}{6} - \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2i\pi nx}}{2\pi^2 n^2}$, en particulier $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Θ Si $(c_n(f))_n$ est réelle et décroît vers 0, alors il y a convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ de $S_N(f)$ vers f.

2.3 Théorème de Féjer

Δ Le noyau de Féjer d'ordre N est $F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2$.

Θ Pour tout $x_0 \in [0, 1]$, on a $C_N(f)(x_0) = \int_0^1 F_N(x - x_0) f(x) dx = F_N \star f(x_0)$.

Θ (Féjer) Si f est dans L^1, alors :

- ⋆ $C_N(f)$ converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ $C_N(f)$ converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ $C_N(f)$ converge au sens L^1 vers f

A (Weierstrass) Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales.

A Deux fonctions $f, g \in L^1$ qui ont mêmes coefficients de Fourier sont égales presque partout.

2.4 La transformation de Fourier périodique

Δ La transformation de Fourier périodique est $F : f \in L^1 \mapsto (c_n(f))_n \in c_0(\mathbf{Z})$.

Θ F est linéaire, continue et injective. De plus $\forall f, g \in L^1, F(f \star g) = F(f)F(g)$.

Θ Si $f \in C^1$, alors $c_n(f') = inc_n(f)$. Si $f \in C^p$, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ pour tout $k \leqslant p$.

Θ Si $f \in C^p$, alors $c_n(f) = O(n^{-p})$. Réciproquement, si $f \in C^0$ et $|c_n(f)| = O(n^{-p})$, alors $f \in C^{p-2}$.

Θ (formule sommatoire de Poisson) Si f est de classe C^2, alors $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)$.

2.5 Convergence simple et noyaux de Dirichlet

Δ Le noyau de Dirichlet d'ordre N est $D_n(x) = \sum_{-N}^{N} e_n(x)$. Il vaut $2N+1$ si $x = 0$, $\frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ sinon.

Θ Pour tout $x_0 \in [0, 1]$, on a $S_N(f)(x_0) = \int_0^1 D_N(x - x_0) f(x) dx = D_N \star f(x_0)$.

Θ (Dirichlet) Si fC^1M, alors il y a convergence simple de la série de Fourier vers la fonction régularisée en tout point.

E
- ⋆ avec 1 sur $[0, 1]$ prolongée par imparité, on trouve
- ⋆ avec t sur $[0, 1]$ prolongée par imparité, on trouve
- ⋆ avec t^2 sur $[0, 1]$ prolongée par imparité, on trouve

E (Phénomène de Gibbs) Si f vaut $\frac{1}{4}\delta_{[0,1/2[} - \frac{1}{4}\delta_{[1/2,1[}$, alors il n'y a convergence uniforme sur aucun intervalle contenant 0.

R (Carleson, 1966) Si $f \in L^p$, $p > 1$ et $p < \infty$, alors la série de Fourier converge presque partout vers f.

3 Noyaux réguliers et autres convergences [Candelpergher(2009), H. Queffélec(2007)]

3.1 Le théorème de noyaux réguliers

Δ Un noyau régulier est une fonction K_a dépendant d'un paramètre a, telle que :

- ⋆ $\forall a \in A, K_a \geqslant 0$
- ⋆ $\forall a \in A, K_a$ est périodique
- ⋆ $\forall a \in A, \int_0^1 K_a = 1$
- ⋆ $\forall 0 < \delta < 1/2, K_a$ converge uniformément vers 0 hors de $]-\delta, \delta[$

Θ (Noyaux réguliers) Si $(K_a)_a$ est un noyau régulier et si f est dans L^1, alors :

- ⋆ $K_a \star f$ converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ $K_a \star f$ converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ $K_a \star f$ converge au sens L^1 vers f

3.2 Convergence de Cesaro

Δ La suite $(S_N(f))_N$ converge au sens de Cesaro si la suite $(C_N(f) = \frac{1}{N+1}(\sum_{n=0}^{N} S_n(f))_N$ converge.

Δ Le noyau de Féjer d'ordre N est $F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2$.

Θ Pour tout $x_0 \in [0, 1]$, on a $C_N(f)(x_0) = \int_0^1 F_N(x - x_0) f(x) dx = F_N \star f(x_0)$.

Θ (Féjer) Si f est dans L^1, alors :
- ⋆ $C_N(f)$ converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ $C_N(f)$ converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ $C_N(f)$ converge au sens L^1 vers f

R On retrouve le théorème de Weierstrass trigonométrique.

Θ Une série de Fourier est la série de Fourier d'une fonction L^1 (resp. continue) si, et seulement si, ses sommes de Cesaro convergent dans L^1 (resp. uniformément) vers f.

3.3 Convergence d'Abel

Δ Une série de Fourier est convergente au sens d'Abel si $f_r(x) = \sum c_n(f)e^{2i\pi nx}r^{|n|}$ admet une limite lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures.

Δ Le noyau de Poisson d'ordre r est $P_r(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{2i\pi nx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos 2\pi x+r^2}$.

Θ Pour tout r, $f_r = P_r \star f$.

Θ (Abel) Si f est dans L^1, alors
- ⋆ f_r converge simplement vers f en tout point de continuité
- ⋆ f_r converge uniformément vers f si elle est continue
- ⋆ f_r converge au sens L^1 vers f

Θ Les fonctions continues de coefficients de Fourier négatifs nuls sont les fonctions analytiques sur le disque qui se prolongent au cercle.

A Problème de Dirichlet

3.4 Équation de la chaleur

Δ L'équation de la chaleur est : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, u(0,t) = u(\pi,t) = 0, u(x,0) = f(x)$.

Θ La solution à ce problème est $\forall (t,x) \in \Delta, u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L})\exp(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t)$.

Autres idées à explorer...

Se placer sur le tore !
Plus d'applications, d'exemples de développements

- **Développements.**
  - ⋆ **Formule sommatoire de Poisson, [H. Queffélec(2007), Gourdon(2008)]**
  - ⋆ **Théorème d'échantillonnage de Shannon**
  - ⋆ **Théorème de Féjer, [Candelpergher(2009)]**

Références

[Candelpergher(2009), ch. 6] pour la structure générale du plan, en se plaçant sur le tore, et une lecture du [Gesquet-Witomski(1995)] ne fait pas de mal pour le sens physique du problème et de belles applications des résultats. [S. Francinou(2004), ch. 4] et [H. Queffélec(2007), ch. 4] complètent sur quelques points et développements et donnent de nombreux exemples.

247. Exemples de problèmes d'interversion de limites.

Rapport du jury.

Φ Bien des problèmes font intervenir des paramètres pouvant varier, ou ne sont accessibles que partiellement. Dans chacun des cas, un passage à la limite intervient naturellement, que ce soit pour estimer le comportement asymptotique d'une solution ou d'un système, ou encore pour passer des informations partielles, typiquement sur des séries ou des intégrales, à des informations sur l'objet réalisé. Se pose alors le problème du comportement de ces passage à la limite lorsqu'ils interviennent avec d'autres opérations, qu'ils soient d'autres passages à la limite ou non.

H

Avis. Une leçon où il faut *illustrer* vastement ces problèmes à travers de nombreuses thématiques différentes, naturellement associées à des exemples différents et à des méthodes adaptées. C'est une leçon d'exemples et de contre-exemples, il faut donc illustret chaque résultat et en souligner les limites avec des exemples. Il y a des choses à faire en probabilités, peut-être que des applications de Fatou ou de Borel-Cantelli trouvent leur place.

⋆ ⋆ ⋆

1 Limites numériques

1.1 Limites de limites

E Les intervertions $\lim_a \lim_b = \lim_b \lim_a$ ne sont pas toujours vraies :
- ⋆ $\lim_{n\infty} \int_{]} 0,1] 1_{[0,n^{-1}]} = 1 \neq 0 = \int_{]0,1]} \lim 1_{[0,n^{-1}]}$
- ⋆ $\lim_n \lim_m \frac{n}{n+m} = 0 \neq 1 = \lim_m \lim_n \frac{n}{n+m}$

Θ Si l'espace d'arrivée est complet, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f et si chaque f_n possède une limite a_n en x_0, alors $(a_n)_n$ converge vers un certain a et f admet a pour limite en x_0.

Θ Si l'espace d'arrivée est complet, si $\sum f_n$ converge uniformément et si chaque f_n possède une limite a_n en x_0, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ admet $\sum_{n=0}^{\infty}$ pour limite en x_0.

A
- ⋆ $(1+\frac{M}{n})^n \to \exp(M)$ pour $M \in M_n(\mathbf{C})$
- ⋆ $cotan(a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2-n^2\pi^2}$ d'où $\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Θ (Stolz-Abel non tangentiel) Si une série entière converge en un point z_0 de son bord, alors la série entière converge uniformément sur le secteur angulaire $\{z_0(1-re^{i\theta}) \mid r \in [0, \rho < 2\cos\phi[, |\theta| \leqslant \phi\}$.

1.2 Séries doubles et doubles sommations

E
- ⋆ $\sum_m \sum_n \frac{m^2-n^2}{(m^2+n^2)^2} < 0 < \sum_n \sum_m \frac{m^2-n^2}{(m^2+n^2)^2}$

Θ (Fubini) Si $\sum_n \sum_m |a_{mn}| < \infty$, alors $\sum_n \sum_m a_{mn} = \sum_m \sum_n a_{mn}$.

Δ Une série $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Δ Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{a+b=n} u_a v_b$.

E cex

Θ (Cauchy-Mertens) Le produit de Cauchy d'une série convergente $\sum u_n$ et d'une série absolument convergence $\sum v_n$ est une série convergence et de somme $\sum_n u_n \sum_n v_n$.

A
- ⋆ si $|z| < 1$, alors $sum_{n\geqslant 1} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$
- ⋆ si $p \in \mathbf{N}^\star$, alors $\sum \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p-1} \frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!} B_{2p}$

Δ Une série $\sum u_n$ est commutativement convergence si, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et est de somme $sum_{n\in\mathbf{N}} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$.

E cex

Θ (Riemann) En dimension finie, une série est commutativement convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

1.3 Dérivation et limites

Θ Si I ets un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant a, $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1(I)$ telle que :
- ⋆ $(f_n')_n$ converge uniformément vers g sur tout segment de I
- ⋆ $(f_n(a))_n$ converge vers un b

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f : x \mapsto b + \int_a^x g$.

A
- ⋆ (formule sommatoire de poisson) si f est de classe C^2, alors $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)$
- ⋆ tout sous-espace de $C([a,b])$ fermé pour la norme uniforme et composé de fonctions C^1 est de dimension finie

Θ (Schwarz) Si f est définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et admet des dérivées partielles suivant x et y jusqu'à l'ordre deux, et si elles sont continues en a, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

1.4 Intégration et limites

Θ Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Θ Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors on peut intégrer terme à terme et $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.

