

Autour de la correspondance de Jacquet-Langlands

Didier LESEVRE

Table des matières

Avant-propos	4
Introduction	5
1 Le paysage : géométrie hyperbolique et groupes fuchsien	7
1.1 Géométrie hyperbolique	7
1.1.1 Le plan hyperbolique et ses modèles	7
1.1.2 Isométries	8
1.1.3 Géodésiques	9
1.2 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ et transformations homographiques	11
1.2.1 Quelques propriétés	11
1.2.2 Classification des transformations	11
1.2.3 Centralisateurs et stabilisateurs	12
1.3 Des généralisations	13
1.4 Groupes fuchsien et groupes modulaires	14
1.4.1 Groupes fuchsien	14
1.4.2 Le groupe modulaire et ses sous-groupes de congruence	17
1.4.3 Cocompacité, cofinitude et pointes d'un groupe fuchsien	20
2 Formes automorphes pour GL_2 sur \mathbf{Q}	23
2.1 Fonctions et formes automorphes	23
2.2 Les opérateurs de Hecke	28
2.3 Formes de Maaß	29
2.4 Formes automorphes et représentations	31
3 Un peu de théorie spectrale	32
3.1 La décomposition spectrale du laplacien	32
3.2 Un spectre discret sur \mathcal{C}	35
3.3 Un spectre continu sur \mathcal{E}	38
3.4 La transformation de Eisenstein	39
3.5 La décomposition spectrale sur \mathcal{E}	41
3.6 Théorèmes spectraux pour les formes automorphes	42
4 La correspondance de Jacquet-Langlands	43
4.1 Formulation	43
4.1.1 L'égalité distributionnelle des spectres	44
4.1.2 La correspondance de Jacquet-Langlands	52
4.2 La conjecture de Selberg	53
5 Formules des traces	54
5.1 Idées de la formule des traces & formule de prétrace	54
5.2 Analogie avec le cas réel	57
5.3 La partie spectrale compacte, purement discrète	58
5.3.1 L'identité	58
5.3.2 Contribution des éléments hyperboliques	58
5.3.3 La formule des traces	60
5.4 Une formule des traces plus générale pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$	60

5.4.1	Une partie spectrale continue	61
5.4.2	Les termes paraboliques	62
5.4.3	Les termes elliptiques	64
5.4.4	La formule des traces	65
5.5	Applications	65
5.5.1	La loi de Weyl	66
5.5.2	Le théorème des géodésiques premières	66
5.5.3	Application à la correspondance de Jacquet-Langlands	67
6	Algèbres de quaternions et plongements optimaux	68
6.1	Les algèbres de quaternions	68
6.1.1	Résultats généraux	68
6.1.2	Les quaternions et leurs surfaces arithmétiques associées	70
6.1.3	Premiers résultats sur les rapports local-global	71
6.2	Ordres d'algèbres de quaternions	71
6.2.1	Le cas particulier des extensions quadratiques	72
6.2.2	Plongements optimaux d'ordres	73
6.2.3	Dénombrement des plongements optimaux	73
7	Le cadre adélique et les généralisations	76
7.1	Motivations	76
7.2	Les adèles en général	77
7.2.1	Définitions élémentaires	77
7.2.2	Les résultats d'approximation et de décomposition	78
7.3	Une construction plus manuelle des formes automorphes	79
7.4	Adélisation des formes automorphes	80
A	Annexes	81
A.1	Transformations intégrales et inversions	81
A.2	Convolution	81
A.3	Théorie spectrale	82
	Références bibliographiques	83

Avant-propos

En commençant à lire le livre de Nicolas Bergeron, c'était tout un univers inconnu qui s'ouvrait à moi. Le but, c'était la correspondance de Jacquet-Langlands. Les outils, eux, étaient légion : espace hyperbolique, géométrie des groupes, fonctions de réseaux, théorie spectrale, formes automorphes, formules des traces, algèbres de quaternions, représentations et anneaux adéliques. Et ce n'est ni pour avoir voulu en faire trop, ni pour avoir cherché à tout comprendre – loin de là! Dès lors, comment approfondir certains de ces beaux domaines, alors que la quête première semble incertaine à accomplir? Il fallait s'y résigner, je devais faire des impasses, admettre des résultats, utiliser des objets peu maîtrisés : j'y reviendrai plus tard, pour mieux comprendre les outils, pour mieux cerner les généralisations possibles, et aussi pour aller plus loin, au-delà de Jacquet-Langlands. Bien que le livre était des plus agréables et suffisamment autocontenu pour que je ne m'y perde pas totalement, c'était un cheminement tortueux au sein d'une forêt dont on visait le coeur sans pouvoir s'arrêter en chemin pour admirer les clairières.

J'arrivais donc en terre étrangère, mais rapidement elle me passionnait déjà. La difficulté des théories et la nouveauté de bien des concepts n'a pas effacé l'intérêt pour les résultats et pour les objets, ni surtout leur grande diversité. Malheureusement il a fallu faire avec d'autres entraves, et de nombreux autres cours n'ont pas permis de m'y atteler à plein temps, mais avec de bons conseils et une étude commencée assez tôt, elle a pu avancer honnêtement. En allant doucement vers la preuve dans le cadre classique, je découvrais bien des livres, et aussi, un peu, le monde de la recherche. Notamment, le mois de juillet a été marqué par l'école d'été de théorie analytique des nombres à l'IHES puis par deux jours de conférences à l'Université Paris 13, l'occasion de voir tous ces objets que j'avais croisés en action, dans d'autres problématiques souvent, dans un cadre proche de ceux que j'étudiais parfois, mais toujours pleins de vie, permettant de mieux les cerner et donnant envie d'en percer les mystères.

Rien de tout cela n'aurait été possible sans Farrell Brumley, dont j'ai suivi le cours qui, sans le comprendre dans ses moindres détails, a su me conquérir par la mise en oeuvre de la diversité de ses méthodes. Dès lors, il a été un guide sans pareil, tant pour m'indiquer les bonnes références bibliographiques sur chaque point que je ne maîtrisais pas, que pour répondre à mes questions et pour m'imposer un stage rythmé de présentations et de réunions, sans quoi je n'aurais pu avancer autant. Je le remercie infiniment pour cette infaillible présence, bienveillante mais aussi exigeante. Puis mes remerciements vont également à Nicolas Bergeron, pour son joli livre d'abord, pour avoir accepté de participer à mon jury de mémoire aussi.

à Châtenay-Malabry, le 7 août 2014

Une certaine urgence, dans laquelle s'est terminée la rédaction de ce travail, et un manque certain d'organisation ont fait sombrer l'espoir que j'avais de rendre ce travail comme une synthèse expliquée et autocontenue des livres et articles que j'ai parcourus lors de ces derniers mois. Cette ultime précipitation est visible en de nombreuses preuves, finalement absentes, notamment concernant les propriétés locales des quaternions et des adèles, ainsi qu'à la présence de parties avortées ainsi que le signale les avertissements les accompagnant, ou à l'absence de conclusion.

J'espère que le lecteur acceptera mes excuses.

à Châtenay-Malabry, le 2 septembre 2014

Introduction

Le programme de Langlands a pour objectif de tisser des ponts entre la théorie des nombres et les représentations de groupes. Il s'agit notamment de paramétrer, de construire, ou d'atteindre certaines de ces représentations, éventuellement vérifiant certaines propriétés particulières, par des constructions arithmétiques.

Depuis Hecke nous connaissons des relations ([Gelbart, 1975, proposition 2.1]) entre les représentations paraboliques des groupes linéaires et les formes automorphes du demi-plan de Poincaré. Par de nombreuses généralisations successives, Langlands a reformulé ces premiers résultats en une série de conjectures très générales dites de fonctorialité ([Bernstein and (éditeurs), 2004, article de Cogdell]).

Dans ce travail nous suivons un des premiers pas dans ce monde du programme de Langlands, qui peut être vu comme le cas le plus élémentaire qui ne soit pas le cas commutatif de GL_1 : il s'agit de GL_2 . Pour en trouver des représentations, nous étudions certaines fonctions qui généralisent les fonctions périodiques sur \mathbf{R} , qui sont la clé, *via* la décomposition en séries de Fourier, de la théorie abélienne. Des fonctions qui sont périodiques, ou plus généralement homogènes, sur un réseau sont appelées fonctions modulaires ou automorphes. La correspondance de Jacquet-Langlands est l'un des premiers résultats exploitant ces idées pour aller dans le sens de la philosophie de Langlands. Nous suivons ici une preuve réalisée dans un cadre très classique et sans outil excessivement abstrait, proposée dans [Bolte and Johansson, 1999] et reprise dans [Bergeron, 2011].

