LE GO ET LES MATHÉMATIQUES

UN VOYAGE AU CONFLUENT DE DEUX MONDES

DIDIER LESESVRE

Table des matières

Jeu et science tous deux millénaires, le go et les mathématiques sont deux mondes d'une phénoménale profondeur qui s'entrelacent, s'enrichissent et s'éclairent l'un-l'autre. Au cœur d'une actualité bouillonnante, le go n'a de cesse d'utiliser des mathématiques multiples, parfois improbables, au point d'en devenir un sujet de recherche en soi, les éclairant à son tour.

S'il n'était pas possible d'explorer ces différents royaumes autant qu'ils le mériteraient en ces quelques lignes, nous avons choisi d'en mentionner plusieurs aspects, tâchant à chaque fois d'en donner une idée élémentaire mais représentative, de s'aventurer jusque quelques sommets, puis de regarder l'horizon aperçu de là-haut, invitant à voyager plus loin dans chaque direction.

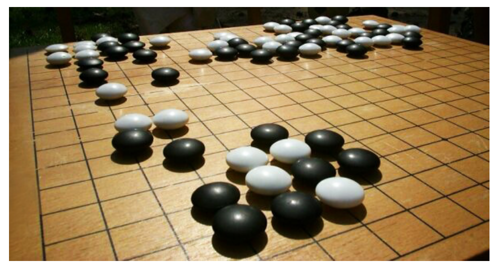
Représentation d'une partie de go au XVIᵉ siècle
Détail des *Quatre accomplissements* de Kano Eitoku

Date: Mai 2022.

1. Le jeu de go

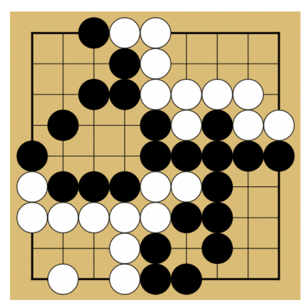
1.1. **Aperçu.** Le go (dénommé 围棋 *weiqi* en chinois, 바둑 *baduk* en coréen et 囲碁 *igo* en japonais) est un jeu de stratégie chinois déjà répandu avant notre ère. Sa place dans l'élite intellectuelle chinoise en a fait un jeu hautement considéré, l'érigeant comme l'un des quatre aboutissements de la société cultivée, au même rang que la musique, la calligraphie et la peinture [10].

Le jeu de go est joué sur un plateau, appelé *goban*, représentant un quadrillage dont la taille la plus répandue de nos jours est 19×19. Le goban est vide au début du jeu et sera le lieu d'affrontement des deux adversaires – noirs et blancs – pour conquérir le plus grand territoire.



Vue plongeante sur un goban

1.2. **Règle de position.** Les règles du go sont particulièrement simples : à tour de rôle, chaque joueur pose une pierre sur une intersection vide. Dans une partie absolument paisible, cette règle suffirait, et le vainqueur serait celui ayant encerclé le plus grand territoire (le *weiqi* signifiant littéralement le jeu de l'encerclement).



Exemple d'une partie paisible sur 9×9
Noir a 23 points de territoire et blanc 14

1.3. **Règle de capture.** Toutefois, il existe une règle de combat : une pierre (ou un groupe de pierres) perdant toutes ses libertés est capturée, et retirée du plateau. Cela ouvre la porte à de nombreuses possibilités de combats ou d'invasions, et une partie de go est souvent un ballet de vie et de mort.

Ces règles du go [1] sont déjà fort riches et vont nous permettre d'explorer beaucoup de belles mathématiques.

2. Combinatoire des jeux

2.1. Un univers fini. Le jeu de go est par essence fini : il n'y a que 361 intersections sur un goban, donc un nombre fini de coups et de parties possibles. C'est naturellement le domaine de la *combinatoire* (l'étude des ensembles finis) qui s'attaque le premier au jeu de go.

La situation est déjà loin d'être facile pour des jeux plus simples comme le morpion : il y a 5478 parties possibles pour ce petit jeu, et la question est un peu plus délicate si on ne veut pas compter plusieurs fois des parties ≪ équivalentes ≫ en un certain sens. Un problème plus simple est l'étude de la longueur d'une partie : une partie de morpion peut durer au plus 9 coups, et certaines parties de 9 coups existent, montrant qu'il s'agit bien de la longueur maximale.

2.2. Premières approches. Que dire du go ? 361 coups n'est pas une borne absolue pour la longueur d'une partie (même si souvent constatée en pratique) : en effet, des pierres peuvent être faites prisonnières et retirées du goban, ouvrant la voie à de nouveaux coups.

On peut simplifier encore le problème en regardant plutôt le nombre de positions possibles. Une borne pour ce nombre sur un goban de taille $n \times n$ est d'au plus 3^{n^2} positions autorisées. En effet, chacune des n^2 intersection peut être dans l'une des trois situations suivantes : avoir une pierre blanche, noire ou aucune. Une telle borne est toutefois incroyablement grande, de l'ordre de 10^{172} pour un goban de taille 19×19, à comparer au nombre de particules de l'univers estimé à un minuscule 10^{80}.

2.3. Graphes et algèbre linéaire. Pour réussir à comprendre certaines questions, une stratégie est celle de prendre de la distance, sinon de la hauteur, et de les plonger dans des cadres parfois plus complexes, plus riches, permettant de déceler plus de structure. Certains chercheurs ont ainsi étudié plus généralement le nombre de positions *légales* $L(m, n)$ possibles sur un goban de taille $n \times m$. Une manière astucieuse de modéliser et d'explorer cette question est d'introduire le *graphe du jeu* $G(m, n)$, représentant tous les états possibles du goban et reliant les états pouvant être atteints en un coup, de sorte que les parties de go sur un goban $m \times n$ correspondent (bijectivement) avec les chemins (simples) partant du goban vide.