A
- ⋆ si $\sum |c_n|$ converge, alors $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ est développable en série de Fourier et $c_n(f) = c_n$

1.5 Holomorphie

R La rigidité des fonctions holomorphes en donne un très bon comportement.

Θ Si $(f_n)_n$ est une suite de $H(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compacts, alors la limite f est dans $H(\Omega)$. De plus, toutes les dérivées succesives $(f_n^{(k)})_n$ convergent uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.

Θ Produits infinis

Θ (Cauchy) Si f est holomorphe sur D, alors pour tout $a \in D$ et tout chemin γ ne rencontrant pas a, on a la formule intégrale de Cauchy : $Ind_\gamma(a) f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$. En particulier si γ est le paramétrage $t \mapsto a + re^{it}$ du cercle $C(a,r)$, on a $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt$.

Θ Toute fonction holmorphe est analytique.

2 Intégration

2.1 Théorèmes d'opération sous le symbole d'intégrale

Θ (convergence monotone de Beppo-Levy) Si $f(_n)_n$ est une suite croissante de fonctionsmesurables positives, alors $f = \lim f_n$ est mesurable et on a $\lim \int f_n = \int f$.

E $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{ax} dx$ converge vers $(1-a)^{-1}$ si $a < 1$, ∞ sinon.

Θ Si les f_n sont mesurables et positives, alors $\sum\int f_n d\mu = \int\sum f_n d\mu$.

E $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx = \int\sum = \sum\int = \sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

A (Borel-Cantelli) Si les A_n sont mesurables, et si $\sum\mu(A_n) < \infty$, alors $\{n | x \in A_n\}$ est de cardinal fini pour presque tout x.

Θ (Fatou) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives, $0 \leqslant \int \liminf f_n d\mu \leqslant \liminf \int f_n d\mu$

A Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f et que $\sup\int|f_n| < \infty$, alors f est intégrable.

Θ (Convergence dominée) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables et intégrables telles que
- ★ f_n converge simplement vers f presque partout
- ★ il existe g intégrable telle que $|f_n| \leqslant g$ presque partout

alors f est intégrable et $\int f d\mu = \lim\int f_n d\mu$.

A
- ★ $f_n(x) = \sum(-1)^n x^n$ sur $[0,1]$ donne $\sum\frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$
- ★ $\int_0^{\pi/2}\sin^n \to 0$

A (continuité de l'intégration de f) Si f est intégrable, alors $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall A \in F, (\mu(A) \leqslant \delta \implies \int_A |f| \leqslant \varepsilon$

2.2 Régularité des intégrales à paramètres

Θ (Continuité) On suppose que $f : X \times E \to \mathbf{C}$ est telle que
- ★ Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est mesurable
- ★ Pour tout $t \in X$, $x \mapsto f(t,x)$ est continue
- ★ Pour tout compact, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\forall x \in K, |f(t,x)| \leqslant g(t)$ presque partout

Alors f est intégrable et $F : x \mapsto \int_X f(t,x)dt$ est définie et continue sur E.

Θ (Dérivabilité) On suppose que E est un intervalle réel et que $f : X \times E \to \mathbf{C}$ est telle que
- ★ Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable
- ★ Pour tout $t \in X$, $x \mapsto f(t,x)$ est dérivable presque partout
- ★ Pour tout compact, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $\forall x \in K, |\partial_2 f(t,x)| \leqslant g(t)$ presque partout

Alors $\partial_2 f$ est intégrable et $F : x \mapsto \int_X f(t,x)dt$ est dérivable sur E et $\forall x \in E, F'(x) = \int_X \partial_2 f(t,x)dx$.

A La fonction caractéristique d'une gaussienne est une gaussienne.

Θ Si on définit $\phi : t \mapsto \int_{a(t)}^{b(t)} f(c(s),s)ds$ avec a,b,c de classe C^1 (attention aux intervalles de définition de c), alors ϕ est de classe C^1 et

$$\forall t \in J, \phi'(t) = a'(t)f(c(a(t)),a(t)) - b'(t)f(c(b(t)),b(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} c'(s)\partial_1 f(c(s),s)ds$$

Δ La fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x > 0$.

Θ La fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,\infty[$, vérifie l'identité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et est logarithmiquement convexe.

Θ (formule d'Euler) on a $\Gamma(x) = \lim_{n\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

Θ La fonction Γ admet un unique prolongement holomorhpe à $\mathbf{C}\setminus -\mathbf{N}$. Celui-ci ne s'annule pas et admet chaque $-n$ comme pôle simple.

2.3 Théorème de Fubini

Θ (Fubini-Tonelli) Si $f : (X \times Y, A \otimes B) \to \overline{\mathbf{R}_+}$ est mesure et si μ et ν sont des mesures σ-finies sur X et Y, alors :
- ★ $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est A-mesurable
- ★ $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ est B-mesurable
- ★ $\int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu = \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$

Θ (Fubini-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mu\otimes\nu)$, alors :
- ★ $f(x,\cdot)$ est μ-pp dans $L^1(\nu)$
- ★ $f(\cdot,y)$ est ν-pp dans $L^1(\mu)$
- ★ $\int_Y f(\cdot,y)d\nu$ est $L^1(\mu)$
- ★ $\int_X f(x,\cdot)d\mu$ est $L^1(\nu)$
- ★ $\int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu = \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$

E
- ★ $\int_{\mathbf{R}_+^2}\frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} = \int_0^\infty\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$... et on en déduit $\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- ★ (contre-exemple) $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ n'est pas intégrable sur $[-1,1]^2$

Autres idées à explorer...

Intégrales semi-convergentes Plus de probas

- **Développements.**
  - ★ **Théorème taubérien de Hardy-Littlewood, [Gourdon(2008), ?]**
  - ★ **Inversion de Fourier ?**
  - ★ **Prolongement de la fonction ζ de Riemann, [H. Queffélec(2007), Chambert-Loir-Fermigier(1996a), Chambert-Loir-Fermigier(1996b)]**

Références

La leçon est efficacement traitée et assez bien organisée dans [Nourdin(2001)], avec les nombreux cas limites d'hypothèses et contre-exemples dans le [**?**]. Sinon, de bons livres de taupe pour l'essentiel, ainsi [Pommellet(1994)] a un chapitre traîtant des intervertions de limites dans les cas taupinaux de sommes et d'intégrales. Pour l'intégration, [M. Briane(2009)].

Rapport du jury.

Φ Les variables aléatoires de Bernoulli sont les variables aléatoires les plus simples à considérer. Et pour tout, « Le jeu de pile ou face, dont le principe est si simple, possède un très grand caractère de généralité et conduit, lorsqu'on l'étudie en détail, aux mathématiques les plus élevées. »(Émile Borel, 1924).

H Les probabilités apparaissent avec le souhait de mathématiser les jeux de hasard, notamment au cours de la correspondance entre Fermat et Pascal qui a été motivée par le problème du chevalier de Méré. Mais il faut attendre le XVIIIe siècle, et notamment les travaux de Moivre dont le théorème de la limite centrale, pour qu'émergent les premières évolutions théoriques qui dépassent le dénombrement. Les lois continues sont notamment étudiées par Laplace au XIXe et la théorie des probabilités prend de plus en plus de place dans les enseignements, soutenues par Condorcet, notamment dès l'inauguration de l'École polytechnique. Il faudra alors attendre le début du XXe siècle pour voir apparaître les notions de processus stochastiques et les marches aléatoires, et surtout l'axiomatisation et l'unification de la théorie par Kolmogorov, fondée sur la théorie de la mesure.

Avis.

⋆ ⋆ ⋆

(Ω, T, P) désigne un espace probabilisé.

1 Variables de Bernoulli indépendantes

1.1 Loi de Bernoulli et jeu du pile ou face

Δ Une variable aléatoire X suite une loi de Bernoulli de paramètre p si elle est à valeurs dans $\{0,1\}$ et $P(X=1)=p$, $P(X=0)=q=1-p$. Il s'agit de la variable aléatoire associée à un jeu de pile ou face avec une probabilité p de tomber sur pile.

Θ Si X est une variable de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X)=p$ et $Var(X)=p(1-p)$. Sa fonction caractéristique est $\phi_X(t)=(1-p)+pe^{it}$.

1.2 Indépendance de variables aléatoires

Δ Des événements A_i sont indépendants dans leur ensemble si pour toute sous-famille finie $J \subseteq I$, on a $P(\bigcap_J A_j) = \prod_J P(A_j)$.

R (paradoxe de Galton)

Δ Des variables aléatoires X_i sont indépendantes dans leur ensemble si les événements $X \in A$ et $Y \in B$ sont indépendants pour toutes parties mesurables A et B.

Θ Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

- ⋆ Si X_1 et X_2 admettent une moyenne, alors X_1X_2 également et $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$
- ⋆ Si X_1 et X_2 admettent des moments d'ordre 2, alors $cov(X_1,X_2)=0$ et $var(X_1+X_2)=var(X_1)+var(X_2)$

R Il n'y a pas de réciproques à ces propriétés.

1.3 Lois de variables de Bernoulli

Θ Pour tout $p \in]0,1[$, il existe une variable aléatoire de loi $B(p)$. cf. construction avc les dyadiques de Billingsley.

Θ Si X_n est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et à valeurs dans $\{-1,1\}$, alors la série entière $\sum X_n z^n$ a presque sûrement un rayon de convergence 1 et n'est prolongeable analytiquement nulle part ailleurs.

Θ On peut construire une suite de variables aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$.

Θ (loi binomiale) Si on note $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, alors $P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Son espérance est np et sa variance $(ps+1-p)^n$.

Θ (temps de premier succès) Si on note $T_1=\inf\{i \geqslant 1 \mid X_i=1\}$, alors $P(T_1>i)=q^i$ et $P(T_1=i)=q^{n-1}p$. Son espérance est $\frac{1}{p}$ et sa variance $\frac{q}{p^2}$.

Θ (loi binomiale négative) Si on note $T_k=\inf\{i \geqslant 1 \mid S_i=k\}$, alors $P(T_k=n)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout $k \leqslant n$. Son espérance est $\frac{k}{p}$ et sa variance $\frac{kq}{p^2}$.

1.4 Statistiques

2 Théorèmes limites

Θ (Markov) Si X est une variables aléatoire positive admettant une moyenne non nulle m, alors $\forall \lambda > 0, P(X \geqslant \lambda m) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Θ (Bernoulli) Si X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, et si $(X_n)_n$ est un échantillon de X, alors avec $S_n = \sum_{i=1}^{n}$, $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers l'espérance p.

Θ (loi faible des grands nombres)

A (polynômes de Bernstein)

Θ (loi forte des grands nombres)

Θ (grandes déviations)

Θ (Moivre)

Θ (central limite)

Θ (Hardy-Littlewood)

Θ (Berry-Essen)

Θ (logarithme itéré)

3 Marches aléatoires de Bernoulli

3.1 Marches aléatoires

Δ La marche aléatoire de Bernoulli est la marche aléatoire à valeurs entières $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où Y_i est une suite de variables iid de loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$.