Nous nous intéressons à la comparaison des spectres du laplacien sur des surfaces hyperboliques, notamment pour les nombreuses relations assez étroites qu'on leur connaît [Gelbart, 1975, Bump, 1998] avec les représentations de groupes. A priori, deux surfaces données n'ont rien à voir, et rien ne pousse à croire que les spectres associés auront un rapport. Commençons d'abord par un exemple, tiré de [Rogawski, , III] : considérons les deux groupes $G_1 = SL_2(\mathbf{R})$ et $G_2 = SU_2$. Ces deux groupes ne semblent pas avoir grand chose à voir l'un avec l'autre, d'abord parce que G_2 est compact contrairement à G_1 . Leurs représentations π_k , la série discrète de G_1 , et $\rho'_k = \bigwedge^{k-1}(1 \oplus 1)$ de G_2 non plus, par exemple parce que π_k est de dimension infinie contrairement à ρ'_k . Toutefois, leurs caractères sont presque égaux.

Notons que pour les deux seuls types d'algèbres de quaternions sur \mathbf{R} , soient $A = M_2(\mathbf{R})$ et $A' = \mathbf{H}$, on a $G_1 = SL_1(A)$ et $G_2 = SL_1(A')$, ainsi le couple de notre exemple provient des algèbres de quaternions sur \mathbf{R} par une construction systématique, SL_1 . Cela pousse à s'intéresser aux algèbres de quaternions. Cet exemple est un exemple local, en la place ∞ de \mathbf{Q} . Nous nous intéresserons au cours de cette étude aux mêmes types de situations, mais avec des objets globaux : les constructions se feront à partir des algèbres de quaternions rationnelles.

C'est là l'idée de la correspondance de Jacquet-Langlands : il existe toute une famille de couples de surfaces, à chaque fois l'une étant compacte et l'autre non, pour lesquelles on a une telle correspondance :

Théorème 0.1 (correspondance de Jacquet-Langlands). *L'ensemble des valeurs propres non nulles et comptées avec multiplicités du laplacien hyperbolique dans $L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})$ est égal à l'ensemble des valeurs propres comptées avec multiplicités associées aux formes de Maaß primitives dans $L^2(\Gamma_0(d_A))$. Autrement dit, le spectre non nul des surfaces arithmétiques quaternioniques est exactement le spectre primitif parabolique des surfaces de congruence. En particulier, on a l'inclusion spectrale :*

$$Sp\left(\Delta_{\mathcal{H}}, L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})\right) \subseteq Sp\left(\Delta_{\mathcal{H}}, L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})\right)$$

Notre objectif est de développer quelques outils et idées pour aller vers la preuve de cette correspondance. Nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie hyperbolique, que nous commençons par introduire, avec certains de ses modèles et des propriétés qui nous seront utiles, de sorte à pouvoir étudier quelques premiers résultats sur les formes automorphes, les groupes fuchsien, principalement les formes modulaires et le groupe modulaire qui nous intéressent. Ce qui nous intéresse sont leurs propriétés spectrales, qui permettent d'aboutir à la décomposition spectrale du laplacien hyperbolique. Cet opérateur est central, ses fonctions propres étant justement en correspondance avec les représentations d'un certain type du groupe linéaire. La correspondance de Jacquet-Langlands arrive alors : les valeurs propres du laplacien sur les surfaces arithmétiques quaternioniques $Y_{a,b}$ correspondent exactement aux valeurs propres d'un certain type sur les surfaces hyperboliques arithmétiques $Y(N)$. Cela permet de tirer de nombreux résultats dans le cadre le plus général à partir de résultats connus dans le cadre modulaire particulier que nous traitons directement. Le cheminement jusqu'à ce résultat et quelques de ses applications traverse de nombreuses théories que nous n'abordons que partiellement dans le cadre des objets, méthodes et résultats qui nous intéressent, parfois devant nous résigner à admettre de fastidieux ou trop profonds résultats intermédiaires : il s'agit notamment de géométrie des groupes, de la formule des traces de Selberg et de résultats algébriques et arithmétiques sur les algèbres de quaternions et leurs ordres.

Notons toutefois que la version présentée ici de la correspondance de Jacquet-Langlands est plus faible que la version originale. Il existe non seulement une correspondance entre les valeurs propres du laplacien hyperbolique dans $L^2(Y_{a,b})$ et certaines valeurs propres dans $L^2(Y_0(N))$, mais la correspondance est encore vraie pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke, [Bolte and Johansson, 1999, théorème 5.2]. Le résultat est encore meilleur qu'on ne le croit : Bolte et Johansson [Bolte and Johansson, 1996] ont mis au point une construction explicite qui donne des fonctions propres du laplacien dans $L^2(Y_0(N))$ à partir de fonctions propres du laplacien dans $L^2(Y_{a,b})$.

1 Le paysage : géométrie hyperbolique et groupes fuchsien

Nous nous intéressons à la surface modulaire comme un premier cadre bien connu et suffisamment riche, pour explorer la théorie. Elle est plus simple que des surfaces riemanniennes plus générales ou l'étude en dimension supérieure, mais permet de dégager les premiers résultats et idées. C'est notamment ce cadre qui est choisi par Nicolas Bergeron [Bergeron, 2011] ou par Henryk Iwaniec [Iwaniec, 2002]. Des aspects plus géométriques autour du groupe modulaire, et développés dans la partie suivante, sont dans [Katok, 1992]. Le point de vue plus riemannien est exposé dans [Lafontaine,].

1.1 Géométrie hyperbolique

Nous commençons par introduire le cadre dans lequel nous travaillons, qui est celui de la géométrie hyperbolique, dont une bonne présentation est celle de l'article de vulgarisation d'Étienne Ghys [?]. Le rappel des définitions et propriétés de la géométrie hyperbolique sont essentiellement tirés de [Earp and Toubiana, 2009], qui est élémentaire mais explore précisément et avec beaucoup d'illustrations les propriétés et les objets usuels.

1.1.1 Le plan hyperbolique et ses modèles

On considère le demi-plan de Poincaré :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im} > 0\}$$

On le munit d'une métrique en faisant un modèle de la géométrie hyperbolique :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{y^2} \text{ pour } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_z \mathcal{H}$$

Cette métrique permet de définir les notions de norme et d'angle sur le plan tangent, par les formules usuelles donnant ces quantités en fonction du produit scalaire

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} = \frac{\|\mathbf{u}\|}{y^2} \text{ et } \cos_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{H}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}} = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

La notion d'aire est donnée par

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2}$$

Les calculs et la visualisation géométrique peut parfois faire appel au modèle du disque de Poincaré

$$D = D(0, 1) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$$

qui est isométrique à \mathcal{H} par

$$z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}$$

1.1.2 Isométries

On rappelle que l'action de groupe de $SL_2(\mathbf{R})$ sur \mathcal{H} par homographies est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

et identifie l'ensemble des homographies au groupe $PSL_2(\mathbf{R})$, l'action de $\pm I_2$ étant triviale.

Remarque. Notre choix oscille entre $SL_2(\mathbf{R})$, permettant le formalisme matriciel bien adapté aux calculs, et $PSL_2(\mathbf{R})$, qui représente vraiment les homographies. La différence n'est pas grande, les classes dans $PSL_2(\mathbf{R})$ étant à deux éléments. Il convient toutefois d'adopter une convention de notation pour distinguer les deux cadres : on note dorénavant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbf{R})$$

Théorème 1.1. \mathcal{H} est stable par G .

PREUVE. Cela découle de la formule $\text{Im}(gz) = |cz + d|^{-2} \text{Im}(z)$, qui montre que le signe strict de la partie imaginaire est conservé par les homographies. \square

Théorème 1.2. L'action de G sur \mathcal{H} est transitive, le stabilisateur de i est SO_2 . Ainsi $\mathcal{H} \cong G/SO_2$.