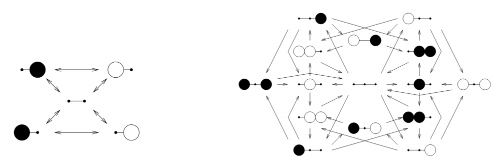


Fig. 1. game graph $G(1, 2)$ **Fig. 2.** game graph $G(1, 3)$

Deux exemples de graphes de jeu, issus de [13]

Ainsi, la question du dénombrement du nombre de positions possibles se réduit à un dénombrement de certains chemins sur un graphe, problème pour lequel beaucoup d'outils théoriques ont été développés (pour les questions de type voyageur de commerce, construction de réseaux électriques, plus courts chemins, etc.) mais qui restent au cœur des défis de la recherche actuelle. Le nombre $L(m, n)$ peut alors être décrit grâce à une récurrence l'exprimant à partir du cas de base $L(1, 0)$, réduisant le problème à comprendre les valeurs propres de la matrice sous-jacente, problème d'algèbre linéaire.

2.4. Enfin des réponses... partielles. Les algorithmes obtenus par cette méthode sont très lourds pour les ordinateurs (avec une complexité doublement exponentielle), mais permettent de déterminer un comportement asymptotique précis, qui est de l'ordre de

$$L(m, n) \approx 3^{\alpha mn} \left(1 - \frac{2}{81}\right)^{\frac{2}{5}(m+n)} \quad \text{où } \alpha \in [\tfrac{4}{5}, 1].$$

Sur un goban de taille 19×19, il a fallu attendre dix ans plus tard, pour que Tromp détermine en 2016 le nombre exact de positions possibles :

$$\begin{array}{c}
2081681993819799846 \\
9947863334486277028 \\
6522453884530548425 \\
6394568209274196127 \\
3801537852564845169 \\
8519643907259916015 \\
6281285460898883144 \\
2712971531931755773 \\
6620397247064840935
\end{array}$$

Mais que dire du nombre de parties possibles ? Tromp [12] note que le nombre de parties (avec ko) sur un goban 2×2 est déjà de... 386 356 909 593 ! Dans ce cas, le nombre de positions possibles est également

1. Les règles présentées ici ont été un peu simplifiées, il faudrait notamment rajouter la règle du *ko*, et le lecteur pourra se référer à un autre article dans ce numéro à ce propos. Les règles officielles elles-mêmes admettent des variations ouvrant la porte à d'interminables débats passionnés sur le décompte, le droit au suicide, le ko, les seki, la possibilité de passer, etc.

étonnamment élevé (57), de sorte que cette explosion, typique de la combinatoire, n'est que le résultat de l'exploration d'un graphe particulièrement dense.

Sur un goban standard de taille 19×19, Tromp et Farnebäck [13] ont donné une borne inférieure de $10^{10^{48}}$ au nombre de parties possibles, améliorée récemment à un *Googleplex* $10^{10^{100}}$ par Walraet [14], mais demeurant encore loin d'une valeur exacte. Beaucoup de chemin reste ainsi à parcourir avant de comprendre profondément la fine combinatoire du go, mais une partie de la richesse mathématique du jeu go commence à s'entrevoir.

3. Territoire, influence et topologie

3.1. Territoire et influence. Les deux facettes des règles du jeu de go — position et combat — peuvent se traduire au niveau stratégique par deux concepts : le *territoire* et l'*influence*, évoluant sans cesse au cours d'une partie. Au cœur des enjeux d'une partie de go, ces deux notions sont difficiles à définir (le territoire serait constitué de points « sûrs » ; l'influence une notion intuitive de force) et plus encore d'en estimer l'importance relative pour équilibrer sa stratégie au cours de la partie. L'utilisation de concepts mathématiques pour modéliser ces notions va toutefois en apporter une compréhension nouvelle.

3.2. Dilatation et érosion topologiques. L'utilisation de la topologie mathématique pour embrasser ces idées de territoire et d'influence semble naturelle, avec ses concepts de voisinages, de connexité, etc. Ces notions paraissent tout adaptées dans leur version discrète, provenant de la théorie des graphes, mais elles ne rendent que difficilement compte du manque de certitude sur le déroulement d'une partie. Une version « analytique » ou continue de ces idées semble donc primordiale, et a été proposée par Bouzy [2] dans sa thèse, dont certaines idées sont synthétisées par Mercier [9].

La première approche provient de la topologie classique et de sa notion de *voisinage*. Considérons un ensemble E (les points du goban) et une famille d'éléments structurant $(V_x)_{x \in E}$ associés à chaque point (en quelque sorte : son potentiel d'influence). La dépendance en x recouvre le fait que, par exemple, un *hoshi* (point 4-4) a plus de potentiel d'influence qu'un point situé sur un bord. Deux notions centrales sont alors introduites : le *dilaté* d'un ensemble (de pierres) A est défini part

$$D(A) = \{x \in E \; : \; V_x \cap A \neq \varnothing\},$$

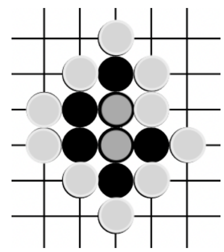
qui peut-être pensé comme les points du goban dans une certaine aire d'influence autour de A ; et l'*érodé*

$$E(A) = \{x \in E \; : \; V_x \subset A\},$$

qui peut être pensé comme les points du goban profondément ancrés dans la zone délimitée par A. On définit alors la fermeture comme

$$F(A) = E(D(A)),$$

opérateur qui a un effet convexifiant et érodant à la fois :



Groupe de pierres noires, sa dilatation (en deux teintes de gris) et sa fermeture (en gris foncé) pour $V_x = B(x, 1)$

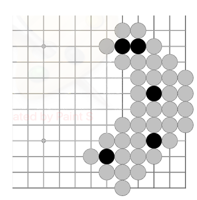
Ces notions sont importées des théories mathématiques du traitement d'image, où elles sont utilisées pour le lissage et la correction.

3.3. Application au territoire et à l'influence. De ces concepts topologiques, Bouzy [2] propose de définir l'influence (mathématisée !) d'un ensemble de pierres A comme $I(A) = D(A) \backslash A$ (les pierres en deux teintes de gris ci-dessus), et le territoire délimité par A comme $T(A) = F(A) \backslash A$ (les pierres en gris foncé).