Δ Un point d'une marche aléatoire est dit :

- ⋆ récurrent s'il est visité une infinité de fois presque sûrement
- ⋆ transitoire s'il est visité presque sûrement un nombre fini de fois

Θ Sur une marche aléatoire, ou bien tous les points sont récurrents, ou bien tous les points sont transitoires.

3.2 Principe de réflexion

Θ SI $N(a,b)$ (resp. $N'(a,b)$ est le nombre de chemins menant de $(0,0)$ à (a,b) (resp. en passant par l'axe des abscisses), alors $N'(a,b) = \binom{n}{\frac{n+b-a}{2}}$ et $N(a,b) = N(-a,b)$.

Θ La probabilité que S touche le point G pour la première fois est $\frac{|G|}{n} P(S_n = G =$.

Autres idées à explorer...

- **Développements.**
  - ⋆
  - ⋆
  - ⋆

Références

[Lesigne(2001)] pour l'essentiel et entièrement dans l'esprit de la leçon, le [**?**] construit une loi uniforme à partir de lois équilibrées indépendantes. On peut compléter avec plus d'exemples et de remarques heuristiques avec [**?**] et les usuels [Ouvrard(2007)] et [**?**]. Des applications en analyse de [H. Queffélec(2007)] sont les bienvenues. Pour des exemples précis et historiques, le [Bacaër(2008)] contient des choses intéressantes.

Rapport du jury.

Φ

H Les probabilités apparaissent avec le souhait de mathématiser les jeux de hasard, notamment au cours de la correspondance entre Fermat et Pascal qui a été motivée par le problème du chevalier de Méré. Mais il faut attendre le XVIIIe siècle, et notamment les travaux de Moivre dont le théorème de la limite centrale, pour qu'émergent les premières évolutions théoriques qui dépassent le dénombrement. Les lois continues sont notamment étudiées par Laplace au XIXe et la théorie des probabilités prend de plus en plus de place dans les enseignements, soutenues par Condorcet, notamment dès l'inauguration de l'École polytechnique. Il faudra alors attendre le début du XXe siècle pour voir apparaître les notions de processus stochastiques et les marches aléatoires, et surtout l'axiomatisation et l'unification de la théorie par Kolmogorov, fondée sur la théorie de la mesure.

Avis. Cette leçon ne doit pas être un cours désincarné de convergence de mesures ni un catalogue de théorèmes de convergences sous différentes hypothèses ! Il faut motiver le tout par des espoirs expérimentaux en probabilités, et confirmer ces espoirs en interprétant et en appliquant ces théorèmes aux statistiques, puis en mentionnant les utilisations dans les sondages et les assurances. Les applications doivent également sortir du domaine des seules probabilités et statistiques, et il y a de nombreux ponts avec l'analyse qui méritent d'être considérés.

⋆ ⋆ ⋆

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbf{R}^d$.

1 Convergence en probabilité et loi faible

1.1 Convergence en probabilité

Δ Une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$. Cette convergence ne dépend pas de la norme en dimension finie, en particulier la convergence équivaut à la convergence des marginales.

Θ La limite en probabilité d'une suite de variables aléatoires est presque sûrement unique.

Θ Si f est continue sur $\mathbf{R}^d$ et si $(X_n)_n$ converge en probabilités vers X, alors $(f(X_n))_n$ converge en probabilité vers X.

1.2 Loi faible des grands nombres

Θ (Loi faible des grands nombres) Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires deux à deux on corrélées et admettant des moments d'ordre 2, si $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_j \to m$ et $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \to 0$, alors la suite des moyennes empiriques $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i$ converge n probabilités vers m.

Θ (Bernoulli) Si $(A_n)_n$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité p, la suite des variables aléatoires $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ converge en probabilités vers p.

Θ (Khintchine) Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes de même loi μ et admettant une moyenne m, alors la suite des moyennes empiriques $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge n probabilité vers m.

2 Convergence presque sûre et loi forte

2.1 Convergence presque sûre

Δ Une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X s'il y a convergence simple presque sûrement, *i.e.* s'il existe un enemble E de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in E$, on ait $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Cette convergence ne dépend pas de la norme en dimension finie, en particulier la convergence équivaut à la convergence des marginales.

Θ La limite presque sûre d'une suite de variables aléatoires est presque sûrement unique.

Θ Si $\sum P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n$ converge et $\sum \varepsilon_n$ converge, alors $(X_n)_n$ converge presque sûrement.

Θ S'il existe X telle que $\sum P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n$ converge pour tout $\varepsilon > 0$, alors $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X.

2.2 Rapports entre convergences

Θ On a les liens suivants entre convergence presque sûre et convergence en probabilité :

- ⋆ Si $(X_n)_n$ converge presque sûrement, alors elle converge en probabilités et les limites sont presque sûrement égales
- ⋆ La convergence en probabilités vérifie le critère de Cauchy : pour que $(X_n)_n$ converge en probabilités, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X_m| > \varepsilon)$ converge vers 0.
- ⋆ Si $(X_n)_n$ converge en probabilités, on peut en extraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers la même limite

2.3 Convergence L^2

2.4 Séries de variables indépendantes

Θ (Kolmogorov) Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires centrées indépendantes et admettant un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $P(\max_k |\sum_{i=1}^k| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2$.

A Si $(X_i)_i$ est une suite de variables aléatoires centrées indépendantes et admettant un moment d'ordre 2,et si $\sum \sigma_{X_i}^2$ converge, alors $\sum X_n$ converge presque sûrement et dans L^2.

2.5 Loi forte des grands nombres

Θ Si $(X_n)_n$ est une suite de variables indépendantes et admettant un moment d'ordre 2, si $EX_n \to m$ et $\sum \frac{\sigma_{X_i}^2}{i^2}$ converge, alors la suite des moyennes empiriques $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i$ converge vers m presque sûrement et dans L^2.

Θ (Kolmogorov-Khintchine)

Θ (Glivenko-Cantelli)

A (Kolmogorov-Smirnov)

3 Convergence en loi et théorème de la limite centrale

Autres idées à explorer...

- **Développements.**

⋆

⋆

⋆

Références

[Ouvrard(2009), ch. 10 et 14] pour le plan comme pour les exemples développés en exercices. Des complémets et des heuristiques sont dans [**?**] et [**?**]. Des exercices, développements et applications en analyse dans [H. Queffélec(2007)] et [**?**]. Trouver une référence pour les statistiques ! Pour des exemples précis et historiques, le [Bacaër(2008)] contient des choses intéressantes.

Rapport du jury.

Φ L'indépendance est ce qui fait la différence entre la théorie des prababilités et la théorie de la mesure.

H Les probabilités apparaissent avec le souhait de mathématiser les jeux de hasard, notamment au cours de la correspondance entre Fermat et Pascal qui a été motivée par le problème du chevalier de Méré. Mais il faut attendre le XVIIIe siècle, et notamment les travaux de Moivre dont le théorème de la limite centrale, pour qu'émergent les premières évolutions théoriques qui dépassent le dénombrement. Les lois continues sont notamment étudiées par Laplace au XIXe et la théorie des probabilités prend de plus en plus de place dans les enseignements, soutenues par Condorcet, notamment dès l'inauguration de l'École polytechnique. Il faudra alors attendre le début du XXe siècle pour voir apparaître les notions de processus stochastiques et les marches aléatoires, et surtout l'axiomatisation et l'unification de la théorie par Kolmogorov en 1933, fondée sur la théorie de la mesure.

Avis. Il ne faut pas trop s'éloigner et donner de nombreux exemples. Toutefois il faut bien garder à l'esprit, et le souligner un minimum dans le plan, que l'indépendance n'est pas une situation générale, et que des variables dépendantes ne sont pas que des situations tératologiques. Des contre-exemples naturels doivent venir montrer les limites des théorèmes lorsque l'on sort de l'hypothèse d'indépendance, et comment en pratique on se sort de ces situations en forçant l'indépendance...

⋆ ⋆ ⋆

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. $a, B, \ldots$ désignent des événements, $X, Y, \ldots$ des variables aléatoires.

1 Indépendance

1.1 Notion d'indépendance

Δ Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Deux tribus T et T' sont indépendantes si, pour tous événements $A \in T$ et $B \in T'$, A et B sont indépendants.

E
- ⋆ Si on jette deux dés, les événements « le premier est pair » et « le second vaut 1 » sont indépendants
- ⋆ Si A et B sont indépendants, alors $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont indépendants

Δ Une famille $(A_i)_i$ d'événements est indépendante si, pour toute sous-famille $J \subseteq I$ finie, on a $P(\bigcap_J A_j) = \prod_J P(A_j)$.

E
- ⋆ Si $\Omega = [0,1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, alors la famille des $A_n) \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}}]\frac{2(k-1)}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}]$ est indépendante
- ⋆ Si on lande deux dés, les événements A = « le premier est impair », B = « le second est impair », C = « la somme des deux est impaire » sont indépendants deux à deux, mais ne sont pas indépendants

Θ Si deux π-systèmes C_1 et C_2 sont indépendantes, alors $\sigma(C_1)$ et $\sigma(C_2)$ sont indépendantes.

Δ Une famille de variables aléatoires $(X_i)_i$ est indépendante si la famille des tribus engendrées $(\sigma(X_i))_i$ est indépendante. Autrement dit, pour tout partie $J \subseteq I$ finie, $P(\bigcap_J (X_j \in B_j)) = \prod_J P(X_j \in B_j)$.

E
- ⋆
- ⋆

1.2 Indépendance et lois

Θ Si $(X_1, \ldots, X_d)$ est une famille de variables aléatoires réelles, alors elles sont indépendantes si, et seulement si, $P^{(X_1,\ldots,X^d)} = \bigotimes_i P^{X_i}$.

E
- ⋆
- ⋆

Θ Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires indépendante est indépendante.

Θ Si $(X_1, \ldots, X_d)$ est une famille de variables aléatoires réelles, alors elles sont indépendantes si, et seulement si, $\phi^{(X_1,\ldots,X_d)} = \bigotimes_i \phi^{X_i}$.

Θ Une famille $(X_i)_i$ de variables aléatoires est indépendante si, et seulement si, pour toute famille finie de fonctions boréliennes $(\phi_j)_j$ telles que $\phi_j(X_j)$ soit intégrable pour tout j, on ait $E(\prod_J \phi_j(X_j)) = \prod_J E(\phi_j(X_j))$.

1.3 Corrélation et vecteurs gaussiens

Δ Deux variables aléatoires $X, Y \in L^2$ sont non corrélées si $E(XY) = E(X)E(Y)$. Cela revient à dire que $cov(X,Y) := E((X - EX)(Y - EY) = 0$.

Θ Des variables indépendantes sont non corrélées.