PREUVE. En effet, tout point $x + iy$ est atteint à partir de i par les transformations suivantes :

$$i \mapsto i + \frac{x}{y} \mapsto x + iy$$

qui sont des homographies – une translation et une homothétie représentées dans $PSL_2(\mathbf{R})$, soit

$$x + iy = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & xy^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} i$$

en termes matriciels. Concernant le stabilisateur de i , il suffit de développer $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, qui est équivalent à $a = d$, $b = -c$, et $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = ad - bc = 1$, soit $M = R_\theta \in K$. \square

On obtient en particulier que les homographies conservent les homéomorphismes. On peut aussi prouver que les homographies agissent 3-simplement transitivement sur \mathcal{H} .

Ainsi, \mathcal{H} est l'une des trois orbites de l'action du groupe $G = \text{PSL}_2(\mathbf{R})$, avec la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ et le demi-plan inférieur $\overline{\mathcal{H}}$.

Théorème 1.3. *Les applications conformes de \mathcal{H} , i.e. qui préservent les angles, sont les homographies :*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ où } a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1$$

PREUVE. [Earp and Toubiana, 2009, 2.1.7, 2.1.8 et 2.1.10] Pour vérifier qu'une application est conforme, il suffit de vérifier qu'elle est holomorphe et que sa dérivée ne s'annule pas. Pour prouver qu'elles sont toutes de cette forme, on raisonne sur le modèle du disque et on utilise le lemme de Schwarz. \square

Théorème 1.4 (Isométries hyperboliques). *Une transformation conforme est une isométrie. Le groupe des transformations conformes est confondu avec le groupe des isométries positives. Les isométries hyperboliques sont les homographies et leurs composées avec l'inversion $z \mapsto -\bar{z}$.*

PREUVE. Les isométries conservent le produit scalaire, et sont donc des applications conformes. Réciproquement, si f est une homographie, alors on a en tout point $p \in \mathcal{H}$ et pour tous z et w de $T_p\mathcal{H}$:

$$\langle D_p f(z), D_p f(w) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{|f'(p)|^2}{\text{Im } 2f(p)} = \langle z, w \rangle_{\mathcal{H}}$$

ce qui fait que f est une isométrie. Ainsi, les homographies, i.e. les applications conformes, sont exactement les isométries du plan hyperbolique. \square

1.1.3 Géodésiques

La notion de longueur donnée sur le plan tangent permet de définir la longueur hyperbolique d'une courbe $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ de classe C^1 , qui s'étend naturellement au cas des courbes C^1 par morceaux, en sommant les longueurs de chaque morceau C^1 :

$$l_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{H}} = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y}$$

Exemple. On obtient notamment les longueurs classiques :

- ★ segment horizontal $[x_1 + iy, x_2 + iy]$ mesure sa longueur euclidienne dilatée $\frac{|x_1 - x_2|}{y}$
- ★ un segment vertical $[x + iy_1, x + iy_2]$ mesure $|\log \frac{y_2}{y_1}|$

On en tire la notion de distance entre deux points comme la plus petit longueur d'un chemin reliant ces deux points :

$$d(a, b) = \inf_{\gamma: a \rightarrow b} l(\gamma)$$

Puisque le groupe des isométries est relativement grand, ces deux calculs particuliers de longueurs suffisent à exprimer toutes les autres :

Théorème 1.5. *On a les expressions suivantes pour la longueur, pour tous $z, w \in \mathcal{H}$:*

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| - |z - w|}{|z - \bar{w}| + |z - w|}$$

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}$$

$$d(z, w)(z, w) = \ln(w, z^*; z, w^*)$$

PREUVE. [Katok, 1992, 1.2.6, p. 6] On vérifie que les formules sont invariantes par homographies. Puis, par transitivité, on ramène les points z et w sur l'axe imaginaire, $z = ia$ et $w = ib$, de sorte à utiliser la distance calculée en exemple. \square

Une géodésique de \mathcal{H} est une courbe qui minimise localement la longueur, *i.e.* telle que pour tout couple de points de la courbe, la longueur de l'arc de courbe délimité par ces deux points et la distance hyperbolique entre ces deux points. Les demi-droites verticales sont des exemples de géodésiques. En effet, pour $x + iy$ et $x + iy'$ deux points situés sur la même droite verticale, en notant γ_0 le segment reliant les deux, on a pour une courbe γ quelconque reliant les deux :

$$l(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y} \geq \int_a^b \frac{|y'|}{y} \geq \log \left(\frac{b}{a} \right) = l(\gamma_0)$$

On peut toutes les déterminer en se ramenant à ce cas par une homographie :

Théorème 1.6. *Les géodésiques sont exactement les demi-cercles orthogonaux à $\bar{\mathbf{R}}$.*

PREUVE. [Katok, 1992, théorème 1.2.1, p. 5] Pour z et w quelconques non alignés verticalement dans \mathcal{H} , il existe un unique cercle euclidien passant par ces deux points et orthogonal à l'axe réel. Si a est l'un des points d'intersection de ce cercle avec \mathbf{R} , alors les homographies

$$z \mapsto -\frac{1}{z - a} + b$$

envoient a sur ∞ , et pour un bon choix de b envoient l'autre extrémité sur $i\mathbf{R}$. Puisque par deux points passe une unique géodésique hyperbolique, l'axe imaginaire est la géodésique reliant ces deux points. En inversant l'homographie, on obtient que la géodésique reliant z et w est le demi-cercle considéré initialement. \square

Par deux points de \mathcal{H} passe une unique géodésique. Cela définit une géométrie non euclidienne : les quatre premiers postulats d'Euclide sont vérifiés, mais pas le postulat des parallèles : ici, par un point x passe une infinité de géodésiques parallèles à une géodésique donnée ne passant pas par x .

1.2 PSL₂(R) et transformations homographiques

1.2.1 Quelques propriétés

Un moyen explicite et efficace de manipuler les éléments de G est d'utiliser les coordonnées données par la décomposition :

Théorème 1.7 (Iwasawa). *On a la décomposition matricielle suivante :*

$$\begin{aligned}
 G &= BK = NAK \\
 \text{où } A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0 \right\} \\
 N &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbf{R} \right\} \\
 B = NA &= \left\{ \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0, u \in \mathbf{R} \right\} \\
 K = \text{SO}_2(\mathbf{R}) &= \left\{ r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi[\right\}
 \end{aligned}$$

PREUVE. Nous avons déjà déterminé que i pouvait être envoyé sur $x + iy$ par des matrices de AN. Pour $g \in G$, on peut donc écrire $g(i) = x + iy = na(i)$, soit $ga^{-1}n^{-1}(i) = i$. Le stabilisateur de i étant K, il vient que $ga^{-1}n^{-1} \in K$, soit $g \in NAK$ comme voulu, cela donne l'existence.

Pour l'unicité, supposons que $g = nak = n'a'k'$. En appliquant en i , il vient $na(i) = n'a'(i)$ soit, avec $a = \text{diag}(y^{1/2}, y^{-1/2})$ et n comme précédemment, $x + iy = x' + iy'$, donc $a = a'$ et $n = n'$, et de fait $k = k'$. \square

1.2.2 Classification des transformations

Hormis l'identité, une homographie possède un ou deux points fixes. Plus précisément, on peut déterminer dans quel cas on est grâce à la trace de la matrice de SL₂(R) associée :

Théorème 1.8 (Classification des isométries directes par les points fixes). *Les ensembles de points fixes sont très contraints pour des homographies. Quatre cas peuvent se produire :*

- * l'identité
- * si $\text{tr}(\gamma) < 2$, il y a un unique point fixe dans \mathcal{H} , la transformation est dite elliptique
- * si $\text{tr}(\gamma) = 2$ et $\gamma \neq \text{id}$, il y a un unique point fixe sur $\overline{\mathbf{R}}$, la transformation est dite parabolique
- * si $\text{tr}(\gamma) > 2$, il y a deux points fixes sur $\overline{\mathbf{R}}$, la transformation est dite hyperbolique

PREUVE. Cela vient juste de ce que

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \iff cz^2 + (d - a)z - b = 0 \text{ et } \Delta = (d + a)^2 - 4 = \text{Tr}(\gamma)^2 - 4$$

ce qui donne la disjonction de cas en fonction du signe de Δ . \square

À conjugaison près, quitte à ramener les points fixes sur les points fixes « classiques », i.e.