Si un tel choix se rapproche de certains jugements humains sur le territoire et l'influence, il ne les recouvre toutefois pas dans tous les cas (par exemple les grandes structures centrales). Bouzy propose de combler ces manques en itérant les dilatations et les érosions, considérant des opérateurs de la forme

$$X(m, n) = E^m \circ D^n$$

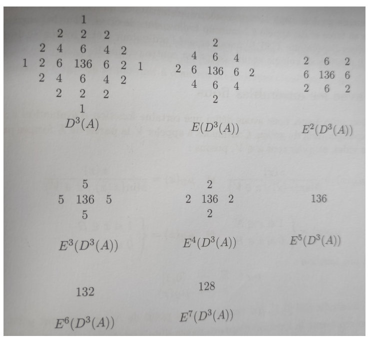
réalisant n dilatations successives suivies de m érosions de cette situation :



Exemple de dilatations et d'érosions successives. Les pierres en noir sont le groupe initial de pierres, et les pierres grisées sont le résultat des itérations modélisant l'influence

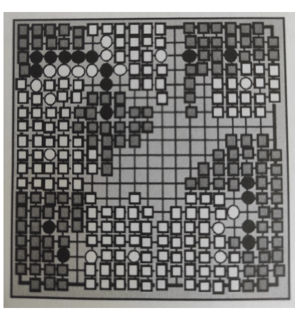
Ces premières élucubrations mathématiques permettent de s'approcher d'une idée satisfaisante de ces notions du go, toutefois elles ne s'appliquent qu'aux groupes de pierres isolés, ignorant la présence d'autres groupes menant à des ≪ luttes d'influence ≫.

3.4. **Approche diffusive.** De manière à prendre en compte de tels conflits, Zobrist [15] a proposé d'utiliser des modèles de diffusion importés de la biologie ou en physique. Les pierres sont alors considérées comme ≪ rayonnant ≫ sur tout le goban, l'intensité diminuant avec la distance. Le rayonnement peut alors être raffiné, les intersections voisines de pierres rayonnant à leur tour, de sorte que les grands groupes de pierre rayonnent plus intensément que les pierres isolées.



Modèle de diffusion de Bouzy

Bouzy explora plus en profondeur ce modèle et développa une version du jeu de go basée sur cette influence (Indigo). Il obtient des évaluations d'influence comme celle-ci :



Estimation des influences suivant le modèle de Bouzy

Les choix possibles des itérations à réaliser, des fonctions de rayonnement, des règles d'affaiblissement et de renforcement sont évidemment légion, et ces premiers essais donnent néanmoins une idée de la richesse de ces modélisations.

Ainsi, si les modèles issus de la diffusion permettent d'apporter un éclairage nouveaux aux notions de territoire et d'influence au go, des modèles physiques considérant les pierres comme des particules chargées ou des corps thermiques sont autant de portes ouvertes rappelant la profondeur des phénomènes du go, et l'incroyable capacité de l'esprit à chercher des chemins de traverse, bâtir des ponts, parfois ouvrir de nouvelles voies.

3.5. **Approche floue.** Une dernière approche mathématique de la notion d'influence est celle des *ensembles flous*. Les fonctions d'évaluation de chaque intersection sont désormais floues : au lieu d'être noires ou blanches (ou dans leur zone d'influence) elles sont *plutôt* noires ou *plutôt* blanches.

Un ensemble (par exemple celui des pierres noires) peut être mathématiquement défini par sa fonction caractéristique χ_A, valant 1 sur les points de l'ensemble et 0 autrement. Puisqu'on ne peut pas savoir de manière certaine si un point est blanc ou noir au cours d'une partie de go, au lieu d'une fonction caractéristique classique à valeurs dans $\{0,1\}$, on choisit de considérer une fonction à valeurs dans tout l'*intervalle* $[0,1]$. C'est un phénomène typique de l'imagerie, qui n'est pas sans rappeler les distributions de probabilités de la physique quantique : on obtient des notions floues, dont on peut décider à un instant donné de la couleur de chaque intersection par des seuils, à partir desquels on considère que la situation est tranchée, mais laissant un régime incertitude intermédiaire (et nécessaire, comme bien des parties de go le montrent).

On peut définir les fonctions ≪ caractéristiques ≫ de ces ensembles flous $\chi_A : E \to [0,1]$ par des lissages élémentaires, par exemple par convolution. On peut même en tirer une version floue de la théorie des ensembles, définissant l'inclusion, l'intersection, etc. en posant

$$\begin{aligned}
\chi_{\bar{A}} &= 1 - \chi_A \\
\chi_{A\cup B} &= \max(\chi_A, \chi_B) \\
\chi_{A\cap A} &= \min(\chi_A, \chi_B) \\
\chi_{A\times B}(x,y) &= \min(\chi_A(x), \chi_B(y))
\end{aligned}$$

et la notion d'inclusion $A \subseteq B$ par $\chi_A \leqslant \chi_B$. Que peuvent alors être les notions de cardinal, de distance, de voisinages ?

Le lecteur sera sans doute excité à l'idée de retrouver les propriétés habituelles de théorie des ensembles et de topologie dans ce formalisme plus vaste, et n'hésitera pas à se référer à [7] pour plonger plus profondément dans cette belle théorie (et débordera sans doute dans le domaine de la logique floue).

3.6. **Connexions entre pierres.** Ces notions floues peuvent s'appliquer comme précédemment aux questions de territoire et d'influence et ne manqueront pas de susciter des commentaires intéressants.

L'approche floue permet toutefois d'approcher un concept important du go qui n'a pas pu être pour le moment saisi par les notions introduites : celle de *connectivité*, aspect tactique — et parfois très local : un groupe de pierre pourrait-il être séparé d'un autre groupe de pierre par l'adversaire ? La plus ou moins forte relation de connexion entre deux groupes de pierres peut être défini par le degré de connexité introduit par Bouzy

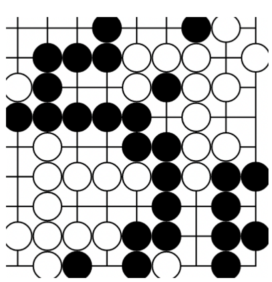
$$c_A(x,y) = \max_{\ell \in L(x,y)} \min_{z \in \ell} \chi_A(z)$$

où $L(x,y)$ indique l'ensemble des chemins allant de x à y sur le goban.

