INTRODUCTION À LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG

DIDIER LESESVRE

Table des matières

Introduction

La formule des traces fournit une égalité analytique entre quantités géométriques (invariants par conjugaison) et quantités spectrales (traces d'opérateurs), de la forme

$$J_{spec} = J_{geom}$$

L'idée assez générale de la formule des traces permet d'en donner plusieurs formulations en fonction de la généralité dans laquelle on se place. De telles formules de traces permettent notamment :

- ⋆ de tirer des informations géométriques ou spectrales à partir d'informations sur l'autre type de quantités pour un groupe fixé (loi de Weyl, théorème des géodésiques premières)
- ⋆ de comparer différents groupes en comparant leurs formules des traces (résultats de fonctorialité, comme la correspondance de Jacquet-Langlands)

Ici nous traitons notamment le cas général compact, en indiquant les chemins à suivre pour obtenir une formule des traces dans le cadre non compact, en mentionnant le résultat plus explicite que l'on obtient dans le cas de $SL(2, \mathbf{R})$, et en citant quelques applications. Les calculs sont évités tant que possible pour donner une idée claire du fonctionnement des arguments et de la démarche, le détail se trouvant dans les références classiques citées.

1. La décomposition de la représentation régulière droite

H est un groupe topologique localement compact muni d'une mesure de Haar, Γ un sous-groupe discret de H. Notons R la représentation régulière droite de G sur $L^2(\Gamma\backslash H)$, *i.e.* sur les fonctions Γ-automorphes de carré intégrable :

$$\begin{array}{rcccc} R & : & H & \longrightarrow & GL(L^2(\Gamma\backslash H)) \\ & & h & \longmapsto & (R(h) = R_h : \phi \mapsto \phi(\cdot h)) \end{array} \qquad i.e. \qquad [h \cdot \phi](x) = \phi(xh)$$

La représentation R se décompose en somme directe de représentations irréductibles unitaires, notre objectif est de comprendre cette décomposition. Au lieu d'étudier la décomposition R directement, nous étudions ses moyennes contre des fonctions-test, en définissant

$$\forall f \in C_c(H),\ R(f) := \int_H f(y)R(y)dy \qquad i.e. \qquad [f \cdot \phi](x) = \int_H f(y)\phi(xy)dy$$

Received by the editors 9 mai 2015.

La Γ-automorphie des fonctions considérées permet de voir $R(f)$ comme un opérateur intégral à noyau :

$$\forall f \in C_c(H),\ \forall x \in H,\ R_f\phi(x) = K_\Gamma^f(x,\cdot) \star \phi \quad \text{où} \quad K_\Gamma^f(x,y) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)$$

Preuve. Cela vient directement du découpage en classes à gauche modulo Γ, démarche naturelle car ϕ est bien une fonction sur les Γ-classes à gauche :

$$\begin{aligned} R_f\phi(x) &= \int_H f(y)\phi(xy)dy = \int_H f(x^{-1}y)\phi(y)dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash H} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)\phi(\gamma y)dy = \int_{\Gamma\backslash H} K_\Gamma^f(x,y)\phi(y)dy \\ &= K_\Gamma^f(x,\cdot)\star\phi \end{aligned}$$

De plus, la somme est finie par compacité du support de f, puisque $f(x^{-1}\gamma y) \neq 0$ équivaut à $\gamma \in x\, supp(f) y^{-1} \cap \Gamma$ qui est compact (l'action est topologique) et discret (sous-groupe du discret Γ), partant fini. □

Le problème se ramène donc à l'étude d'un opérateur à noyau.

2. Le cadre compact

Dans le cas où Γ est cocompact dans H, *i.e.* que le quotient $\Gamma\backslash H$ est compact, deux propriétés font que le calcul de la trace est particulièrement aisé :

- ⋆ R_f est un opérateur de Hilbert-Schmidt puisque K_Γ^f est continu et donc L^2 ; sa décomposition est donc discrète et de multiplicités finies
- ⋆ R_f est un opérateur à noyau lisse sur un compact, donc est à trace pour de bonnes fonctions f, et sa trace est donnée par $\mathrm{tr}R_f = \int_{\Gamma\backslash H} K(x,x)dx$