Θ Si $(X_i)_i$ est une famille de variables aléatoires deux à deux non corrélées, alors $var(\sum_i X_i) = \sum var(X_i)$. On a alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev $P(|\sum X_i - EX_i| \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t^2} \sum var(X_i)$.

A Approximatioon de vecteurs...

A Nombre de diviseurs premiers...

2 Sommes finies de variables aléatoires indépendantes

2.1 Sommes et propriétés

3 Propriétés asymptotiques et indépendance

3.1 Propriétés de Borel-Cantelli

problème ICI dans l'autre version
Full applications et exemples

3.2 Applications

On se pose le problème de savoir s'il existe un espace probabilisé (Ω, A, P) tel que l'on puisse construire une suite de variables aléatoires X_i indépendantes et de lois fixées à l'avance. Dans le cas fini, on prend $\Omega = \mathbf{R}^n$, $A = B(\Omega)$, $P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ et X_i la i-ième projection coordonnée.

Θ (Kolmogorov) Si $\Omega = \prod_i E_i$, $A = \prod_i B_i = \sigma((X_i)_i)$ et X_i la i-ième projection coordonnée, si on pose $Q(C_n \times \prod_{j>i} A_i) = P_1 \otimes \cdots \otimes P_n(C_n)$, alors Q se prolonge de manière unique en une probabilité sur (Ω, A), et telle que les X_i sont indépendantes et de lois $P^{X_i} = P_i$.

3.3 Lois des grands nombres

Θ Lois faibles

Θ Lois fortes

Applications

3.4 Théorèmes de la limite centrale

Θ (TCL)

Θ (Moivre-Laplace)

A (Stirling)

Autres idées à explorer...

- **Développements.**

⋆

⋆

⋆

Références

Le chapitre [?, ch. 4] est également une bonne base, qui peut être complété par [Ouvrard(2007)] et [Ouvrard(2009)]. Plus d'heuristiques et d'exemples intuitifs sont comme d'habitude dans [?] et [?]. Le [H. Queffélec(2007)] est toujours une bonne source de compléments et de développements. Pour des exemples précis et historiques, le [Bacaër(2008)] contient des choses intéressantes.

Rapport du jury.

Φ

H Les probabilités apparaissent avec le souhait de mathématiser les jeux de hasard, notamment au cours de la correspondance entre Fermat et Pascal qui a été motivée par le problème du chevalier de Méré. Mais il faut attendre le XVIIIe siècle, et notamment les travaux de Moivre dont le théorème de la limite centrale, pour qu'émergent les premières évolutions théoriques qui dépassent le dénombrement. Les lois continues sont notamment étudiées par Laplace au XIXe et la théorie des probabilités prend de plus en plus de place dans les enseignements, soutenues par Condorcet, notamment dès l'inauguration de l'École polytechnique. Il faudra alors attendre le début du XXe siècle pour voir apparaître les notions de processus stochastiques et les marches aléatoires, et surtout l'axiomatisation et l'unification de la théorie par Kolmogorov, fondée sur la théorie de la mesure.

Avis. C'est une leçon d'illustrations de ce que l'on peut faire avec ces deux lois bien particulières, l'une étant le pendant continu de l'autre. Il faut, dans l'esprit du [Lesigne(2001)], montrer que les idées les plus centrales des probabilités peuvent se voir dans ce cas particulier de lois : indépendance, convergences, théorèmes limite, déviations, etc.

⋆ ⋆ ⋆

Autres idées à explorer...

- **Développements.**

  ⋆

  ⋆

  ⋆

Références

Le [Lesigne(2001)] illustre bien tout ce que l'on peut faire avec les loi binomiales, pour la loi de poisson on peut regarder le [Ouvrard(2007)]. Le [**?**] ou [**?**] complètent bien. Check Toulouse. Pour des exemples précis et historiques, le [Bacaër(2008)] contient des choses intéressantes.

Rapport du jury.

Φ La convexité est une forte propriété de l'espace qui en fait un cadre très adéquat pour les problèmes d'optimisation tout en étant bien plus généraux que le cadre vectoriel, propriété qui peut d'ailleurs se traduire en une condition de régularité de fonctions. La définition de la conexité est typiquement une propriété de dimension finie, de fait les raisonnements géométriques conviennent particulièrement bien, et les espaces de Hilbert offrent un cadre fertile pour leur étude.

H

Avis. Il s'agit, comme la leçon de compacité, d'une leçon d'illustration d'un cadre théorique. Il faut donc ne pas s'attarder sur les propriétés élémentaires des fonctions et exembles convexes pour eux-mêmes – il y a des leçons faites pour cela – et s'envoler vers des horizons plus autonomes et satisfaisants quand à leurs résultats et leur variété : programmation convexe, dualité, théorèmes de points fixes, etc.

⋆ ⋆ ⋆

1 Introduction

1.1 Rappels de convexité

Δ Un espace X est convexe si $\forall x, y \in X, [x, y] \subseteq X$, *i.e.* $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1-\lambda)y \in X$.

E
- ⋆ Les espaces affines sont convexes
- ⋆ Les intervalles de $\mathbf{R}$ sont les intervalles
- ⋆ Les boules d'un espace normé sont convexes
- ⋆

Θ Une intersection de convexes est convexe.

Θ (Helly) Si X est un espace affine de dimension d et $\mathcal{F}$ une famille de convexes de X tels que
- ⋆ (i) l'intersection de $d+1$ d'entre eux est non vide
- ⋆ (ii) $\mathcal{F}$ est fini ou constitué de compacts

alors l'intersection de $\mathcal{F}$ est non vide.

Θ Application plus analytique ?

Δ Une fonction est convexe si son épigraphe est convexe.

Θ Une fonction est convexe si, et seulement si, elle vérifie $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

1.2 Inégalités

Θ (arithmético-géométrique)

Θ (inégalités de Höler) On a $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

A (Minkowski) Les $\|\cdot\|_p$ sont des normes.

Θ (Jensen)

2 Convexité et topologie [Brezis(2005)]

On s'intéresse à la rigidité topologique des convexes.

2.1 Projection sur un convexe fermé

L'âme de l'analyse est l'approximation, et les projections correspondent aux meilleures approximations, encore faut-il pouvoir les définir.

Θ Si C est une partie convexe, fermée et non vide d'un espace de Hilbert H, alors pour tout $x \in H$ il existe un unique élément de C réalisant la distance de x à C, on le note $p_C(x)$ et il est caractérisé par $Re((x - p_C(x), y - p_C(x))) \leqslant 0$ pour tout $y \in C$.

A On peut toujours projeter sur un convexe fermé.

Θ Le projecteur p_C est alors 1-lipschitzien.

Θ (Riesz-Fréchet) Si $\phi \in H'$, alors il existe un unique $f \in H'$ tel que $\langle \phi, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in H$. De plus, $\|\phi\|_{H'} = \|f\|$.

Θ (Stampacchia) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive et si K est un convexe fermé non vide, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \langle \phi, v-u\rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u\rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v\rangle$.

A (Lax-Milgram) Si a est une forme bilinéaire continue et coercive, alors $\forall \phi \in H', \exists! u \in H, \forall v \in H, a(u, v) = \langle \phi, v\rangle$. Si, de plus, a est symétrique, alors u est caractérisé par $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u\rangle = \min_K \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v\rangle$.

Θ Fenchel et cie

Θ sci III 20

Θ (Motzkin) Cela caractérise les convexes.

Espérance conditionnelle vue comme projection

2.2 Séparations de convexes

Δ Jauge d'un convexe

Θ C'est une semi-norme

Δ Un hyperplan $[f = a]$ sépare A et B au sens large si $f(A) \leqslant a \leqslant f(B)$, et au sens strict s'il existe $f(A) + \varepsilon \leqslant a \leqslant f(B) - \varepsilon$.

Θ (Hahn-Banach) Si A et B sont des convexes non vides, alors il existe un hyerplan séparant A et B. Si A est compact convexe non vide et B est fermé convexe non vide, alors il existe un hyperplan séparant strictelemnt A et B.

Δ Un point a est un point extrémal du convexe X si dès qu'il s'écrit $a = \frac{1}{2}(b+c)$ avec $b, c \in X$, alors $b = c = a$.

E
- ⋆ les points extrémaux des boules euclidiennes sont le bord
- ⋆

Θ (Krein-Milman) Si K est un convexe compact de $\mathbf{R}^d$, alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Θ (Birkhoff) Les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

Θ Les points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbf{R})$ sont $O_n(\mathbf{R})$.

Θ (Schur-Horn) L'ensemble des diagonales des matrices symétriques réelles de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est l'enveloppe convexe des permutations de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

3 Points fixes

Θ (Brouwer) Toute application continue $f : \overline{B} \to \overline{B}$ admet un point fixe.

Θ (Schauder) Si C est un convexe fermé non vide d'un espace topologique séparé, si $f : C \to C$ est d'image relativement compacte, alors f admet un point fixe.

A (Perron-Frobenius ?) Tout matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ à coefficients positifs admet un vecteur propre à coefficients positifs associé à une valeur propre positive.

A Équilibres de Nash

Θ (Browder) Si H est un Hilbert et K un convexe fermé borné non vide de H, alors toute application 1-lipschitzienne de K dans K admet un point fixe.

Θ (Kakutani-Markov) Si X est un espace topologique localement convexe, K un compact convexe de X, G un groupe équicontinu d'endomorphismes de X, et si $G(K) \subseteq K$, alors G admet un point fixe dans K, *i.e.* il existe un point fixe commun à tous les éléments de G.

A Tout groupe compact admet une mesure de Haar.

4 Analyse convexe [Testard(2012)]

4.1 Régularité des fonctions convexes

4.2 Points critiques et extremums

Contrairement au calcul différentiel classique, on a ici une condition suffisante globale d'ordre 1.

Θ Une fonction convexe admet un maximum si, et seulement si, elle est constante. Si elle est dérivable, elle admet un minimum global si, et seulement si, son gradient s'annule.

Θ (Choquet) Si $f \in L(E)$ et A est une partie de E, alors :

- ⋆ si f atteint un extremum en un unique point de A, alors c'est un point extrémal de A
- ⋆ si f atteint un extremum sur A et si X désigne l'ensemble des antécédents de cet extremum dans A, alors tout point extrémal de X est extrémal de A

A Parmi tous les plans de transfert entre deux distributions discètres, il existe un transport optimal.

4.3 Optimisation effective

Δ Une fonction f est globalement elliptique s'il existe $d > 0$ tel que la plus petite valeur propre de Hf est supérieure à d.

Θ Toute fonction elliptique admet un unique minimum global.

Θ (gradient à pas optimal)

Θ (gradient à pas conjugué)

Θ (méthode de Newton) La suite récurrente définie par $x_{n+1} = x_n - (Hf(x_n))^{-1}\nabla f(x_n)$ converge vers le minimum de f si f est elliptique et x_0 est assez proche du minimum. C'est une méthode d'ordre 2.