- * $\{0, \infty\}$ pour les hyperboliques
- * ∞ pour les paraboliques
- * i pour les elliptiques

on obtient la classification suivante :

Théorème 1.9 (Classification des isométries directes à conjugaison près). *Toute classe de conjugaison de $SL_2(\mathbf{R})$ est constituée d'éléments ayant le même comportement géométrique. Plus précisément, un élément de $SL_2(\mathbf{R})$ peut être représenté sous une forme canonique en conjuguant :*

- * identité
- * elliptique, qui se représente par R_θ , $\theta \in \mathbf{R}$
- * parabolique, qui se représente par une translation $z \mapsto z + l$, $l \in \mathbf{R}$
- * hyperbolique, qui se représente par une homothétie $z \mapsto pz$, $p > 0$

PREUVE. La forme des représentations est prouvée dans la section suivante, lors de la recherche des centralisateurs. \square

On définit l'axe d'une transformation hyperbolique comme l'unique géodésique reliant ses deux points fixes.

1.2.3 Centralisateurs et stabilisateurs

Lemme 1. *Si deux isométries γ et γ' commutent, alors les points fixes de l'une sont stables par l'autre.*

PREUVE. Dans ce cas, si x est fixe pour γ , alors $\gamma'x$ est aussi fixe par γ car $\gamma(\gamma'x) = \gamma'\gamma x = \gamma'x$. \square

On s'intéresse aux centralisateurs : puisqu'on a vu que la classification se faisait modulo l'action de conjugaison, chacune de ces classes est en bijection avec $\Gamma \cdot \gamma \cong Z_\gamma \backslash \Gamma$, Z_γ désignant le centralisateur de γ . La connaissance du centralisateur est donc importante pour connaître ces orbites. Regardons les trois classes d'isométries, quitte à conjuguer de sorte à se ramener aux points fixes standard :

Pour les paraboliques, $\gamma : z \mapsto z + l$, le point fixe est ∞ , et on cherche les $S \in Z_\gamma$, *i.e.* tels que $\gamma S = S\gamma$. La propriété initiale donne que ∞ est aussi point fixe de S , donc $Z : z \mapsto az + b$. Puis écrire que $S\gamma = \gamma S$ donne $a = 1$, et S est une translation. Ainsi :

$$Z_{z \mapsto z+l} = \{z \mapsto z + x \mid x \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}$$

est l'ensemble de toutes les translations, *i.e.* de toutes les transformations paraboliques fixant ∞ .

Pour les elliptiques, $\gamma \in R_\theta$, le point fixe est i , donc $S(i) = i$, et développer $\frac{ai+b}{ci+d} = i$ donne $a = d$, $b = -c$, et $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = ad - bc = 1$, ce qui fait que $S = R_\theta$. Ainsi :

$$Z_{z \text{ elliptique}} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbf{R}\} \cong SO_2(\mathbf{R}) \cong S^1$$

est l'ensemble de toutes les transformations elliptiques fixant i .

Pour les hyperboliques, $T = z \mapsto \lambda z$, et puisque l'axe $i\mathbf{R}$ est conservé, ainsi que son sens puisque les isométries considérées sont directes, $S(0) = 0$ et $S(\infty) = \infty$, donc S est aussi une homothétie :

$$Z_{z \mapsto \lambda z} = \{z \mapsto \lambda' z \mid \lambda' \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}$$

est l'ensemble de toutes les homothéties, *i.e.* de toutes les transformations hyperboliques fixant 0 et ∞ .

On obtient ainsi la réciproque de la propriété initiale : deux isométries commutent si, et seulement si, elles ont mêmes points fixes \square .

Théorème 1.10 (Centralisateur d'une isométrie). *Le centralisateur d'un élément est constitué des éléments de mêmes points fixes, ainsi que de l'identité. Le centralisateur est donc un invariant d'une classe de conjugaison.*

Lemme 2. *Si Γ est un groupe fuchsien et que tous ses éléments ont mêmes points fixes, *i.e.* s'ils commutent, alors Γ est monogène.*

PREUVE. En effet, les points fixes définissent le type de transformation, donc elles sont toutes de même type. Un sous-groupe discret du centralisateur d'un type est donc isomorphe à un sous-groupe discret de \mathbf{R} (cas hyperbolique ou parabolique) ou de S^1 (cas elliptique), qui est monogène. \square

En particulier, les centralisateurs dans un groupe fuchsien sont cycliques, ce qui permet de définir un élément primitif associé à chaque élément : la classe de conjugaison de γ est cyclique, donc engendrée par un certain γ_0 , qu'on appelle l'élément primitif, défini modulo inversion, associé à γ , et $\gamma = \gamma_0^l$. On peut définir une notion de longueur de translation pour les transformations, comme longueur entre un point fixé et son image :

- * pour les hyperboliques $z \mapsto pz$, il s'agit de $\log p = d(i, pi)$
- * pour les elliptiques $z \mapsto r_\theta$, il s'agit de $d_\theta = d(2i, r_\theta 2i)$
- * pour les paraboliques $z \mapsto z + l$, il s'agit de $l = d(1, 1 + l)$

et on peut vérifier qu'un élément primitif est un élément de longueur de translation minimale.

1.3 Des généralisations

On peut se demander comment généraliser le plan hyperbolique et les homographies en dimensions supérieures. Pour mieux pouvoir généraliser \mathcal{H} , qui pour l'occasion est noté \mathcal{H}^2 , on peut utiliser les systèmes de coordonnées, la décomposition de l'espace en $\mathcal{H} \sqcup \overline{\mathbf{R}} \sqcup \overline{\mathcal{H}}$ ou constater que

$$\mathcal{H}^2 \cong \mathrm{SO}(2, 1) / \mathrm{SO}(2)$$

de sorte que l'on peut généraliser, suivant l'exposé de Valentin Blomer :

Définition 1.1. L'espace hyperbolique de dimension n admet les modèles suivants :

- ★ $SO(n, 1)/SO(n)$
- ★ le modèle de l'hyperboloïde $\{x \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^n : x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1\}$
- ★ le modèle du demi-espace $\{x \in \mathbf{R}^n : x_{n-1} > 0\}$

Ainsi $\mathcal{H}^3 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})/\mathrm{PSU}_2(\mathbf{C})$ est un cas très étudié, notamment dans [Juergen Elstrodt, 1998].

1.4 Groupes fuchsien et groupes modulaires

1.4.1 Groupes fuchsien

La théorie plus générale des groupes fuchsien, qui généralise certaines preuves présentées ici dans le cas particulier du groupe modulaire ou des groupes dérivés d'algèbres de quaternions, est présentée de manière synthétique dans [Katok, 1992], et de manière plus détaillée dans [Beardon, 1995]. Pour tout ce qui concerne les arguments topologiques sur les groupes, nous renvoyons à [Mneimné and Testard, 1986]

Définition 1.2. Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbf{R})$.

Théorème 1.11. *Un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{R})$ est fuchsien s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

- ★ les orbites sont localement finies, i.e. rencontrent un compact donné un nombre fini de fois
- ★ les orbites sont discrètes et les stabilisateurs d'ordres finis
- ★ tout point x admet un voisinage V tel que $V \cap T(V) = \emptyset$ pour presque tout $T \in \Gamma$

PREUVE. C'est un grande partie de [Katok, 1992, chapitre II] \square

Un point de vue intuitif pour comprendre les groupes fuchsien est de les représenter géométriquement par des pavages de l'espace :

Définition 1.3. Un domaine fondamental de l'action de Γ sur \mathcal{H} est une partie ouverte F de \mathcal{H} qui est un pavage de l'espace par l'action de Γ . Plus précisément, F est un domaine fondamental pour Γ si

- ★ F est ouvert
- ★ dans chaque Γ -orbite, il existe un point qui est dans \bar{F}
- ★ F ne contient pas deux points distincts d'une même Γ -orbite

Ainsi, un domaine fondamental est en un certain sens un domaine minimal représentant le quotient de \mathcal{H} par l'action de Γ . On se place souvent dans le cas d'un sous-groupe Γ de G discret cocompact, autrement dit $Y = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ est une surface compacte.