Comprendre la trace de R_f revient donc essentiellement à bien comprendre le noyau automorphe K. D'un côté, en découpant par classes de conjugaison, il vient

$$\begin{aligned} trR_f &= \int_{\Gamma\backslash H} K(x,x)dx = \int_{\Gamma\backslash H} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx \\ &= \int_{\Gamma\backslash H} \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \sum_{\delta\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} f(x^{-1}(\delta^{-1}\gamma\delta)x)dx = \int_{\Gamma\backslash H} \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \sum_{\delta\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx \\ &= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \int_{\Gamma_\gamma\backslash H} f(x^{-1}\gamma x)dx = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \int_{\Gamma_\gamma\backslash H_\gamma} \int_{H_\gamma\backslash H} f(x^{-1}(u^{-1}\gamma u)x)dudx \\ &= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash H) \int_{H_\gamma\backslash H} f(x^{-1}\gamma x)dx =: J_{geom} \end{aligned}$$

ces dernières intégrales sont appelées intégrales orbitales. D'un autre côté, la décomposition spectrale

$$R_f = \bigoplus_{\pi\in\widehat{L^2(\Gamma\backslash H)}} \pi^{m_R(\pi)} \quad \text{donne} \quad \mathrm{tr}R_f = \sum_{\pi\in\widehat{L^2(\Gamma\backslash H)}} m_R(\pi)\mathrm{tr}\pi =: J_{spec}$$

Ce qui donne la forme générale de la formule des traces, appelée parfois formule de prétrace, dans le cas compact :

$$J_{geom} = \sum_\gamma a_\gamma^H(\gamma) f_H(\gamma) = \sum_\pi a_\Gamma^H(\pi) f_H(\pi) = J_{spec}$$

On obtient ainsi une relation entre deux quantités d'interprétations différentes, qui porte ses fruits dans de nombreux cadres où chaque quantité est plus précisément accessible.

3. Un exemple classique : le tore et la formule de Poisson

Prenons la cas commutatif cocompact $H = \mathbf{R}$, $\Gamma = \mathbf{Z}$. Le dual unitaire de $L^2(\mathbf{Z}\backslash\mathbf{R} \cong S^1)$ est $(e_\lambda)_{\lambda\in 2i\pi\mathbf{Z}}$. C'est l'univers des séries de Fourier. Dans ce cas, les classes de conjugaisons sont toutes triviales et la partie géométrique est simplement

$$J_{geom} = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash H_\gamma) f(\gamma) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)$$

Du côté spectral, puisque $R(f)e_n = \widehat{f}(-n)e_n$, il s'agit de

$$J_{spec} = \sum_\pi m_R(\pi)\mathrm{tr}\pi(f) = \sum_n \int_{\mathbf{R}} f(y)e_n(y)dy = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n)$$

Et on retrouve la formule de Poisson

$$\forall f \in L^2(\mathbf{Z}\backslash\mathbf{R}), \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n)$$

4. Extension au cas non-cocompact

Dans le cadre non-cocompact, nous perdons les deux avantages caractéristiques de la compacité : l'intégrale diagonale définissant formellement la trace peut ne plus converger, et il peut exister une partie continue du spectre. La solution proposée par Selberg est de travailler sur un domaine tronqué de sorte à être compact, disons $F(Y)$, où Y est un paramètre de troncature. L'étude de

$$\mathrm{tr}^Y K := \int_{F(Y)} K(z,z)d\mu(z)$$

mène à deux estimations :

- ⋆ du côté spectral, $\mathrm{tr}^Y K \sim_{Y\infty} A_1 \log Y + B_1$
- ⋆ du côté géométrique, $\mathrm{tr}^Y K \sim_{Y\infty} A_2 \log Y + B_2$

L'identification $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$ donne ladite formule des traces dans le cas non-cocompact. Dans ce cas plus général, nous obtenons donc encore une relation entre quantités spectrales et quantités géométriques.

5. Le cas de $SL(2, \mathbf{R})$

Lorsque le groupe G est assez bien compris géométriquement, il est possible de préciser les intégrales orbitales dans la formule des traces de Selberg. La signification géométrique est encapsulée dans les classes de conjugaison des éléments, et l'intégrale orbitale se réduit à l'intégrale d'un domaine fondamental souvent assez simple, de paramétrage connu. Dans le cas de $SL(2, \mathbf{R})$, il y a quatre types de classes de conjugaison :

- ⋆ l'identité
- ⋆ les hyperboliques
- ⋆ les paraboliques
- ⋆ les elliptiques

Les calculs précis pour chaque classe sont effectués dans [Iwaniec, 2002, ch. 10], et donnent une formule de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h(r_k) = \frac{A(\Gamma_0(N))}{4\pi} G_{id} + \sum_{t=0,1} \frac{E'(t,\Gamma_0(N))}{2m_t} G_{ellipt}(t) + \sum_{t=3}^{+\infty} E'(t,\Gamma_0(N))\, G_{hyp}(t) + 2^{\omega(N)} G_{cont} + 2^{\omega(N)} G_{parab}$$