H est un espace de Hilbert.

Θ (Farkas-Minkowski) $\{w \in H \mid \forall i \in I, \langle w, a_i\rangle \geqslant 0\} \subseteq \{w \in H \mid \langle w, b\rangle\}$ si, et seulement si, il existe une famille $(\lambda_i)_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, telle que $b = \sum_I \lambda_i a_i$.

Δ Cône tangent

Θ (condition nécessaire d'extremum)

Δ Contrainte qualifiée

Θ (relations de Kuhn-Tucker : conditions nécesaires d'extremum) Soient ϕ_i sont des fonctions définies sur un ouvert Ω de H, soit J une fonction dérivable en u, soit $U = \{v \in \Omega \mid \forall i, \phi_i(u) = 0\}$, et soit $I(u) = \{i \mid \phi_i(u) = 0\}$. Si les ϕ_i sont dérivables si $i \in U$, continues sinon, si J admet en u un minimum relatif en u et si les contraintes sont qualifiées en u, alors il existe des $\lambda_i(u) \geqslant 0, i \in I(u)$, tels que $J' - u) + \sum_{i\in I(u)} \lambda_i(u)\phi_i'(u) = 0$.

Θ (relations de Kuhn-Tucker : conditions nécessaires et suffisantes d'extremum dans le cas convexe) Soient ϕ_i sont des fonctions convexes sur un ouvert Ω de H et dérivables en u, soit J une fonction convexe soit $U = \{v \in \Omega \mid \forall i, \phi_i(u) = 0\}$, et soit $I(u) = \{i \mid \phi_i(u) = 0\}$. Alors s'il existe des $\lambda_i(u) \geqslant 0, i \in I(u)$, tels que $J' - u) + \sum_{i\in I(u)} \lambda_i(u)\phi_i'(u) = 0$, alors J admet en u un minimum par rapport à U.

Autres idées à explorer...

Θ (Kolmogorov) Un espace vectoriel topologique est normable si, et seulement si, 0 admet un voisinage convexe borné.

Δ L'enveloppe convexe d'une partie X est l'ensemble des combinaisons linéaires des points de X.

Θ (Gauss-Lucas) Si $P \in \mathbf{C}[X]$ est non constant, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Probas

Théorèmes de points fixe !
Programmation convexe : Farkas-Minkowski, cônes tangents, conditions de Kuhn-Tucker, cf. [Ciarlet(), ch. 9]

- **Développements.**

⋆

⋆

⋆

Références

[Rockafellar(1970)] ou [Barvinok(2002)] sont tout indiqués ! Pour la partie différentielle, on peut penser à [Testard(2012), ch. 8]. Pour la programmation convexe, [Ciarlet(), ch. 9].

Rapport du jury.

Φ Physiquement, on ne peut ignorer l'étendue spatiale des appareils de mesure. De plus, la donnée ponctuelle d'une fonction fait jouer un rôle trop important aux discontinuités, d'où l'idée de calculer des moyennes pondérées qui donnent la même quantité d'informations presque partout. On obtient ainsi une généralisation de la notion de fonction, même de mesure, aux propriétés beaucoup plus souples et manipulables. On veut ici prolonger la transformation de Fourier de L^1 et L^2 aux distributions, mais dans le cas général c'est impossible car l'espace C_c^∞ n'est pas stable.

H Les ingénieurs et physiciens utilisent les distributions sans aucune justification depuis le calcul symbolique d'Heavyside (1894). L'idée de fonction généralisée est déjà utilisée dans les années 30 avec la fonction de Dirac. Mais les tentatives de justification sont trop apauvrissantes (pas de dérivation ou de Fourier) ou déraisonnables (Bochner donne les propriétés comme axiomes). Les fonctions généralisées sont introduites mathématiquement par Sobolev en 1936 comme dual de $\mathcal{D}_K^{(m)}$, les opérations sont définies, puis des solutions généralisées aux équations de la physique sont considérées. Mais Sobolev disparait de la scène mathématique pendant une vingtaine d'années, et c'est Schwartz qui fonde entièrement la théorie en 1950, rapprochant les travaux de Sobolev sur les fonctionnelles et ceux de Dieudonné sur la topologie des espaces fonctionnels et en en faisant une synthèse et une simplification.

Avis. Attention aux considérations topologiques fines et à ne pas sombrer dans un cours général sur les distributions.

⋆ ⋆ ⋆

1 Espaces de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$

R Les opérations sur les distributions sont définies comme la transposée de l'opération sur les fonctions-test. Or $D(\mathbf{R}^n)$ n'est pas stable par transformation de Fourier : il faut augmenter la taille de l'espace des fonctions-tests pour garantir cette stabilité, c'est la raison d'être de la classe de Schwartz.

1.1 Classe de Schwartz

Δ On définit l'espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \mid \forall a, b \in \mathbf{N}^d, \exists C > 0, \forall x \in \mathbf{R}^d, |x^a \partial^b f(x)| \leqslant C\}$. On dit que ces fonctions sont à décroissance rapide.

Θ $S(\mathbf{R}^d)$ est la cloture par transformation de Fourier de $D(\mathbf{R}^d)$.

Θ Les $N_{a,b} : f \mapsto \sup_x \|x^a \partial^b f(x)\|$ sont des semi-normes sur $S(\mathbf{R}^d)$, qui en font un espace de Fréchet, *i.e.* définissent une topologie métrisable pour laquelle $S(\mathbf{R}^d)$ est complet.

Θ L'espace $S(\mathbf{R}^d)$ est de Montel, *i.e.* ses compacts sont ses fermés bornés. En particulier il n'est pas normable par le théorème de Riesz.

E Les exponentielles décroissantes $x \mapsto \exp(-z|x|^2)$ où $Re(z) > 0$ sont dans $S(\mathbf{R}^d)$.

Θ $S(\mathbf{R}^d) \subseteq L^p(\mathbf{R}^d)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Θ $D(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $S(\mathbf{R}^d)$.

1.2 Opérations dans $S(\mathbf{R}^d)$

Θ $S(\mathbf{R}^d)$ est stable par produit et par dérivation, et ces opérations y sont continues.

Δ Une fonction $f \in D(\mathbf{R}^d)$ est à croissance lente si $\forall a \in \mathbf{N}, \exists k \in \mathbf{N}^d, \exists C > 0, \partial^a f(x)| \leqslant C(1 + |x|)^k$.

Θ $S(\mathbf{R}^d)$ est stable par produit par des fonctions à croissance lente et par convolution, et ces opérations y sont continues.

1.3 Transformation de Fourier dans $S(\mathbf{R}^d)$

R La transformation de Fourier est importante en ce qu'elle transforme des problèmes différentiels en des problèmes algébriques, souvent plus simples à résoudre, et sans perdre d'information du fait qu'elle est injective. Il est naturel de vouloir la généraliser aux distributions.

Δ On définit, pour $f \in S(\mathbf{R})$, la transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto u(\hat{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle}$ qui est dans $S(\mathbf{R}^d)$.

Θ (inversion de Fourier) L'application $f \in S(\mathbf{R}^d) \mapsto \hat{f} \in S(\mathbf{R})$ est un automorphisme continu de $S(\mathbf{R}^d)$, vérifiant la formule d'inversion $\hat{\hat{f}}(\xi) = (2\pi)^d f(-\xi)$.

E ⋆

⋆

Θ La transformation de Fourier dans S vérifie les propriétés, pour $u, v \in S$,

- ⋆ $\int \hat{u}v = \int u\hat{v}$
- ⋆ $u \star v \in S$ et $F(u \star v) = \hat{u}\hat{v}$
- ⋆ $F(uv) = (2\pi)^{-n}\hat{u} \star \hat{v}$
- ⋆ $F(D^j u) = \xi_j \hat{u}$
- ⋆ $F(x_j u) = -D_j \hat{u}$

2 Distributions tempérées et espace $S'(\mathbf{R}^d)$

2.1 Distributions tempérées

Δ L'espace des distributions tempérées est $S'(\mathbf{R}^n)_D$, *i.e.* l'ensemble des formes linéaires continues sur S restreintes à D.

Θ $u \in D($
$R^n)$ est une distribution tempérée si, et seulement si, $\exists C > 0, \exists k, l \in \mathbf{N}, \forall \phi \in D(\Omega), |u(\phi)| \leqslant C||\phi||_{k,l}$. En particulier u est d'ordre au plus l.

Δ Une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ est à croissance lente si $\forall a \in \mathbf{N}^n, \exists C > 0, \exists k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}^n, |D^a f(x)| \leqslant C(1 + |x|^2)^k$. Leur ensemble est un espace vectoriel, noté O_M.

Δ Une fonction f est tempérée si $\exists C > 0, \exists k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}^n, |f(x)| \leqslant C(1+|x|^2)^k$.

Θ Si $u \in S'$, alors il existe une fonction tempérée continue et $a \in \mathbf{N}^n$ tels que $u = D^a f$.

2.2 Transformation de Fourier dans $S'(\mathbf{R}^d)$

Δ On définit la transformation de Fourier dans S' par $\langle Fu, \phi \rangle = \langle u, F\phi \rangle$, et alors $Fu \in S'$.

Θ La transformation de Fourier est un automorphisme bicontinu de S' dans S', et on a la formule d'inversion de Fourier : $F^{-1} = \overline{F}$.

Θ (Paley-Wiener-Schwartz)

3 Application aux équations aux dérivées partielles

3.1 Espaces de Sobolev

R C'est une trame de bons espaces – de Hilbert – entre les distributions à support compact et C^∞, permettant de mesurer finement la régularité des distributions et de remonter des solutions faibles aux solutions classiques.

On fixe $s \in \mathbf{N}$.

Δ On définit l'espace de Sobolev $H^s(\Omega) = H^s = \{u \in L^2(\Omega) \mid \forall |a| \leqslant s, D^a u \in L^2(\Omega)\}$. On le munit de la norme $||u||_s = \left(\sum_{|a|\leqslant s} ||D^a u||_2^2\right)^{1/2}$, associée au produit scalaire $(u|v)_s = \sum_{|a|\leqslant s}(D^a u|D^a v)_2$.

Θ L'espace H^s est un espace de Hilbert.

Θ Les espaces de Sobolev vérifient les propriétés suivantes :

- ⋆ si $s \leqslant t$, alors $H^t \subseteq H^s$
- ⋆ si $|a| \leqslant s$, alors $D^a : H^s \to H^{s-|a|}$ est continu de norme inférieure à 1
- ⋆ si $\Omega' \subseteq \Omega$, alors la restriction à Ω' est continue de norme inférieure à 1

3.2 Équation de Schrödinger

Autres idées à explorer...

- **Développements.**

⋆

⋆

⋆

Références

[**?**, ch. 10] fait l'essentiel du plan. Les [SChwartz(1966), ch. 7] et [Wagschal(2011), ch. I.C.] sont très bien pour compléter et contiennent de nombreuses idées et remarques.