Si ces approches ne sont que des premiers pas dans la mathématisation du jeu, elles montrent tout le relief existant dans les notions d'influence et de territoire au go.

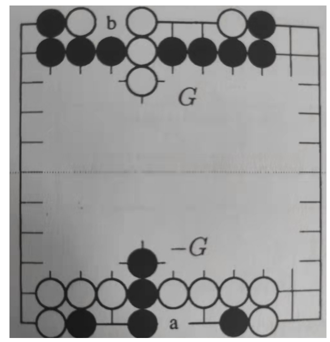
4. Yose et surréels

4.1. **Les fins de parties au go.** En fin de partie les questions d'influence, de vie et de mort, de connexion, etc. disparaissent grandement pour laisser place à une situation stable où seules les frontières restent à clôturer précisément. C'est le *yose*, où le souci du détail est capital pour trouver le coup le plus intéressant à jouer (pas forcément en terme de nombre de points seulement, mais aussi en prenant en compte l'initiative, le champs des possibles ouvert, etc.). Un exemple typique pourrait être la situation suivante :



Problème de yose : quel coup jouer en priorité ?

4.2. **Différence de jeux.** Conway [3] a développé des techniques nouvelles, et mathématiquement puissantes, pour analyser une grande classe de jeux (que l'on appelle *combinatoires*). La comparaison de positions peut par exemple se faire par la notion de *jeu de la différence*, que l'on n'introduira pas ici formellement mais qui s'illustre très bien sur un exemple représentatif du go et des situations de yose. Le jeu de la différence est une duplication du jeu en inversant les couleurs, formalisme inexistant au go et motivé par son analogue mathématique, ainsi :



Exemple de différence de jeux

Noir joue le coup *a* puis blanc joue en *b*. Si le même vainqueur se dégage quel que soit le joueur ayant le trait, alors le coup qu'il a joué en premier est le meilleur coup des deux. Dans l'exemple précédent le coup *a* est le meilleur, surprenant possiblement déjà de nombreux joueurs qui auraient sauté sur le sauvetage de la pierre avec *b*.

On voit ici déjà ce que les mathématiques peuvent apporter à cette notion, fugace sinon maladroite, d'initiative, qui ne peut pas se réduire aux seules notions de *sente* (conservant l'initiative) et *gote* (perdant l'initiative) et que les mathématiques suggèrent de dépasser.

4.3. **Les jeux combinatoires.** David Wolfe a travaillé à la mathématisation des fins de parties au go dans sa thèse et raffiné, avec le mathématicien Berlekamp [1], la théorie des jeux de Conway pour l'adapter au cadre du yose. L'essence de leur tâche est de réussir à embrasser dans un formalisme mathématique et calculatoire (une partie de) la subtilité des situations qui ne peuvent pas être réduites aux idées trop intuitives de *sente* et *gote*.

La théorie des jeux de Conway permet pour ainsi dire deux révolutions dans le monde des jeux combinatoires :

- considérer comme identiques des situations en apparence différentes ;
- rendre calculatoire des situations qui semblent d'un autre ordre.

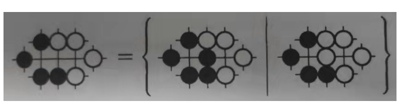
Ces révolutions sont synthétisées par Berlekamp : « le langage du go dans la littérature est simplement trop peu précis et riche pour permettre d'expliquer les idées » de cette théorie. Les concepts ainsi développés permettent d'encoder des informations permettant de déterminer à la fois l'issue optimale d'une (fin de) partie, mais également de donner l'ordre des coups à jouer.

En un mot, la théorie des jeux combinatoires s'intéresse aux jeux où le joueur n'ayant plus de coup possible perd (les joueurs sont donc incités à ne pas jouer : ce sont les jeux *froids*). Le jeu de go est un peu différent puisqu'il existe des points de territoire (de sorte que les joueurs sont incités à jouer : c'est un jeu *chaud*). Le yose ne concernant que les ultimes coups (qui ne semblent même pas valoir de points, ou qui ont tous la même valeur), il n'est pas impertinent d'ignorer la valeur de ces points. Au-delà de cette intuition, il existe une opération mathématique permettant de passer d'une situation à l'autre (à savoir les notions de *refroidissement* et de *réchauffement* du jeu, mais nous ne rentrerons pas dans ces détails thermiques que le lecteur sera heureux de découvrir et d'approfondir dans Conway [3]).

4.4. **Mathématiques des jeux.** Tâchons de donner un aperçu de ce qu'est cette mathématisation des jeux, menant à la théorie des *nombres surréels* de Conway. Un jeu G combinatoire est joué entre deux joueurs, gauche et droit, que l'on notera L et R, qui jouent alternativement et doivent avoir le dernier coup pour gagner, i.e. le joueur ne pouvant pas jouer perd (au go, il passe, et donne donc une pierre). Définissons un *jeu* (mathématique) par un couple de la forme

$$G = \left\{G^L|G^R\right\}$$

où G^L est l'ensemble des parties accessibles par un coup de L (encodant donc ses choix de coups et les situations en résultant) et G^R l'ensemble des issues possibles pour R. Par exemple au go, on pourrait avoir la situation



Représentation mathématique d'une situation

On peut définir des opérations formelles sur ces jeux comme

$$-G = \left\{-G^R| - G^L\right\},$$

qui est juste une formelle inversion des rôles (i.e. des couleurs au go), ainsi qu'une addition

$$G+H = \{(G^L+H)\cup(G+H^L) \mid (G^R+H)\cup(G+H^R)\},$$

qui revient à considérer deux parties G et H indépendantes (tels groupes « indépendants » sur le goban, situation courante yose) et chaque joueur peut donc choisir son coup dans l'une ou dans l'autre.