Il n'y a pas d'unicité d'un domaine fondamental, toute image par un élément de Γ en étant encore un par exemple. Certains sont plus intéressants que d'autres : ainsi, si l'aire du bord est nulle, alors l'aire d'un domaine fondamental est constante, appelée la co-aire du groupe agissant sur l'espace. Parmi les domaines fondamentaux, certains viennent d'une construction systématique, notamment :

Définition 1.4. Le domaine de Dirichlet associé à un point z fixé par aucune transformation non triviale est

$$D_z(\Gamma) = \{z' \in \mathcal{H} : d(z, w)(z', z) < d(z, w)(z', \gamma(z)), \forall \gamma \neq \text{id}\}$$

Outre le fait d'avoir un moyen systématique d'obtenir un domaine fondamental pour un groupe fuchsien, le domaine de Dirichlet est toujours un « bon » choix :

Théorème 1.12 (Domaine fondamental). Γ admet un domaine fondamental F sur \mathcal{H} qui est un polygone dont les bords sont des paires d'arcs géodésiques associés, i.e. liés par un élément de Γ , parcourus en sens opposés.

PREUVE. [Bernstein and (éditeurs), 2004, article de Kowalski] D'abord, commençons par le

Lemme 3. Si Γ est un sous-groupe fuchsien de $SL_2(\mathbf{R})$ et si z est fixé par un élément de Γ , alors au voisinage de z aucune autre point n'est fixé par un élément non trivial de Γ . En particulier, il existe des points de \mathcal{H} qui ne sont fixés par aucun élément non trivial de Γ .

PREUVE. [Katok, 1992, lemme 2.2.5] Supposons le contraire : $\gamma z = z$, et il existe une suite de points z_n convergeant vers z tels que $\gamma_n z_n = z_n$. Prenons un voisinage compact V de z . Par le théorème de caractérisation des groupes fuchsien, seul un nombre fini de γ_n est tel que $\gamma_n z$ est dans V . Donc pour n assez grand, cela implique $d(\gamma_n z, z) > \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Mais c'est impossible, parce que $\gamma_n z$ se rapproche de $\gamma_n z_n$ et z_n se rapproche de z . \square

Regardons alors le domaine de Dirichlet usuel, associé à un z_0 qui n'est fixé par aucun élément de Γ , soit

$$F_{z_0} = \{z : d(z_0, z) < d(z_0, \gamma z), \forall \gamma \in \Gamma\}$$

qui est un domaine fondamental l'action de Γ sur \mathcal{H} . Considérons l'ensemble N des γ_i tels que $\gamma_i(F)$, encore domaine fondamental, soit adjacent à F .

Soit $\gamma_i^2 \neq \text{id}$, auquel cas $\gamma_i^{-1} \in N$ est un autre élément de N , que l'on peut renuméroter en γ_{i+h} . La trace sur \bar{F} de la géodésique α_i , médiatrice passant par z_0 et $\gamma_i^{-1}(z_0)$, ainsi que celle de $\alpha_{i/h}$, sont échangées par γ_i et γ_{i+h} .

Soit $\gamma_i^2 = \text{id}$, le milieu de α_i est alors fixé par γ_i , et on peut couper la géodésique en deux et la considérer comme deux côtés du bord. \square

Dans tous les cas qui nous intéresseront, nous serons dans la situation suivante :

Théorème 1.13 (Siegel). Si Γ est un groupe de première espèce, alors il existe un domaine fondamental ayant un nombre fini de côtés. Les transformations associant les bords deux à deux engendrent Γ .

Les groupes arithmétiques considérés sont souvent des sous-groupes d'indices finis des sous-groupes quaternioniques et modulaires. On dispose d'un rapport entre les domaines fondamentaux de tels sous-groupes :

Théorème 1.14. *Pour deux groupes $G, G' \leq G, [G : G'] = n$, agissant sur \mathcal{H} avec pour domaines fondamentaux respectifs F et F' , si $\{g_i\}_i$ un système de représentants des classes à gauche de G' modulo G , on a :*

$$F' = \bigsqcup_{i=1}^n g_i F$$

En particulier, lorsque les aires sont finies et que les éléments agissent par isométries, de sorte que $A(g_i F) = A(F)$:

$$A(G') = [G : G'] A(G)$$

De plus le théorème de Gauss-Bonnet permet d'obtenir facilement la co-aire d'un groupe à partir d'un domaine fondamental.

Théorème 1.15 (Gauss-Bonnet). *L'aire d'un triangle hyperbolique d'angles intérieurs α, β, γ est $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.*

PREUVE. Voir [do Carmo, 1976]. \square

Ainsi, la connaissances précises de domaines fondamentaux permettent de déterminer la coaire d'un groupe grâce à la connaissance des angles et de son genre.

Nous nous intéressons particulièrement à l'action de $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbf{Z})$. Pour étudier cette action, il convient de la représenter avec un domaine fondamental, sur lequel on peut voir de nombreuses propriétés de l'action et effectuer des raisonnements.

Théorème 1.16. *Le domaine*

$$F = \left\{ z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1, |\text{Re}(z)| < \frac{1}{2} \right\}$$

est le domaine de Dirichlet associé au point i , c'est en particulier un domaine fondamental. Plus précisément :

- * pour tout point $z \in \mathcal{H}$, il existe $z' \in \bar{F}$ et $g \in G$ tels que $z = gz'$
- * deux points de \bar{F} sont dans la même orbite si :
 - $\text{Re}(z) = \pm \frac{1}{2}$ et $z = z' \pm 1$
 - $|z| = 1$ et $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$
- * les seuls éléments qui sont des points fixes sont
 - $z = i$, qui est fixé par l'inversion
 - $z = j$ ou $z = \bar{j}$, qui sont fixés par $-\frac{1}{1+z}$ et $\frac{z-1}{z}$

PREUVE. Les domaines de Dirichlet sont toujours des domaines fondamentaux des groupes fuchsien. Les deux autres assertions sont de [Serre, 1970, p. 130] \square

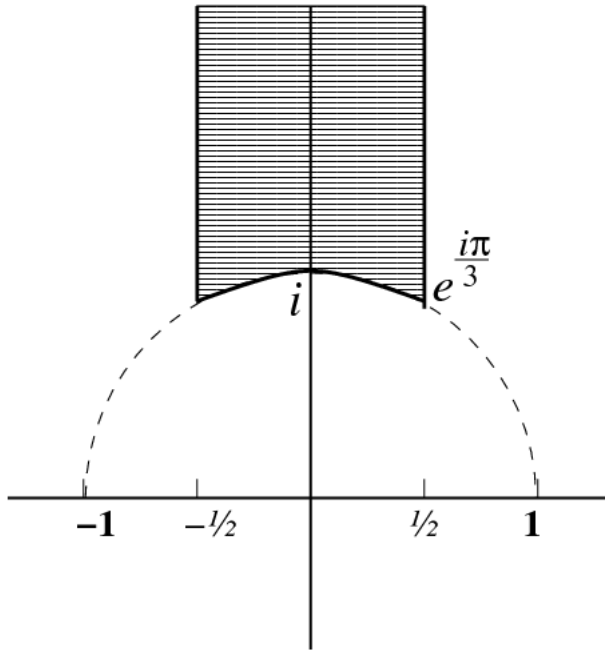


FIGURE 1 – Le domaine fondamental standard du groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbf{Z})$

Ainsi, avec les indices calculés précédemment, on obtient

Théorème 1.17 (Aire de $\Gamma_0(N)$).

$$A(\Gamma_0(N)) = [\Gamma(1) : \Gamma_0(N)]A(\Gamma(1)) = \frac{\pi}{3}N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

PREUVE. À partir des résultats sur les domaines fondamentaux de sous-groupes d'indice fini, on déduit l'aire à partir de $A(\Gamma(1)) = \frac{\pi}{3}$:

$$A(\Gamma_0(N)) = [\Gamma(1) : \Gamma_0(N)]A(\Gamma(1)) = \frac{\pi}{3}N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

par le théorème de Gauss-Bonnet. \square

1.4.2 Le groupe modulaire et ses sous-groupes de congruence

On se place dans le cas du groupe fuchsien particulier $G = \text{SL}_2(\mathbf{Z})$. Les sous-groupes de congruence sont des sous-groupes construits de manière « arithmétique », par des conditions de congruence sur les coefficients :

Définition 1.5. Un sous-groupe Γ de $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de congruence s'il contient, pour un certain N , le sous-groupe principal de congruence de niveau N

$$\Gamma(N) = \{M \in \text{SL}_2(\mathbf{Z}) : M \equiv I_2 \pmod{N}\}$$

C'est le cas notamment des sous-groupes de Hecke suivants :

$$\Gamma_0(N) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\} = \pi_N^{-1} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : c \equiv 0, a \equiv 1, d \equiv 1 \pmod{N} \right\} = \pi_N^{-1} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le cadre est désormais posé pour généraliser le groupe des périodes usuel, \mathbf{Z} : ce seront ces sous-groupes de congruence. On associe à ces sous-groupes de congruence les surfaces $Y(N) = \Gamma(N) \backslash \mathcal{H}$, qui sont des revêtements de $Y(1)$. Pour mieux comprendre ces surfaces, il convient d'explorer quelques propriétés utiles sur ces sous-groupes de congruence.