6. Quelques applications

6.1. **La fonctorialité de Jacquet-Langlands.** Nous comparons deux cadres, à savoir $G' = D^\star$ et $\Gamma' = \Gamma_O$ où D est une algèbre de quaternions à division ; et $G = SL(2, \mathbf{R})$ et $\Gamma = \Gamma_0(N)$. Les deux spectres n'ont a priori rien à voir, toutefois il est possible de remarquer une forte relation entre leurs formules des traces de Selberg respectives :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h(r_k) = \frac{A(\Gamma)}{4\pi} G_{id} + \sum_{t=0,1} \frac{E'(t,\Gamma)}{2m_t} G_{ellipt}(t) + \sum_{t=3}^{+\infty} E'(t,\Gamma)\, G_{hyp}(t) + 2^{\omega(N)} G_{cont} + 2^{\omega(N)} G_{parab}$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} h(r_k) = \frac{A(\Gamma')}{4\pi} G_{id} + \sum_{t=0,1} \frac{E'(t,\Gamma')}{2m_t} G_{ellipt}(t)$$

Terme à terme, pour chaque quantité $X \in \{A, E'(t,\cdot), 2^\omega\}$, on prouve que

$$X(\Gamma_O) = \sum_{m \mid d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) X(\Gamma_0(m)) \quad \text{où} \quad \beta = \mu \star \mu = \tau^{-1}$$

Ce qui permet de prouver la correspondance distributionnelle de Jacquet-Langlands pour $SL(2, \mathbf{R})$:

Théorème 6.1 (Correspondance globale de Jacquet-Langlands). *Pour de bonnes fonctions-test h, on a*

$$\sum_{f_k \in L^2(\Gamma_O \backslash \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus C_{prim}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k)$$

On en tire, en approchant la fonction de sélection δ_λ pour h,

Théorème 6.2 (correspondance de Jacquet-Langlands). *L'ensemble des valeurs propres non nulles et comptées avec multiplicités du laplacien hyperbolique dans $L^2(\Gamma_O \backslash \mathcal{H})$ est égal à l'ensemble des valeurs propres comptées avec multiplicités associées aux formes de Maaß primitives dans $L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})$. Autrement dit, le spectre non nul des surfaces arithmétiques quaternioniques est exactement le spectre primitif parabolique des surfaces de congruence. En particulier, on a l'inclusion spectrale :*

$$Sp\left(\Delta_{\mathcal{H}}, L^2(\Gamma_O \backslash \mathcal{H})\right) \subseteq Sp\left(\Delta_{\mathcal{H}}, L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})\right)$$

Remarque. Cette version de la correspondance de Jacquet-Langlands est plus faible que la version originale, de [**?**, **?**]. En effet, il existe non seulement une correspondance entre les valeurs propres du laplacien hyperbolique dans $L^2(Y_{a,b})$ et certaines valeurs propres dans $L^2(Y_0(N))$, mais la correspondance est encore vraie pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke, [Bolte and Johansson, 1999, théorème 5.2]. Le résultat est encore meilleur qu'on ne le croit : Bolte et Johansson [**?**] ont mis au point une construction intégrale explicite qui donne des fonctions propres du laplacien dans $L^2(Y_0(N))$ à partir de fonctions propres du laplacien dans $L^2(Y_{a,b})$.

6.2. **Autres applications.** En choisissant f de sorte que le côté géométrique approche le nombre $g(N)$ de géodésiques fermées de longueur au plus N sur une surface X, typiquement de sorte à sélectionner des traces bornées, et en faisant une étude précise du côté spectral mieux connu, on arrive à écrire un développement asymptotique de $g(N)$. C'est le théorème des géodésiques premières :

$$g(N) \sim_{N\infty} \frac{N}{\log(N)}$$

En choisissant f de sorte que le côté spectral approche le nombre $h(N)$ de valeurs propres inférieures à N de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X, typiquement une approximation du créneau $f = \mathbf{1}_{[0,N]}$, et une analyse du côté géométrique associé, donne un développement asymptotique de $h(N)$. C'est la loi de Weyl :

$$h(N) \sim_{N\infty} \frac{A(\Gamma\backslash\mathcal{H})}{4\pi} N$$

Commentaires bibliographiques

[Arthur, 2005] pour une vaste étude, [Iwaniec, 2002] pour le cas non compact dans le cas de SL(2).

Références

[Arthur, 2005] Arthur, J. (2005). *« An Introduction to th Trace Formula » in Harmonic Analysis, the Trace Formula, and Shimura Varieties*.

[Bolte and Johansson, 1999] Bolte, J. and Johansson, S. (1999). A spectral correspondence for maass waveforms. *Geom. func. Anal.*

[Iwaniec, 2002] Iwaniec, H. (2002). *Spectral Methods of Automorphic Forms*.