4.5. **Une nouvelle arithmétique.** Ces définitions formelles sont en fait mathématiquement profondes : les classes d'équivalences de jeux forment alors un groupe pour la loi $+$. Muni de cette opérations, ces nouveaux objets sont appelés *nombres surréels.* L'identité, élément neutre pour cette loi, est le jeu nul

$$0 := \{\varnothing|\varnothing\},$$

que le lecteur vérifiera déjà avec intérêt comme étant l'élément neutre du groupe : on a $G + 0 = G$ pour tout jeu G.

On peut alors définir avec ces seules notions de nouveaux éléments, récursivement, tels

$$1 := \{0|\varnothing\},$$
$$2 := \{1|\varnothing\},$$

et tous les entiers qui s'en suivent. On peut même introduire des « fractions »

$$\frac{1}{2} := \{0|1\},$$

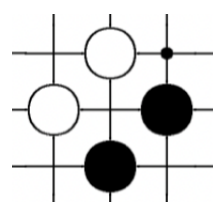
que le lecteur découvrira avec intérêt comme vérifiant l'identité $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Cette incroyable idée de Conway, purement formelle en apparence, se retrouve miraculeusement pertinente en deux aspects :

- elle recouvre entièrement l'arithmétique mathématique bien connue, ainsi (en tant qu'opération sur des nombres suréels, i.e. des jeux !)
$$\left(1 + \frac{13}{16}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{53}{32},$$
- elle modélise parfaitement les situations de fin de partie du jeu de go.

Mais d'autres éléments sont possibles, formellement, que ceux définis ci-dessus, ne correspondant à aucun nombre usuel. Ainsi, il est possible d'introduire

$$\star := \{0|0\}$$

qui n'est autre que le *dame*, point neutre du go.

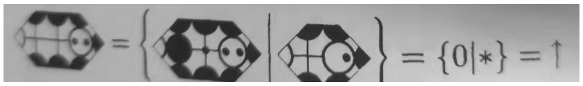


Un *dame*, point neutre au go, ou jeu formel $\star$

On peut construire d'autres « nombres » à partir de ces premiers éléments, tels

$$\uparrow := \{0|\star\}$$
$$\Uparrow := \uparrow + \uparrow$$

et bien d'autres symboles encore. Ces étranges nombres provenant d'une gymnastique purement formelle peuvent en fait se découvrir équivalents à de véritables positions de go. Ainsi,

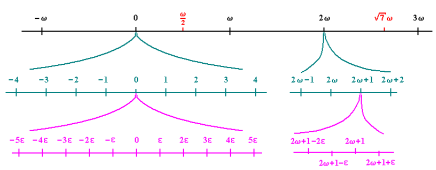


Une interprétation de $\uparrow$ (avec ≪ refroidissement ≫)

Quel est le sens ≪ numérique ≫ de ces jeux dans ce nouveau système de nombres ? Ils sont en fait *infinitésimaux*, supérieurs à tous les négatifs et inférieurs à tous les positifs, mais non nuls ! L'ordre devient *partiel*. Ainsi $\star$ ne peut pas être comparé à 0, il est à la fois positif et négatif alors que $\star + \star = 0$. Par contre $\uparrow$ est un infinitésimal positif et supérieur à $\star$, donnant lieu à toute une série

$$\uparrow, \uparrow, 2\uparrow, 3\uparrow, 4\uparrow, \dots, n\uparrow, \dots$$

On retrouve ainsi toute la richesse et l'arithmétique des nombres entiers dans ce nouvel ≪ univers ≫ des infinitésimaux, coincé entre 0 et tout nombre positif :



Une situation fort analogue aux transfinis de Cantor

Une arithmétique bien rodée et des algorithmes de simplification (comme ceux que nous aurions pour le système décimal, les polynômes etc.) mènent à des calculs moins immédiats, tels

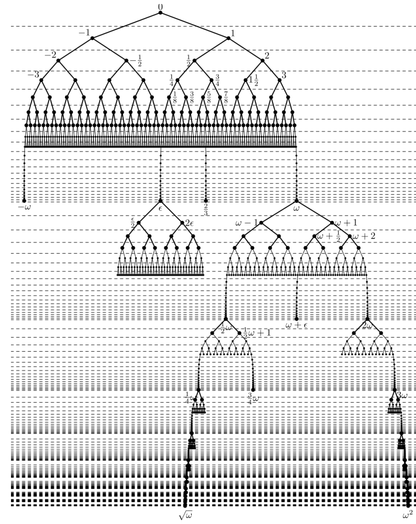
$$\left\{ \frac{5}{8} \middle| \frac{15}{16} \right\} = \frac{3}{4}$$

ou encore avec des infinitésimaux

$$\star + \uparrow \star + \downarrow + \uparrow \star = \uparrow \star$$

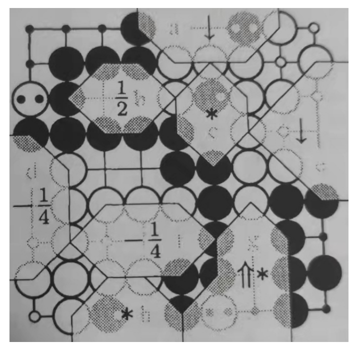
On a ainsi construit une belle théorie mathématique englobant l'arithmétique classique et allant bien plus loin... que l'on va voir tisser d'improbables équivalences avec les situations du yose.

4.6. **Résoudre des problèmes de yose.** La théorie des nombres suréels ainsi développée nous arme face aux problèmes de yose. Voici la méthode à suivre : déterminer les valeurs de chaque composante locale (chaque ≪ groupe ≫ au sens du go), les sommer puis arrondir les infinitésimaux à l'entier le plus proche (vers le joueur dont c'est le tour) pour déterminer le vainqueur (donné par le signe). C'est avec cette méthode que Berlekamp a pu battre, sur des situations de fin de partie, des professionnels Japonais au rang maximal de 9 dan, étant capable d'évaluer plus



Vision de la construction des suréels

finement l'ordre des coups à jouer, dépassant tant l'intuition et l'expérience des professionnels, ainsi que leurs notions trop grossières de *sente* et de *gote*.