Rapport du jury. Les leçons 254 et 255 qui portent sur la théorie des distributions et son utilisation ont été choisies par quelques candidats, qui étaient souvent bien préparés et dont la présentation s'est avérée satisfaisante. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard sur le sujet peut contenir. Ainsi, il peut être utile d'avoir compris pourquoi la métrique de l'espace de Schwartz est définie par une suite de semi-normes et ne peut pas l'être par une norme unique, mais aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Les candidats sont invités à présenter des situations simples où les distributions sont effectivement utilisées, et à avoir les idées claires sur ce qu'est le support d'une distribution ou son ordre. Les thèmes de développement possibles incluent les formules de saut, les solutions élémentaires (pour le Laplacien par exemple), les conditions sous lesquelles le produit de convolution de deux distributions peut être défini, ou son associativité dans certains cas. La dérivation au sens des distributions des fonctions d'une seule variable réelle fournit déjà une problématique intéressante. Des applications simples aux équations aux dérivées partielles linéaires sont également les bienvenues.

Φ Physiquement, on ne peut ignorer l'étendue spatiale des appareils de mesure. De plus, la donnée ponctuelle d'une fonction fait jouer un rôle trop important aux discontinuités, d'où l'idée de calculer des moyennes pondérées qui donnent la même quantité d'informations presque partout. On obtient ainsi une généralisation de la notion de fonction, même de mesure, aux propriétés beaucoup plus souples et manipulables.

H Les ingénieurs et physiciens utilisent les distributions sans aucune justification depuis le calcul symbolique d'Heavyside (1894). L'idée de fonction généralisée est déjà utilisée dans les années 30 avec la fonction de Dirac. Mais les tentatives de justification sont trop apauvrissantes (pas de dérivation ou de Fourier) ou déraisonnables (Bochner donne les propriétés comme axiomes). Les fonctions généralisées sont introduites mathématiquement par Sobolev en 1936 comme dual de $\mathcal{D}_K^{(m)}$, les opérations sont définies, puis des solutions généralisées aux équations de la physique sont considérées. Mais Sobolev disparait de la scène mathématique pendant une vingtaine d'années, et c'est Schwartz qui fonde entièrement la théorie en 1950, rapprochant les travaux de Sobolev sur les fonctionnelles et ceux de Dieudonné sur la topologie des espaces fonctionnels et en en faisant une synthèse et une simplification.

Avis. La motivation, la genèse comme l'aboutissement des distributions sont en grande partie physiques : il convient de ne pas oublier cette idée de moyenne locale à précision arbitraire par convolution. C'est ce qui motive la définition, et c'est ce qui gratifie une fois des solutions d'EDP non triviales atteintes. Mais l'aspect mathématique apporte de très jolis résultats, notamment au niveau topologique ! Attention, cette leçon ressemble beaucoup à la 254 ! Il faut probablement moins axer celle-ci sur la transformation de Fourier et les distributions tempérées, et moins axer l'autre sur la théorie générale.

⋆ ⋆ ⋆

Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$.

1 Distributions

1.1 Les espaces de fonctions test

Δ Si K est un compact non vide de Ω, on définit $D_K(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ de support inclus dans K.

Θ $D_K(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $C^\infty(\Omega)$, qui est un espace de Fréchet muni des semi-normes $\|\phi\|_k = \sup_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha\phi\|_\infty$ qui définit la topologie induite de $C^\infty(\Omega)$ sur $D_K(\Omega)$.

Δ On pose $D(\Omega) = \bigcup_K D_K(\Omega)$ l'espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact, appelées fonctions test.

Θ Existe de fonctions plateaux

Θ Partitions de l'unité

Θ C_c^∞ est dense dans C^k et dans L^p, $p\not=\infty$.

1.2 Les distributions

On introduit les distributions et on y reconnait les espaces de fonctions classiques.

Δ Une distribution sur Ω est une forme linéaire de $D(\Omega)$ continue sur chaque $D_K(\Omega)$, *i.e.* telle que $\forall K, \exists C_K > 0, \exists k \in \mathbf{N}, \forall \phi \in D_K(\Omega), |\langle u, \phi\rangle| \leqslant C\|\phi\|_k$. On note $D'(\Omega)$ cet espace.

E
- ⋆ Si $f \in L^1_{loc}$, alors $[f] : \phi \mapsto \int_\Omega f\phi$ définit une distribution d'ordre 0
- ⋆ La masse de Dirac $\delta_a : \phi \mapsto \phi(a)$ est une distribution non localement intégrable
- ⋆ La distribution de Heavyside $H = 1_{x\geqslant 0}$
- ⋆ La valeur principale de $\frac{1}{x}$ est la distribution $\langle vp(1/x), \phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$

Θ L'application $f \mapsto [f]$ est une injection linéaire, permettant d'identifier les fonctions de L^1_{loc} à des distributions. En particulier les sous-espaces L^p, L^p_{loc}, C^k, etc. de L^1_{loc} se plongent dans $D'(\Omega)$.

1.3 Distributions d'ordre fini

Δ Si, dans la définition d'une distribution, k ne dépend pas de K, le plus petit tel k est appelé l'ordre de la distribution. On note $D'^{(k)}(\Omega)$ l'espace des distributions d'ordre au plus k.

E
- ⋆ Les distributions définies par une fonction sont d'ordre 0
- ⋆ La masse de Dirac est d'ordre 0
- ⋆ La valeur principale de $\frac{1}{x}$ est d'ordre 1
- ⋆ La distribution $\phi \mapsto \sum_j \phi^{(j)}(j)$ est d'ordre infini

R Les distributions d'ordre inférieur à k sont exactement le dual de $C^k_0(\Omega)$.

1.4 Supports de distributions

Supports, caractérisations, dual de C^∞, etc.
Sobolov et injections ?

2 Opérations sur les distributions

Nous savons définit les opérations usuelles sur $D(\Omega)$, on les définit donc sur $D'(\Omega)$ comme les transposées des opérations usuelles, qui sont encore continues pour les topologies faibles et fortes.

2.1 Multiplication par une fonction C^∞

Δ On définit la multiplication de $u \in D(\Omega)$ par $f \in C^\infty$ par $\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle$ pour toute $\phi \in D$. C'est une distribution, d'ordre inférieur à celui de u.

Θ C'est un prolongement de la multiplication usuelle : si $f \in C^\infty$ et $g \in L^1_{loc}$, alors $f|g] = [fg]$.

E
- ★ $xvp(1/x) = 1$
- ★

R Il n'y a pas d'espoir de pouvoir définir une multiplication entre des distributions quelconques : why ?

2.2 Dérivation des distributions

Δ On définit la dérivée de $u \in D'(\Omega)$ par $\langle \partial^\alpha u, \phi\rangle = (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha \phi rangle$. C'est une distribution d'ordre inférieur à celui de u plus $|\alpha|$.

R En particulier, les distributions sont toutes indéfiniment dérivables !

E
- ★ la dérivée de la distribution de Heavyside est une masse de Dirac

Θ On conserve les propriétés opératoires élémentaires : formule de Leibniz, limite du taux d'accroissement, etc.

Θ C'est un prolongement de la dérivation usuelle : si$f \in C^\infty(\Omega)$, alors $D^a[f] = [D^a f]$.

Θ (Formule des sauts) En dimension 1, si $f \in C^1M(]a,b[)$ et si les points de discontinuités de f' sont les $a_0 < \cdots < a_n$, alors $[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^n (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}$.

Θ (Formule de Gauss-Green)

Θ Une distribution à support réduit à $\{a\}$ est une combinaison linéaire de δ_a et de ses dérivées.

2.3 Restrictions et prolongements

Δ La restriction d'une distribution à $\Omega' \subseteq \Omega$ est définie par $\langle u_{\Omega'}, \phi\rangle = \langle u, \phi_{\Omega'}\rangle$. C'est une distribution sur Ω' d'ordre inférieur à celui de u.

Δ Deux distributions $u, v \in D'(\Omega)$ sont égales sur un ouvert Ω' si $u_{\Omega'} = v_{\Omega'}$.

Δ Le support de $u \in D'(\Omega)$ est $supp(u) = \Omega \setminus \bigcup_{u_{\Omega'}=0} \Omega'$. Plus explicitement, $x \notin supp(u)$ si, et seulement si, il existe un voisinage V de x sur lequel u est nulle, *i.e.* tel que si $supp(\phi) \subseteq V$, alors $\langle u, \phi\rangle = 0$.

Θ (partition de l'unité) Si K est un compact et $(\Omega_i)_i$ un recouvrement ouvert fini de K, alors il existe $(\phi_i)_i \in D(\mathbf{R}^n)^I$ telle que pour tout i, $0 \leqslant \phi_i \leqslant 1$, $supp(\phi_i) \subseteq \Omega_i$ et $\sum_I \phi_i = 1$ sur K. $(\phi_i)_i$ est une partition de l'unité subordonnée à $(\Omega_i)_i$.

Θ Si une distribution est nulle sur des ouverts, elle est nulle sur leur réunion. En particulier elle est nulle sur le complémentaire de son support.

Θ (recollement) Si $(\Omega_i)_i$ est une famille d'ouverts de réunion Ω et si $(u_i)_i$ est une famille de distributions sur ces ouverts, telle que $u_i = u_j$ sur $\Omega_i \cap \Omega_j$, alors il existe une unique distribution $u \in D'(\Omega)$ telle que $u_{\Omega_i} = u_i$. Et alors l'ordre de u est le supremum des ordres de u_i.

2.4 Les distributions comme dérivées

Θ Si $T \in D'(\Omega)$ et $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, alors il existe $f \in C(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbf{N}^d$ tels que $f = \partial^\alpha f$ sur Ω_1. Autrement dit, toute distribution est localement la dérivée d'une fonction continue.

A Si $T \in E'(\Omega)$ est à support compact d'ordre k, alors il existe des fonctions continues à support compact sur Ω telles que $u = \sum_{|a| \leqslant (k+2)n} D^a f_a$.

3 Distributions tempérées

3.1 Distributions tempérées

R La transformation de Fourier est importante en ce qu'elle transforme des problèmes différentiels en des problèmes algébriques, souvent plus simples à résoudre, et sans perdre d'information du fait qu'elle est injective. Il est naturel de vouloir la généraliser aux distributions.

Δ L'espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^n)$ est l'espace des fonctions à décroissance rapide, *i.e.* des fonctions $\phi \in C^\infty(\Omega)$ telles que $\forall a, b \in \mathbf{N}^n, ||phi||_{a,b} = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^a D^b \phi(x)| < \infty$.

Θ $D(\Omega)$ est dense dans $S(\mathbf{R}^n)$.

Δ L'espace des distributions tempérées est $S'(\mathbf{R}^n)_D$, *i.e.* l'ensemble des formes linéaires continues sur S restreintes à D.