Théorème 1.18. *Les sous-groupes principaux de congruence sont d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$:*

$$[\Gamma(1) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

PREUVE. En effet, par définition, $\Gamma(N) = \mathrm{Ker}\pi_N$ où π_N est le morphisme de réduction $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$.

Lemme 4. π_N est surjectif

PREUVE. le seul problème est qu'une matrice relevée à partir de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ n'est pas forcément dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, seulement dans $M_2(\mathbf{Z})$. On introduit, suivant [Hida, 1993, 6.1],

$$V : \{v \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 : \mathrm{ord}(v) = N\}$$

Alors ces v sont des représentants de la forme (a, b) avec a et b premiers entre eux, puisque l'ordre est N . Donc il existe u et v tels que $ua + bv = 1$. Considérons

$$M = \begin{pmatrix} b & x \\ a & y \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$$

de sorte que M envoie le vecteur $v_0 = (1, 0)$ sur (a, b) . Soit maintenant une matrice $\bar{N} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, ce qui précède donne l'existence de $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ telle que $Mv_0 = v := Nv_0$, donc $Mv_0 \equiv Nv_0 \pmod{N}$. Les premières colonnes sont donc toutes représentables par des éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Or la projection $N(\mathbf{Z}) \rightarrow N(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ est surjective, et $N(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ engendre $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, donc on peut obtenir toutes les matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ ainsi, cela donne la surjectivité. \square

Par surjectivité, on a donc $\Gamma/\Gamma(N) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, dont on connaît bien le cardinal. En effet :

D'abord, puisque le déterminant est surjectif de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$, on a

$$|\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})| = \phi(n) |\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})|$$

Par le théorème chinois, on a $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \cong \prod_k \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z})$, donc

$$|\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})| = \prod_k \left| \mathrm{GL}_2\left(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}\right) \right|$$

Puis, reste à estimer le taille de $\mathrm{GL}_2\left(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}\right)$. Pour cela, notons que le morphisme $\mathrm{GL}_2\left(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}\right) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p_k\mathbf{Z})$ a pour noyau les matrices congrues à I_2 modulo p_k dans $\mathrm{GL}_2\left(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}\right)$: il y en a $\left(p_k^{v_k(N)-1}\right)^4$, chaque coefficient de $\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}$ devant être congru à un nombre fixé, 0 ou 1, modulo p_k . Le cardinal est donc

$$|\mathrm{GL}_2\left(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}\right)| = \left(p_k^{v_k(N)-1}\right)^4 |\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p_k\mathbf{Z})|$$

Le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p_k\mathbf{Z})$ est le nombre de bases dans $(\mathbf{Z}/p_k\mathbf{Z})^2$:

- ★ il y a $p_k^2 - 1$ choix pour le premier vecteurs : tous les non nuls
- ★ il y a $p_k^2 - p_k$ pour le second : tous les non colinéaires au premier

Ainsi, on obtient

$$|\mathrm{GL}_2\left(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}\right)| = p_k^4 \left(1 - p_k^{-2}\right) \left(1 - p_k^{-1}\right)$$

$$|\mathrm{SL}_2\left(\mathbf{Z}/p_k^{v_k(N)}\mathbf{Z}\right)| = p_k^{3v_k(N)} \left(1 - p_k^{-1}\right) \left(1 - p_k^{-2}\right) \text{ d'où } |\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})| = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

ce qui donne, en compilant tous ces résultats, l'indice recherché. \square

Théorème 1.19. $\Gamma(N)$ est d'indice fini dans $\Gamma_0(N)$ et

$$[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)] = N\phi(N) = N^2 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

PREUVE. En effet, le morphisme de réduction modulo N , $\pi_N : \Gamma_0(N) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, est à valeurs dans le groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, noté $\mathrm{TSL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. Il est surjectif, avec le même type d'arguments que pour la surjectivité de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. Donc $\Gamma_0(N)/\Gamma(N) \cong \mathrm{TSL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, et l'indice de $\Gamma(N)$ dans $\Gamma_0(N)$ est l'ordre de ce groupe. Or cet ordre est justement donné par le nombre de choix possibles des coefficients de $M \in \mathrm{TSL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$:

- ★ a doit être inversible, soit $\phi(N)$ possibilités
- ★ b quelconque, soit N possibilités
- ★ c est entièrement déterminé par le choix de a et la condition sur le déterminant

d'où

$$|\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})| = [\Gamma_0(N) : \Gamma(N)] = N\phi(N) = N^2 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

comme annoncé. \square

On obtient également par multiplicativité des ordres :

Théorème 1.20. $\Gamma_0(N)$ est d'indice fini dans $SL_2(\mathbf{Z}) = \Gamma(1)$ et

$$[\Gamma(1) : \Gamma_0(N)] = \frac{[\Gamma(1) : \Gamma(N)]}{[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)]} = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

1.4.3 Cocompacité, cofinitude et pointes d'un groupe fuchsien

Définition 1.6. Un groupe fuchsien est dit cocompact dans G si le quotient $\Gamma \backslash G$ est compact. Cela revient à dire qu'il admet un domaine fondamental relativement compact.

Définition 1.7. Un groupe fuchsien est dit cofini dans G si le quotient $\Gamma \backslash G$ est d'aire finie. Cela revient à dire qu'il admet un domaine fondamental d'aire finie.

Remarque. On définit un groupe fuchsien de première espèce comme un groupe tel que le bord de \mathcal{H} , soit $\overline{\mathbf{R}}$, est contenu dans l'adhérence de chaque orbite. Un théorème de Siegel, cité dans [Bergeron, 2011, p. 13], affirme que c'est équivalent à être cofini. Intuitivement, un groupe de première espèce ne peut pas être trop petit : ses orbites sont suffisamment grandes pour être denses dans tout le bord. Typiquement, des groupes finis, par exemple $\langle \gamma \rangle$ où γ est un élément elliptique d'ordre fini, ne sont pas de première espèce : leurs orbites sont finies.

Nous nous placerons toujours sous cette hypothèse dorénavant, que cela soit mentionné ou non. La seule distinction de cas considérée est alors de savoir si le groupe est ou non cocompact.

Théorème 1.21. Un groupe fuchsien cocompact est cofini.

Les domaines fondamentaux d'actions de groupes fuchiens sont délimités par des portions de géodésiques. Si deux telles géodésiques s'intersectent sur le bord $\overline{\mathbf{R}}$, elles sont tangentes en ce point d'intersection, puisqu'elles sont orthogonales au bord. On définit donc

Définition 1.8. Soit Γ un groupe fuchsien. Une pointe d'un domaine fondamental F pour l'action d'un groupe fuchsien Γ est un point du bord. Deux pointes de Γ sont dites équivalentes si elles sont dans la même Γ -orbite.