Résolution du problème initial et valeur des coups

La solution se découvre alors par simple somme des valeurs des groupes ci-dessus, déterminées par les tables de correspondance de Berlekamp :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \downarrow + \downarrow + \Uparrow + \star + \star = \star$$

Les mathématiques ont ainsi amené un degré d'abstraction qui peut sembler malvenu, mais qui a permis à terme de rendre les fins de partie de go purement calculatoires.

Cette situation n'est que réminiscente de l'écart qu'il peut y avoir entre intuition et formalisme, qui n'endigue en rien leur puissance. Ainsi les nombres négatifs, rationnels, irrationnels ou imaginaires ont tous traversé leurs âges sombres, parias hors du royaume des nombres, mais ont chacun permis de résoudre d'improbables problèmes (avec des solutions bien palpables, ainsi pour les résolutions algébriques de

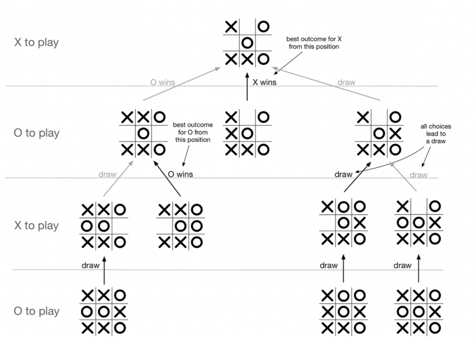
Cardan utilisant les imaginaires) leur donnant petit à petit droit de cité dans les mathématiques. Les surréels traversent ainsi les mêmes épreuves épistémologiques.

5. Méthodes de Monte-Carlo

S'attaquer aux activités humaines par ordinateur, notamment à ses jeux discrets et stratégiques, a ouvert un nouvel univers des possibles, s'appuyant sur leur mémoire, leur puissance et leur précision supérieures. Si des jeux tels les dames, les échecs ou le backgammon ont vu leurs meilleurs champions surpassés par des programmes fondés sur l'exploration d'arbres, le jeu de go a exigé de pousser les méthodes plus loin encore.

5.1. **Exploration d'arbres.**

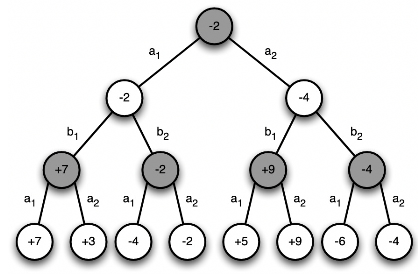
Une première approche, entièrement fondée sur la puissance d'apparence phénoménale des ordinateurs est celle de la recherche arborescente exhaustive : on explore toutes les séquences possibles à partir d'une situation donnée puis, une fois une position finale gagnante déterminée, on remonte la séquence concernée jusqu'à déterminer le coup à jouer dans la situation initiale. Cette approche est naturellement modélisée par un *arbre* dont les nœuds sont les états possibles du jeu, dont la racine est l'état initial du jeu et où deux nœuds sont reliés lorsqu'il est possible de passer de l'un à l'autre par un coup.



Exploration d'un arbre de morpion

5.2. **Minimax.**

En définissant une fonction d'évaluation $\nu^\star$, donnant une « valeur » à chaque position (par exemple 1 si noir gagne et -1 si blanc gagne), il suffit d'observer les valeurs de $\nu^\star$ aux *feuilles*, états finaux du jeu, sélectionner une valeur optimale et remonter le long de la branche jusqu'à la situation actuelle pour choisir le meilleur coup. Les joueurs agissant ainsi alternativement, donnant lieu à l'algorithme du *minimax* :



Algorithme du minimax

Si une telle approche fonctionne à merveille avec des jeux combinatoires de petites tailles, ainsi le morpion, il est déjà plus difficile de l'utiliser aux échecs et encore moins au go. En effet, l'arbre d'un jeu a une taille exponentielle et ne peut pas être exhaustivement exploré en pratique (voir la partie sur la complexité combinatoire du go). Deux parades ont été trouvées pour contourner cette explosion combinatoire :

- Limiter la profondeur d'exploration, remplaçant tout le sous-arbre partant d'un nœud s donné par une fonction d'évaluation $\nu(s) \approx \nu^\star(s)$.
- Choisir les branches à explorer, en sélectionnant les coups aléatoirement à partir du nœud s , selon une probabilité $\mathbb{P}(\cdot|s)$ qui définit la stratégie d'exploration.

Si la première méthode a été utilisée pour s'attaquer au jeu d'échecs et venir à bouts des plus grand champions, elle se heurte à deux difficultés au go :

- Une pierre jouée en début de partie peut avoir un effet une centaine de coups plus tard, rendant la troncature peut-être aveugle à des mécaniques fondamentales.
- Aucune fonction d'évaluation pertinente et rapide à calculer n'est connue tant que la partie n'est pas finie, contrairement aux échecs (où les pièces restantes ont des valeurs donnant une idée de l'équilibre des forces).

5.3. **Méthode de Monte-Carlo.**

C'est Brügmann qui écrit en 1993 le premier programme de go fondé sur la seconde méthode. Bruno Bouzy [2], Tristan Cazenave et Bernard Helmstetter [8], au cours de leurs thèses, poursuivent l'exploration de cette approche, qui a été la clé pour aborder le jeu de go avec une efficacité révolutionnaire : c'est la *méthode de Monte-Carlo*.

Jusqu'en 2007, les meilleurs programmes de go peinaient à atteindre un niveau amateur de 10 kyu faute d'avoir une fonction d'évaluation permettant de tronquer la profondeur efficacement. Pour réussir à définir une fonction d'évaluation ν approchant raisonnablement la fonction optimale $\nu^\star$, une option est d'introduire une *stratégie* de jeu et d'essayer *quelques* coups possibles. La valeur d'un coup est alors déterminée en menant le jeu à son terme en suivant cette stratégie après les coups choisis, et en moyennant les résultats obtenus : il s'agit d'une approche par *simulations*. Cette approche donne souvent des évaluations raisonnables même avec des stratégies assez élémentaires, mais peut mener à des erreurs de jugement systématiques dans certains cas.