Θ $u \in D($
$R^n)$ est une distribution tempérée si, et seulement si, $\exists C > 0, \exists k, l \in \mathbf{N}, \forall \phi \in D(\Omega), |u(\phi)| \leqslant C||\phi||_{k,l}$. En particulier u est d'ordre au plus l.

Δ Une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ est à croissance lente si $\forall a \in \mathbf{N}^n, \exists C > 0, \exists k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}^n, |D^a f(x)| \leqslant C(1 + |x|^2)^k$. Leur ensemble est un espace vectoriel, noté O_M.

3.2 Transformation de Fourier dans $S(\mathbf{R}^d)$

Δ On définit, pour $f \in S(\mathbf{R})$, la transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto u(\hat{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi\rangle}$ qui est dans $S(\mathbf{R}^d)$.

Θ (inversion de Fourier) L'application $f \in S(\mathbf{R}^d) \mapsto \hat{f} \in S(\mathbf{R})$ est un automorphisme continu de $S(\mathbf{R}^d)$, vérifiant la formule d'inversion $\hat{\hat{f}}(\xi) = (2\pi)^d f(-\xi)$.

E
- ★ $F(\delta_0) = 1$
- ★ $F(sgn) = 2ivp(\frac{1}{x}) + k\delta_0$
- ★ $F(\log) =$

Θ La transformation de Fourier dans S vérifie les propriétés, pour $u, v \in S$,
- ★ $\int \hat{u}v = \int u\hat{v}$
- ★ $u \star v \in S$ et $F(u \star v) = \hat{u}\hat{v}$
- ★ $F(uv) = (2\pi)^{-n} \hat{u} \star \hat{v}$
- ★ $F(D^j u) = \xi_j \hat{u}$
- ★ $F(x_j u) = -D_j \hat{u}$

3.3 Les distributions tempérées comme dérivées

Δ Une fonction f est tempérée si $\exists C > 0, \exists k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}^n, |f(x)| \leqslant C(1+|x|^2)^k$.

Θ Si $u \in S'$, alors il existe une fonction tempérée continue et $a \in \mathbf{N}^n$ tels que $u = D^a f$.

R C'est une trame de bons espaces – de Hilbert – entre les distributions à support compact et C^∞, permettant de mesurer finement la régularité des distributions et de remonter des solutions faibles aux solutions classiques.

3.4 L'équation des ondes dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^3_x$

Δ Le d'Alembertien est l'opérateur $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$.

Δ On définit l'opérateur $\langle T_t, \phi \rangle = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \phi(\omega t) d\omega$.

Θ $T \in C^\infty(\mathbf{R}, E^(\mathbf{R}^3))$.

Δ On définit l'opérateur $\langle E, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}_+} \langle T_t, \psi(t, \cdot) \rangle dt$.

Θ E est une solution élémentaire de $\square$, *i.e.* $\square E = \delta_0$.

Θ Si $f, g \in D'(\mathbf{R}^3)$, alors il existe une unique $(u_t) \in C^\infty(\mathbf{R}, D'(\mathbf{R}^3))$ et $u \in D'(\mathbf{R}^4)$ définie par $\langle u, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle u_t n \phi(t, \cdot) \rangle dt$ tels que :

- ⋆ $\square u = 0$ dans $D'(]0, \infty[\times \mathbf{R}^3)$
- ⋆ $u_0 = f$
- ⋆ $u'_0 = g$

Θ La solution se déplace à vitesse finie : si $supp(f), supp(g) \subseteq \{x \in \mathbf{R}^3, |x| \leqslant R\}$, alors pour tout $t \geqslant 0$ on a $supp u(t, \cdot) \subseteq \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leqslant R + t\}$.

Θ La solution vérifie le principe de Huygens : si $supp(f), supp(g) \subseteq \{x \in \mathbf{R}^3, |x| \leqslant R\}$, alors u est nulle sur $\{(t, x) \mid t > R, |x| < t - R\}$.

Autres idées à explorer...
Parler d'ondelettes, cf. Gasquet-Witomsky
Analyse microlocale à la Schwartz
Les distributions sont localement des dérivées de fonctions continues [Wagschal(2011), p. 49], ou le pendant tempéré
Solution de l'équation des ondes [**?**, ch. 9]
Les distributions dont le support est restreint à un point est une somme de masses de Dirac [Wagschal(2011), p.]

- **Développements.**
  - ⋆ **Distributions à support ponctuel [Wagschal(2011)]**
  - ⋆ **Injections de Sobolev**
  - ⋆ **Équation des ondes, [?]**

Références
Pour l'histoire, [Kantor()] est complet et concis, qui appuie bien l'introduction de [**?**]. Une excellente introduction y est motivée, et se complète par l'excellent et très bienvenu [SChwartz(1966), ch. 1] qui motive les généralisations successives fonction → mesure → distribution.
Pour le contenu propre, [Wagschal(2011)] est excellent, notamment I.A, B et C, efficace et très complet, avec des applications à l'analyse microlocale et aux EDP, et contenant une mine de développements. On peut toujours compléter avec [SChwartz(1966)] pour quelques considérations plus fines, par exemple des exemples de mesures non fonctions, de distributions non mesures, des résultats sur les topologies des espaces considérés, etc. Plus élémentairement et de manière plus condensée, le [**?**] est plus praticable en un temps limité de préparation. [Gesquet-Witomski(1995)] est bien pour l'introduction et quelques résultats, l'éclairage physique est appréciable.

Bibliographie

[Abdeljaouad(2003)] Abdeljaouad, M. (2003), *Quelques éléments d'histoire de l'analyse combinatoire*. Journées nationales de l'ATSM.

[Aigner(2007)] Aigner, M. (2007), *A course in enumeration*. Springer.

[Alessandri(1999)] Alessandri, M. (1999), *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométriques*. Dunod.

[Alvarez(2011)] Alvarez, Dhombes (2011), *Une histoire de l'imaginaire mathématique*. Hermann.

[Artin(1944)] Artin, E. (1944), *Galois Theory*. Dover.

[Audin(2006)] Audin, M. (2006), *Géométrie*. EDP Sciences.

[Avez(1985)] Avez, A. (1985), *Calcul Différentiel*. Masson.

[Bacaër(2008)] Bacaër, N. (2008), *Histoire de mathématiques et de populations*. Cassini.

[Barvinok(2002)] Barvinok, A. (2002), *A course in convexity*. AMS.

[Baumard and Page(2012)] Baumard, S. and A. Page (2012), *Le théorème de Pólya*. RMS, RDE.

[Berger()] Berger, M. (? ? ? ?), *Geometry I*. Springer.

[Berhuy(2012)] Berhuy, G. (2012), *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*. C& M.

[Bourbaki(2006)] Bourbaki, N. (2006), *Élements de mathématiques. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 2 et 3*. Springer.

[Bourbaki(2007a)] Bourbaki, N. (2007a), *Élements de mathématiques. Algèbre. Chapitres 1 à 3*. Springer.

[Bourbaki(2007b)] Bourbaki, N. (2007b), *Élements de mathématiques. Algèbre. Chapitres 4 à 7*. Springer.

[Bourgade(2005)] Bourgade, P. (2005), *Olympiades internationales de mathématiques 1976–2005*. Cassini.

[Brezis(2005)] Brezis, H. (2005), *Analyse fonctionnelle*. Dunod.

[Brunschvicg(1993)] Brunschvicg, L. (1993), *Les étapes de la philosophie mathématique*. A. Blanchard.

[calais(1984)] calais, J. (1984), *Éléments de théorie des groupes*. PUF.

[Caldero-Germoni(2013)] Caldero-Germoni (2013), *Histoire hédoniste de groupes et de géométrie*. C& M.

[Candelpergher(2009)] Candelpergher, B. (2009), *Calcul intégral*. Cassini.

[Candelpergher(2013)] Candelpergher, B. (2013), *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire*. C& M.

[Carrega(1981)] Carrega, J.-C. (1981), *Théorie des corps. La règle et le compas*. Hermann.

[Cartan(1961)] Cartan, H. (1961), *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann.

[Cartan(2007)] Cartan, H. (2007), *Formes différentielles*. Hermann.

[Chambert-Loir(2005)] Chambert-Loir, A. (2005), *Algèbre corporelle*. Éditions de l'École polytechnique.

[Chambert-Loir-Fermigier(1996a)] Chambert-Loir-Fermigier (1996a), *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse 1*. Masson.

[Chambert-Loir-Fermigier(1996b)] Chambert-Loir-Fermigier (1996b), *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse 2*. Masson.

[Chambert-Loir-Fermigier(1996c)] Chambert-Loir-Fermigier (1996c), *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse 3*. Masson.

[Chenciner()] Chenciner (? ? ? ?), *Introduction aux variétés algébriques*. Springer.

[Ciarlet()] Ciarlet (? ? ? ?), *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*. Dunod.

[Colmez(2011)] Colmez, P. (2011), *Élements d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Éditions de l'X.

[Combes(2003)] Combes, F. (2003), *Algèbre et géométrie*. Bréal.

[Comtet()] Comtet (? ? ? ?), *Combinatoire*. PUF.

[Cottrell(2011)] Cottrell, M. (2011), *Exercices de probabilités*. Cassini.

[Couturat(1973)] Couturat, L. (1973), *De l'infini mathématique*. A. Blanchard.

[de l'Éducation de l'Ontario(2008)] de l'Éducation de l'Ontario, Ministère (2008), *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année. Modélisation et algèbre*. `http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_MA_456.pdf`.

[de Seguin-Pazzis()] de Seguin-Pazzis, C. (? ? ? ?), *Introduction aux formes quadratiques*. C& M.

[Delcourt(2007)] Delcourt, J. (2007), *Théorie des groupes*. Dunod.

[Demailly(2006)] Demailly, J.-P. (2006), *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences.

[Demazure(2008)] Demazure, M. (2008), *Cours d'algèbre*. Cassini.

[di Menza(2009)] di Menza, L. (2009), *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Cassini.

[Dieudonné(1977)] Dieudonné, J. (1977), *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*. Bordas.

[Dieudonné(1986)] Dieudonné, J. (1986), *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Hermann.

[Dieudonné(1987)] Dieudonné, J. (1987), *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*. Hachette.

[Dimet(2008)] Dimet, J.-Y. Le (2008), *Géométrie et topologie différentielles*. Vuibert.

[do Carmo()] do Carmo, M. P. (? ? ? ?), *Riemanian Geometry*. Birkhauser.

[do Carmo(1976)] do Carmo, M. P. (1976), *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall.

[Douady(2005)] Douady, A. & R. (2005), *Algèbre et théories galoisiennes*. Cassini.

[Duverney(2007)] Duverney, D. (2007), *Théorie des nombres*. Dunod.

[E. amar(2004)] E. amar, E. Matheron (2004), *Analyse complexe*. Cassini.

[Earp()] Earp, R. S. (? ? ? ?).