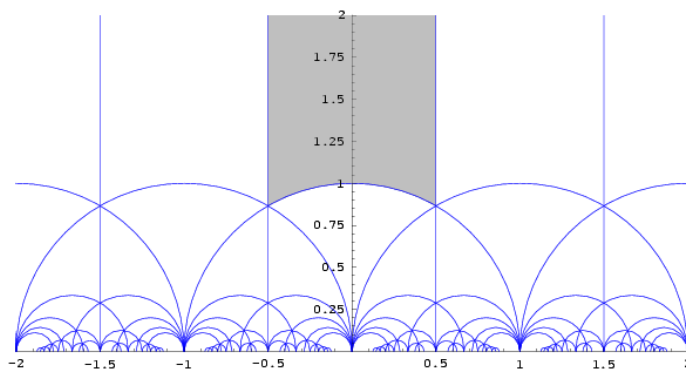


FIGURE 2 – Les pointes, toutes équivalentes, du groupe modulaire $PSL_2(\mathbf{Z})$: leur classe est $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$

L'existence de pointes est liée à l'existence d'éléments paraboliques :

Théorème 1.22. *Les pointes sont les points fixes d'éléments paraboliques. Plus précisément, si x est une pointe,*

★ Γ_x est constitué d'éléments paraboliques et de l'identité

★ dans le cas de $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbf{Z})$, $\overline{\Gamma}_x$ est monogène

★ il existe $\sigma_x \in \Gamma$ tel que pour γ_x générateur de Γ_x , $\sigma_x^{-1}\gamma_x\sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\pm 1}$

★ tous les tels « bons » conjugués sont de la forme $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\pm 1} \sigma_x$, $t \in \mathbf{R}$

PREUVE. [Bergeron, 2011, p. 13] et [Katok, 1992]

En effet, les points fixes d'éléments paraboliques sont des racines doubles de l'équation à coefficients réels $\frac{az+b}{cz+d} = z$, donc sont réels. Plus précisément, ils sont rationnels ou infini.

Réciproquement, considérons les deux bords δ_0 et δ_1 joignant en x , prolongés en les géodésiques complètes portées par les δ_i ; et $\gamma \in \Gamma_x$. γ conserve globalement ces deux géodésiques : les géodésiques sont envoyées sur des géodésiques car γ est une isométrie, et les bords sont envoyés sur des bords par définition d'un domaine fondamental, donc ça ne peut être que les deux seuls bords touchant x : δ_0 et δ_1 . Notons qu'il ne peut y avoir que deux tels bords puisqu'un domaine de Dirichlet est un polygone convexe. De plus, γ est hyperbolique ou parabolique puisqu'il fixe un réel.

Par l'absurde, supposons que γ est hyperbolique, et admet donc un deuxième point fixe x' . En notant δ la droite hyperbolique joignant x à x' , δ ne peut être situé entre δ_0 et δ_1 : autrement, quitte à changer γ par γ^{-1} , on peut supposer que $\gamma^n(x_0)$ tend vers x , où x_0 est un élément de δ intérieur à F . Ce n'est pas possible : c'est un domaine fondamental, donc un ouvert et $\gamma^n(x_0)$ serait dans F à partir d'un certain rang. Or des éléments congrus modulo Γ ne peuvent se trouver simultanément à l'intérieur, par définition. Ainsi, δ est sur un bord.

De plus, quitte à échanger γ en γ^{-1} , i.e. à changer les sens de parcours, la suite de géodésiques $\gamma^n(\delta_0)$ tend vers δ , puisque les extrémités tendent vers x et x' . Donc le côté du domaine fondamental qui est le long de δ_0 est envoyé par γ^n sur un côté de $\gamma^n(F)$ qui tend vers δ également. L'action de Γ ne serait alors pas discrète, et le groupe ne serait pas fuchsien : un voisinage compact de x' rencontrerait une infinité de $\gamma^n(F)$, contrairement aux propriétés. Ainsi, γ est parabolique : Γ_x est constitué de l'identité et de transformations paraboliques.

Γ_x est un sous-groupe monogène, considérons-en un générateur γ . Soit σ_x un élément de Γ envoyant ∞ sur x , qui existe par transitivité. Dans ce cas, $\sigma_x^{-1}\overline{\Gamma}_x\sigma_x$ est un sous-groupe discret, constitué d'éléments paraboliques, et fixant ∞ : c'est donc un groupe de translations monogène, soit

$$\sigma_x^{-1}\overline{\Gamma}_x\sigma_x = \{z \mapsto z + nt : n \in \mathbf{Z}\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & t\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

donc en conjuguant par $d_t = [\text{diag}(t^{-1/2}, t^{1/2})]$, il vient :

$$d_t\sigma_x^{-1}\overline{\Gamma}_x\sigma_x d_t^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

et $\sigma_x^{-1}\gamma\sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ quitte à échanger γ en γ^{-1} , ce qui donne le générateur « type » des groupes paraboliques, auquel on cherche toujours à se ramener. Il convient alors de se demander si les tels σ_x

Si σ est une autre telle transformation, alors

$$\sigma_x^{-1}\gamma\sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^{-1}\gamma\sigma$$

donc $\sigma\sigma_x^{-1}\gamma(\sigma\sigma_x^{-1})^{-1}$, i.e. $\sigma\sigma_x^{-1}$ commute avec γ . Puisque deux transformations qui commutent ont mêmes points fixes, $\sigma\sigma_x^{-1}$ a pour unique point fixe ∞ , c'est donc une translation, et il existe donc $t \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sigma\sigma_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ soit } \sigma = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_x$$

On obtient ainsi tous les « bons conjugués » pour γ . \square

Théorème 1.23. Γ est cocompact dans G si, et seulement si, il n'y a pas d'élément parabolique.

PREUVE. [Katok, 1992, p. 85] Puisque le groupe est cocompact, un domaine de Dirichlet F est compact. Introduisons pour les $z \in F$

$$\eta(z) := \inf\{d(z, w)(z, T(z)) : \gamma \text{ non elliptique}\}$$

Puisque $\Gamma \cdot z$ est discret, cette distance est atteinte et donc $\eta(z) > 0$. Par compacité de F , $\eta = \inf_F \eta(z)$ est atteint et donc $\eta > 0$, puisque η est atteint en un élément non elliptique, donc sans point fixe dans \mathcal{H} . Puis, pour un point quelconque z ramené dans F par une transformation S , on a $d(z, w)(z, \gamma z) = d(z, w)(Sz, S\gamma S^{-1}(Sz)) \geq \eta$, $S\gamma S^{-1}$ étant de même type que γ , de sorte que l'on peut prendre le supremum sur tout \mathcal{H} pour définir η . Or, s'il y avait une transformation parabolique, on pourrait supposer quitte à conjuguer qu'il s'agit de $z \mapsto z + 1$, d'où $\eta \leq d(z, w)(z, z + 1) \rightarrow_{y \rightarrow \infty} 0$, ce qui est absurde.

Réciproquement [Katok, 1992, p. 86], si Γ n'est pas cocompact, on peut choisir un domaine fondamental non relativement compact, soit F domaine de Dirichlet associé à p . Une géodésique passant par p est définie par sa direction l en p . Définissons $\tau(l)$ comme étant la longueur de la trace de cette géodésique dans F . Il existe au moins une direction l_0 pour laquelle $\tau(l_0)$ n'est pas finie, sans quoi F serait borné et donc \bar{F} compact. L'intersection de la géodésique définie par le couple (p, l_0) et du bord de F est alors une pointe, puisqu'elle est à distance infinie de p et dans l'adhérence de F comme limite d'une géodésique. \square

Dans le cas de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, toutes les pointes sont équivalentes, et la classe d'équivalence est $\mathbb{P}^1(\mathbf{Q})$. En effet, tous les rationnels sont équivalents à ∞ par homographies.

Cette connaissance des pointes permet de compactifier explicitement un domaine fondamental : il suffit d'y ajouter les pointes avec de bons voisinages [Iwaniec, 2002, 2.3]. Tous ces résultats sont valables pour des groupes fuchsien plus généraux. Précisons un peu cette construction, à partir de [Iwaniec, 2002, p. 40]. Un voisinage de la pointe ∞ est

$$F_\infty(Y) = [0 < \mathrm{Re} < 1, \mathrm{Im} \geq Y]$$

qui permet de définir similairement pour une pointe quelconque a :

$$F_a(Y) = \sigma_a F_\infty(Y)$$

On s'intéresse notamment à la zone centrale, qui est donc compacte, en retirant les zones cuspidales :

$$F(Y) = F \setminus \bigcup_a F_a(Y)$$

qui est incluse dans $[y \leq Y]$ et que l'on peut montrer contenir $[Y' \leq y \leq Y]$ où $YY' \geq c > 0$. Nous nous concentrons surtout sur le cas particulier de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.