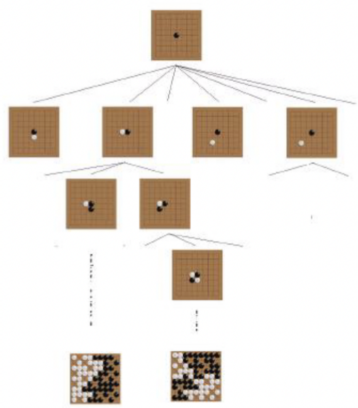
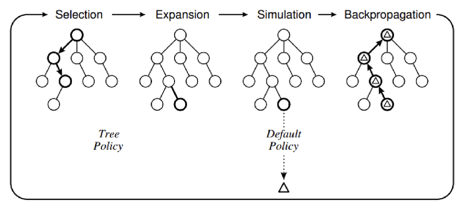


Schéma d'évaluation de type Monte-Carlo : seules quelques branches sont explorées jusqu'à leur terme, et déterminent la valeur du nœud

La méthode de Monte-Carlo introduit donc une dose d'aléatoire dans la stratégie utilisée : plutôt que d'avoir une stratégie entièrement déterministe, avec des défauts potentiels, suffisamment de simulations sont effectuées sur des choix aléatoires de coups, aboutissant à une estimation *moyenne* de la valeur du coup. Cette idée maîtresse, au cœur du programme MoGo, permet de ne jouer qu'un petit nombre de parties (grand comparé aux humains, mais bien loin de l'exploration de toutes les parties possibles), permettant de donner un jugement heuristique des positions : seules les meilleures continueront d'être explorées, menant à une exploration en profondeur très asymétrisée par l'heuristique. On pourra consulter [5] pour une présentation plus détaillée de ces belles idées.

5.4. **Méthode MCTS.** Une méthode raffinée, utilisant l'efficacité de la méthode Monte-Carlo et l'exhaustivité de l'exploration d'arbres, est la *Monte-Carlo Tree Search* (MCTS), développée par Rémi Coulom [4]. Il s'agit de suivre l'approche d'exploration des arbres, mais non plus avec une fonction d'évaluation définie a priori ou par exploration exhaustive, mais donnée par des simulations de type Monte-Carlo. Un arbre des situations du jeu sera donc itérativement construit.

Lors de chaque simulation, les parties de l'arbre déjà visitées permettent de prendre des décisions plus éclairées : les nœuds fils ont déjà des valeurs et permettent de choisir les meilleurs coups ; puis lorsque l'exploration dépasse les nœuds déjà construits, une méthode Monte-Carlo est employée, permettant de faire le choix final et de mettre à jour l'arbre avec de nouveaux nœuds et de nouvelles valeurs.



Stratégie d'exploration

La nécessité d'une telle heuristique pose alors la question du dilemme entre *exploitation* (des heuristiques déjà efficaces, de sorte que les branches aux plus hauts potentiels soient visitées en profondeur) et l'*exploration* (de nouvelles stratégies possibles, permettant de découvrir des voies potentiellement plus efficaces que celles favorisées par les heuristiques à un instant donné), demandant une fine optimisation.

Cette *stochastisation* (le fait d'introduire une dose d'aléatoire dans une situation a priori déterministe) a ainsi apporté une lumière nouvelle sur les méthodes algorithmiques et mené des programmes tels Crazy Stones à vaincre des joueurs professionnels pour la première fois, atteignant des niveaux d'environ 5 dan.

6. Apprentissage profond et AlphaGo

6.1. **Victoire de la machine.** Si le go est resté jusque très récemment l'archétype du jeu inaccessible aux ordinateurs, le programme *AlphaGo* développé par Google et sa filiale DeepMind a finalement battu les meilleurs joueurs professionnels en 2017, révolutionnant le domaine de l'intelligence artificielle comme le monde du go, amenant les algorithmes à un niveau de maturité que beaucoup estimaient ne pas voir de leur vivant. Si cette nouvelle approche est extrêmement bien documentée, nous en proposons toutefois un bref aperçu.

6.2. **Réseaux de neurones.** Les *réseaux de neurones* sont des structures inspirées par le cerveau humain, constituées de « neurones » entrelacés. Certaines des grandes caractéristiques de ces réseaux, comparés aux approches précédentes, sont leur capacité d'apprentissage et leur capacité à traiter des variables sans supposer de structure particulière (contrairement aux statistiques classiques).

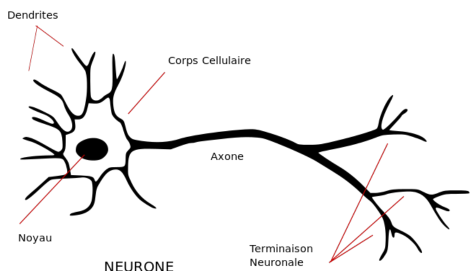


Schéma d'un neurone biologique

Les neurones (biologiques) sont des fonctions qui reçoivent des signaux d'entrée (par les dendrites) provenant d'autres neurones, les transforment (par le corps cellulaire), renvoient des signaux de sortie (par les axones) à travers un canal (les synapses). Un aspect fondamental est que tous les signaux reçus ne sont pas considérés avec le même poids. Les neurones formels informatiques s'inspirent de ce schéma et vivent au sein d'un réseau pondéré et fortement interconnecté. Chaque neurone (formel) est une fonction, renvoyant un signal de sortie qui est égal à une moyenne (pondérée !) des signaux d'entrée, filtrant éventuellement certaines variations trop importantes.

Nous ne considérerons que des réseaux à *couches*, où chaque neurone d'une couche n'est connecté à aucun autre neurone au sein de cette couche, mais est connecté à tous les neurones de la couche suivante. Lorsque le réseau a d'autres couches que celles d'entrée et de sortie, il est dit *profond*.