[Faraut(2006)] Faraut, J. (2006), *Analyse sur les groupes de Lie*. G& M.

[Fresnel(2001)] Fresnel, J. (2001), *Groupes*. Hermann.

[Fresnel(2011)] Fresnel, J. (2011), *Algèbre des matrices*. Hermann.

[G. James(2004)] G. James, M. Liebeck (2004), *Reprensentations and Characters of Groups*. Cambridge University Press.

[Galot()] Galot, Lafontaine, Hulin (? ? ? ?), *Riemanian Geometry*. Springer.

[Gesquet-Witomski(1995)] Gesquet-Witomski (1995), *Analyse de Fourier et applications*. Masson.

[GICS(2011)] GICS (2011), *Une invitation à la théorie des graphes*. `www.gics.fr/sites/default/files/graphes.pdf`.

Key : gics
Annotation : LaTeX2e
GICS[01/03/2014, Classe GICS, V1.0]
[10pt, a4paper]article
[utf8]inputenc [T1]fontenc [francais]babel graphicx fancyhdr geometry
hmargin=2cm,2cm vmargin=2cm,2cm
[C]Titre [L]GICS [R]
[C]215 [L]GICS [R]siège social
CA

[Godement(2003)] Godement, R. (2003), *Analyse mathématique II*. Springer.

[Godement(2004)] Godement, R. (2004), *Introduction à la théorie des groupes de Lie*. Springer.

[Gorenstein(2000)] Gorenstein, D. (2000), *Finite Groups*. AMS Chalseau Publishing.

[Gourdon(2008)] Gourdon, X. (2008), *Les maths en tête. Analyse*. Ellipse.

[Gourdon(2009)] Gourdon, X. (2009), *Les maths en tête. Algèbre*. Ellipse.

[Gozard(2009)] Gozard, I. (2009), *Théorie de Galois*. Ellipses.

[H. Queffélec(2007)] H. Queffélec, C. Zuily (2007), *Analyse pour l'agrégation*. Dunod.

[Hindry(2008)] Hindry, M. (2008), *Arithmétique*. C& M.

[Humphreys(1972)] Humphreys, J. E. (1972), *Introduction to Lie Algebras and Reprensentation Theory*. Springer.

[Hörmander(2000)] Hörmander, L. (2000), *Complex Analysis in Several Variables*. North Holland.

[J.-M. Arnaudiès()] J.-M. Arnaudiès, J. Bertin (? ? ? ?), *Algèbre, groupes, arithmétique*. Ellipses.

[Jiri-Matouzek(2002)] Jiri-Matouzek (2002), *Introduction aux mathématiques discrètes*. Springer.

[Kantor()] Kantor, Jean-Michel (? ? ? ?), *Mathématiques d'Est en Ouest. Théorie et pratique : l'exemple des distributions*. SMF.

[Kebar()] Kebar, Allaire (? ? ? ?), *Algèbre linéaire théorique*.

[Lafontaine(2010)] Lafontaine, J. (2010), *Introduction aux variété différentielles*. EDP Sciences.

[Lang()] Lang, S. (? ? ? ?), *Algèbre*. Dunod.

[Lang(1999)] Lang, S. (1999), *Complex Analysis*. Springer.

[Laville()] Laville (? ? ? ?), *Courbes et Surfaces*. Ellipses.

[Lesigne(2001)] Lesigne, E. (2001), *Pile ou face. Une introduction aux théorèmes limites du calcul des probabilités*. Ellipses.

[Levy-Bruhl(1918)] Levy-Bruhl, L. (1918), *Fonctions mentales dans les sociétés inférieures*. Alcan.

[Lionnais(1998)] Lionnais, F. Le (1998), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Hermann.

[Lockwood(1961)] Lockwood, E. H. (1961), *A book of curves*. Cambridge University Press.

[Lombardi-Quitté(2011)] Lombardi-Quitté (2011), *Algèbre commutative. Méthodes constructives*. C& M.

[M. Berger(1988)] M. Berger, B. Gostiaux (1988), *Differential geometry : manifolds, curves and surfaces*. Springer-Verlag.
[M. Briane(2009)] M. Briane, G. Pages (2009), *Théorie de l'intégration*. Vuibert.
[Makarov(2010)] Makarov, B. M. (2010), *Problèmes d'analyse réelle*. Cassini.
[Mignotte()] Mignotte, L. (? ? ? ?), *Algèbre concrète*. Ellipses.
[Milnor(1997)] Milnor, J. (1997), *Topology from the Differentiable Vewpoint*. Princeton University Press.
[Mneimné()] Mneimné, R. (? ? ? ?), *Réduction des endomorphismes*. C& M.
[Mneimné(1997)] Mneimné, R. (1997), *Éléments de géométrie*. Cassini.
[Netz(1998)] Netz, R. (1998), *Deuteronomic Texts : Late Antiquity and the History of Mathematics*. Revue d'Histoire des Mathématiques.
[Nourdin(2001)] Nourdin, I. (2001), *Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie*. Dunod.
[Ouvrard(2007)] Ouvrard, J.-Y. (2007), *Probabilités I*. Cassini.
[Ouvrard(2009)] Ouvrard, J.-Y. (2009), *Probabilités II*. Cassini.
[Perrin(1996)] Perrin, D. (1996), *Cours d'algèbre*. Ellipse.
[Platon(1950)] Platon (1950), *Thééthète*. Gallimard, bibliothèque de la Pléiade.
[Pommellet(1994)] Pommellet, A. (1994), *Cours d'analyse*. Ellipse.
[Prasolov(2007)] Prasolov, V. (2007), *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*. Cassini.
[Queffélec(2012)] Queffélec, H. (2012), *Topologie*. Dunod.
[R. Mneimné(2009)] R. Mneimné, F. Testard (2009), *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann.
[Rashed(2011)] Rashed, R. (2011), *D'Al-Khwarizmi à Descartes. Études sur l'histoire des mathématiques classiques*. Hermann.
[Raymond(2008)] Raymond, J. Saint (2008), *Tpologie, calcul différentiel et variable complexe*. C& M.
[Reboul(1980)] Reboul, O. (1980), *Qu'est-ce qu'apprendre*. PUF.
[Reboul(1989)] Reboul, O. (1989), *La philosophie de l'éduction*. PUF.
[Rockafellar(1970)] Rockafellar, R. T. (1970), *Convex Analysis*. Princeton University Press.
[Rotman(1995)] Rotman, J. J. (1995), *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer.
[Rotman(1998)] Rotman, J. J. (1998), *Galois Theory*. Springer.
[Rouvière(2009)] Rouvière, F. (2009), *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini.
[Rudin(1991)] Rudin, W. (1991), *Functional Analysis*. McGraw-Hill.
[Rudin(2009)] Rudin, W. (2009), *Analyse réelle et complexe*. Dunod.
[S. Francinou()] S. Francinou, H. Gianella (? ? ? ?), *Exercices de mathématiques*. Masson.
[S. Francinou(2004)] S. Francinou, S. Nicolas, H. Giannella (2004), *Oraux X-ENS, Analyse 2*. Cassini.
[S. Francinou(2007a)] S. Francinou, S. Nicolas, H. Giannella (2007a), *Oraux X-ENS, Algèbre 1*. Cassini.
[S. Francinou(2007b)] S. Francinou, S. Nicolas, H. Giannella (2007b), *Oraux X-ENS, Analyse 1*. Cassini.
[S. Francinou(2008a)] S. Francinou, S. Nicolas, H. Giannella (2008a), *Oraux X-ENS, Algèbre 2*. Cassini.
[S. Francinou(2008b)] S. Francinou, S. Nicolas, H. Giannella (2008b), *Oraux X-ENS, Algèbre 3*. Cassini.
[S. Francinou(2010)] S. Francinou, S. Nicolas, H. Giannella (2010), *Oraux X-ENS, Analyse 3*. Cassini.
[S. Francinou(2012)] S. Francinou, S. Nicolas, H. Giannella (2012), *Oraux X-ENS, Analyse 4*. Cassini.
[S. Gonnord(1996)] S. Gonnord, N. Tosel (1996), *Topologie et analyse fonctionnelle*. Ellipse.
[S. Gonnord(1998)] S. Gonnord, N. Tosel (1998), *Calcul différentiel*. Ellipse.
[Samuel(2003)] Samuel, P. (2003), *Théorie algébrique des nombres*. Hermann.
[SChwartz(1966)] SChwartz, L. (1966), *Théorie des distributions*. Hermann.
[Schwartz(1970)] Schwartz, L. (1970), *Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann.
[Serre(a)] Serre, D. (? ? ? ?a), *Les matrices*. Dunod.
[Serre(b)] Serre, J.-P. (? ? ? ?b), *Cours d'arithmétique*. PUF.
[Serre(1998)] Serre, J.-P. (1998), *Représentation linéaire des groupes finis*. Hermann.
[Sossinsky(2012)] Sossinsky, A. B. (2012), *Geometries*. AMS.
[Szpirglas(2007)] Szpirglas, A. (2007), *Exercices d'algèbre*. Cassini.
[Tenenbaum(2008)] Tenenbaum, G. (2008), *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Belin.
[Testard(2012)] Testard, F. (2012), *Analyse mathématique, la maîtrise de l'implicite*. C& M.
[TNS-Sofres(2009)] TNS-Sofres (2009). `www.tns-sofres.com/_ assets/files/2010.01.15-confiance-politique.pdf`.
[Toulouse()] Toulouse (? ? ? ?), *Probabilités*. Dunod.
[Unguru(1975)] Unguru, S. (1975), *On the need to rewrite the history of greek mathematics*. Archive for History of Exact Sciences.

[V. Beck(2005)] V. Beck, G. Peyré, J. Malick (2005), *Objectif Agrégation*. H& K.

[Villani(2003)] Villani, C. (2003), *Topics in Optimal Transporation*. AMS.

[Vuillemin(1993)] Vuillemin, J. (1993), *La philosophie de l'algèbre*. PUF, coll. Épiméthée.

[Vuillemin(2001)] Vuillemin, J. (2001), *Mathématiques pythagoriciennes et platoniciennes*. A. Blanchard.

[W. Fulton(2004)] W. Fulton, J. Harris (2004), *Representation Theory*. Springer.

[Wagschal(2011)] Wagschal, C. (2011), *Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles*. Hermann.

[Wagschal(2012a)] Wagschal, C. (2012a), *Dérivation, intégration*. Hermann.

[Wagschal(2012b)] Wagschal, C. (2012b), *Topologie et analyse fonctionnelle*. Hermann.

[Warusfel(1969)] Warusfel, A. (1969), *Les mathématiques modernes*. « Le rayon de la science », Le Seuil.

[Winter(1908)] Winter, M. (1908), *Du rôle de la philosophie dans la découverte scientifique*. Revue de métaphysique et de morale.

[Zavidovique(2013)] Zavidovique, M. (2013), *Un Max de maths*. C& M.