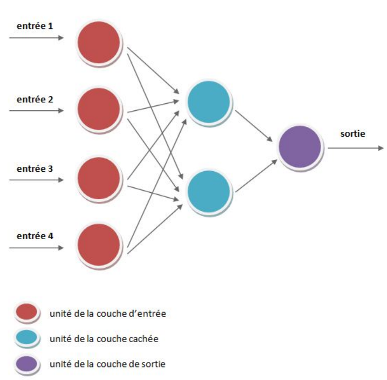


Schéma d'un réseau de neurones (profond) à couches

La détermination de la structure de réseau adaptée à un problème donné, avec ses choix de couches, de fonctions et de poids, est un problème difficile nécessitant de nombreuses expérimentations. L'objectif fondamental demeure d'approcher efficacement la fonction d'évaluation optimale $\nu^\star$ des situations de jeu, et les fonctions données par les réseaux de neurones permettent justement de le faire, au moins théoriquement. Plusieurs résultats (ainsi le théorème de Hanin-Sellke en 2017) permettent d'approcher uniformément les fonctions continues sur un compact (en dimension finie) par certains réseaux de neurones, avec un contrôle sur la complexité nécessaire du réseau : l'objectif est de réussir à rendre effectifs de tels théorèmes pour la fonction d'évaluation $\nu^\star$.

La caractéristique centrale de ces réseaux de neurones est leur capacité d'*apprentissage* : le comportement du réseau est régulièrement modifié pour qu'il converge vers le comportement voulu. Cet apprentissage revient à faire évoluer les poids des connexions entre les neurones, les optimisant à chaque entraînement, et de nombreuses modalités d'apprentissage sont possibles.

6.3. **Stratégie d'AlphaGo.** AlphaGo utilise un réseau de neurones profond prenant en entrée l'état actuel s du goban, renvoyant en sortie une distribution de probabilités $\mathbb{P}(\cdot|s)$, modélisant la stratégie des coups à explorer, et une valeur $\nu(s)$ d'évaluation de l'état, approchant idéalement la fonction d'évaluation idéale $\nu^\star$ introduite plus haut.

Ce réseau est alors *entraîné* en jouant contre lui-même selon deux modalités : à chaque position, une recherche de type Monte-Carlo est réalisée, soit guidée par le réseau de neurones (donnant une évaluation $\nu(s)$) soit par un choix aléatoire et une stratégie « par défaut » (menant la partie jusqu'à son terme et donnant une évaluation $z \in \{\pm 1\}$ en fonction de la victoire ou la défaite). Le réseau de neurones est alors mis à jour : les poids du réseau évoluent par une méthode de descente de gradient en minimisant une fonctionnelle de la forme

$$\sum_{t=1}^{N} \alpha_t (v(s_t) - z_t)^2$$

qui évalue l'écart entre les évaluations prévues par le réseau et les résultats effectivement observées.

Ce réseau de neurones mis à jour sera dorénavant utilisé, jusqu'à l'itération suivante. Mathématiquement, l'essence apparaît donc comme une minimisation de fonctionnelles de type régression linéaire. La plus grande différence avec une simple régression est l'impact considérablement complexe de la modification des poids : dans un réseau de neurones, un tel changement provoque un bouleversement en cascade du comportement de tout le réseau.

L'incroyable beauté mathématique de ces approximations fonctionnelles n'est donc pas seulement théorique, et les défis de pure puissance informatique ont poussé les chercheurs à développer une approche incroyablement plus efficace : là où les meilleurs programmes joueurs d'échecs simulaient 10^7 coups environ à chaque décision, AlphaGo Zero n'en simule qu'environ 10^4 malgré la complexité combinatoire bien supérieure du jeu de go (mais chacune de ces simulations demande toutefois une puissance incroyablement plus élevée) !

7. Conclusion

Au cours de ce petit voyage nous nous sommes arrêtés sur plusieurs planètes, chacune habitée de ses espèces singulières, apportant ses richesses et s'enrichissant de notre passage, tantôt de joueur de go, tantôt de mathématicien. Nous espérons avoir suscité l'envie d'en découvrir plus et de se prendre au jeu... de go comme des mathématiques !

Remerciements

Je tiens à remercier Rémi Coulom, Pierre Lesesvre, Luc Pellissier, Jean Michel et Jill-Jênn Vie pour de nombreuses discussions ayant fait mûrir la justesse et la richesse de ce panorama bien au-delà de ce que ma culture et ma compétence auraient permis.

Références

[1] Berlekamp, E. et Wolfe, D. (1994) *Mathematical Go Endgames : Nightmares for Professional Go Players*, Ishi Press International.

[2] Bouzy, B. (1995) *Modelisation cognitive du joueur de go*, Thèse de l'Université Paris 6.

[3] Conway, J. H. (2001) *On Numbers and Games*, CRC Press.

[4] Coulom, R. (2006) *Efficient selectivity and backup operators in Monte-Carlo tree search*, in 5th Int. Conf. Computers and Games, 72–83.

[5] Coulom, R. (2009) *Le jeu de go et la révolution de Monte Carlo*, Interstices.

[6] Gelly, S. et al. (2012) *The Grand Challenge of Computer Go : Monte Carlo Tree Search and Extensions*, Communications of the ACM Association for Computing Machinery 55 :106-113.

[7] Godjevac, J. (1999) *Idées nettes sur la logique floue*, PPUR.

[8] Helmstetter, B. (2007) *Analyses de dépendances et méthodes de Monte-Carlo dans les jeux de réflexion*, thèse de l'Université Paris 8.

[9] Mercier, D.-J. (2013) *Jeu de go et mathématiques : géométrie, influence et territoire*, CreateSpace Independent Publishing.

[10] Papineau, E. (2000) *La culture arrogante du go. Le weiqi, une façon chinoise de voir le monde*, Perspectives Chinoises. 62 :45-56

[11] Silver, D. et al. (2016) *Mastering the game of Go without human knowledge*, Nature 550 :354–359.

[12] Tromp, J. (2016) *The Number of Legal Go Positions* in ≪ Computers and Games ≫, Springer.

[13] Tromp, J. et Farnebäck, G. (2006) *Combinatorics of Go* in ≪ Computers and Games ≫, Springer.

[14] Walraet, M. et Tromp, J. (2016) *A Googolplex of Go Games.* in ≪ Computers and Games ≫, Springer.

[15] Zobrist, B. (2011) *Ultra-slow water diffusion in aqueous sucrose glasses* , Phys. Chem. Chem. Phys. 13 :3514-3526.