2 Formes automorphes pour GL_2 sur \mathbf{Q}

Nous nous intéressons à une généralisation des fonctions périodiques dont le groupe des périodes est un groupe fuchsien, typiquement certains sous-groupes discrets Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Deux directions sont possibles :

- ★ imposer une forte régularité, l'holomorphie sur tout \mathcal{H} , mais cela nécessite de relâcher l'hypothèse de périodicité : ce sont les formes modulaires holomorphes
- ★ s'intéresser aux fonctions propres du laplacien hyperbolique : ce sont les formes de Maaß

Nous nous intéressons particulièrement à celles qui sont des fonctions propres du laplacien hyperbolique : elles sont appelées formes de Maaß. Ces fonctions ont un lien étroit avec les représentations de $L^2(\Gamma \backslash G)$, que nous mentionnerons en guise d'ouverture, sans que cela nous soit utile pour aller vers la preuve que nous exposons de la correspondance de Jacquet-Langlands. Deux cas nous intéressent principalement, ceux des groupes dits arithmétiques :

- ★ les sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$
- ★ les groupes quaternioniques $\Gamma_{\mathcal{O}}$

2.1 Fonctions et formes automorphes

Soit Γ un sous-groupe fuchsien de première espèce de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.

Définition 2.1. Une fonction Γ -automorphe de poids $k \geq 0$ est une fonction continue définie sur \mathcal{H} telle que :

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z), \forall \gamma \in \Gamma$$

Leur ensemble forme un espace vectoriel noté $A_k(\Gamma)$.

Remarque. Une fonction $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ -automorphe non nulle doit être de poids pair, autrement, avec $-I_2$ il vient

$$f(-z) = (-1)^k f(z) = -f(z)$$

et seule $f = 0$ convient.

Définition 2.2. Une forme Γ -automorphe de poids $k \geq 0$ est une fonction définie sur \mathcal{H} telle que :

- * $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \forall \gamma \in \Gamma$
- * f est holomorphe sur \mathcal{H}
- * f est holomorphe en chaque pointe de Γ

Leur ensemble forme un espace vectoriel noté $M_k(\Gamma)$, qui est de dimension finie lorsque Γ est un sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbf{Z})$.

Remarque. Les formes automorphes de poids nul sont les fonctions constantes.

Remarque. Notons que, avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R})$, que $\frac{d(gz)}{dz} = (cz+d)^{-2}$, ce qui fait que la relation d'automorphie se traduit par :

$$\ll f(z) dz^{k/2} \text{ est } \Gamma\text{-invariante} \gg$$

Explicitons la notion de régularité aux pointes pour une fonction automorphe. De sorte à ramener tous les arguments à la pointe distinguée ∞ , considérons a une pointe de Γ , et $\sigma = \sigma_a$ un élément de Γ envoyant ∞ sur a . Le sous-groupe Γ_a des éléments fixant a est envoyé par conjugaison par σ_a sur le stabilisateur de l'infini, qui est constitué de translations, de la forme

$$\Gamma_\infty = \left\langle M_h = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

On définit le facteur d'automorphie $j(\sigma, z) := (cz+d)^2$, qui permet de mieux exprimer les conditions d'automorphie. Il vérifie notamment la règle de la chaîne :

$$j(\sigma\gamma, z) = j(\sigma, \gamma z)j(\gamma, z)$$

La condition d'automorphie donne alors, $f|_\sigma(z) := (cz+d)^2 f(\sigma z) = j(\sigma, z)f(\sigma z)$,

$$\begin{aligned} f|_{\sigma^{-1}\gamma\sigma} &= f|_{\sigma\rho} = f|_\sigma(z+h) \\ &= f|_{\gamma\sigma} = f(\gamma\sigma(z))j(\gamma\sigma, z)^{-k} \\ &= f(\gamma\sigma(z))j(\gamma, \sigma(z))^{-k}j(\sigma, z)^{-k} \\ &= f|_\gamma j(\sigma, z)^{-k} = f(\sigma z)j(\sigma, z)^{-k} \\ &= f|_\sigma(z) \end{aligned}$$

Remarque. Nous avons laissé ici h quelconque, alors que nous savons que $h = 1$ dans le cas de $PSL_2(\mathbf{Z})$. Si le groupe Γ est plus général, tout ce que nous savons est que le stabilisateur de ∞ – et, à conjugaison près, de toute pointe – est constitué de translations, rendant ainsi l'argument valable dans le cas général.

et $f|_\sigma$ est donc h -périodique. Une telle périodicité permet de décomposer $f|_\sigma$ en série de Fourier, appelée développement en série de Fourier de f à la pointe a , ou encore q -développement de f en a :

$$f|_\sigma(z) = g(q = e_h(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nz/h)$$

et la régularité en ∞ pour $f|_\sigma$ se traduit par la régularité en 0 de $g(q)$, soit $a_n = 0$ pour $n < 0$. Cette notion de régularité ne dépend pas du choix de σ , deux tels σ étant conjugués par un élément du fixateur de ∞ , i.e. une translation, ne modifiant donc pas les coefficients.

Il suffit de vérifier la condition d'automorphie sur un système générateur de Γ , ce qui donne notamment dans le cas de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, qui est engendré par les classes de matrices usuelles :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Théorème 2.1. *Une fonction holomorphe et holomorphe à l'infini est modulaire, i.e. $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ -automorphe, si :*

- ★ $f(z+1) = f(z)$
- ★ $f(-1/z) = z^{2k}f(z)$

Exemple. Les séries de Eisenstein holomorphes sont un premier exemple simple de formes automorphes [Serre, 1970, ch. VII] :

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m+nz)^{-2k}$$

qui est $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ -automorphe de poids $2k$.

PREUVE. Fixons $\mathrm{Re} s > 1$. D'abord, notons qu'il y a convergence, ce qui découle du théorème de Fubini. En effet, en comparant la somme absolue sur d aux intégrales, on obtient une somme équivalente à $Cy^s(cz)^{1-2s}$. Puisque $\mathrm{Re}(2s-1) > 1$, la somme sur c converge absolument, et donc $\sum \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$ aussi.

Pour montrer que E est holomorphe, on se ramène au domaine de Dirichlet standard D quitte à traduire, ce qui est possible compte tenu de la Γ -invariance de E . Dans ce cas, on sait contrôler les dénominateurs uniformément, puisque $|z| \geq 1$ et $\mathrm{Re} z \geq -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |cz+d|^2 &= c^2 z \bar{z} + 2\mathrm{Re}(s)cd + d^2 \\ &\geq c^2 - |cd| + d^2 \\ &= ||c| + j|d||^2 \end{aligned}$$

ce qui donne la convergence uniforme sur D , et donc sur \mathcal{H} par invariance. En particulier, E est holomorphe sur \mathcal{H} .

Il reste à prouver que \mathcal{H} est holomorphe à l'infini, ce qui vient du passage à la limite terme à terme, rendu possible par la convergence normale sur \mathcal{H} , et qui montre que la limite est finie, tous les termes tendant vers 0 sauf la partie correspondant à $c = 0$. \square

Le coefficient constant de f en a s'exprime notamment par

$$\forall y \in]0, \infty[, \quad a_0 = \int_0^1 f|_{\sigma}(hx + iy) dx$$

et on définit :

Définition 2.3. Une forme Γ -automorphe de poids k f est dite *parabolique* ou *cuspidale* si en chaque pointe le coefficient constant de son q -développement est nul. On note $S_k(\Gamma)$ leur ensemble.

Cette définition présente $S_k(\Gamma)$ comme une intersection d'hyperplans de $M_k(\Gamma)$, intersection des noyaux des forme a_0^a . Cela justifie, dans le cas de $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbf{Z})$, l'intérêt particulier porté à cet espace qui est presque tout Γ , c'est un hyperplan, ainsi qu'à un exemple particulier de forme automorphe non parabolique, par exemple les séries de Eisenstein. On peut caractériser le caractère cuspidal par la croissance de la fonction :

Théorème 2.2. Une forme Γ -automorphe de poids k est parabolique si, et seulement si, $y^{k/2}|f(z)| < M_y$ est bornée sur toute droite horizontale, i.e. de manière indépendante de x .

PREUVE. [Gelbart, 1975, lemme I.5] Introduisons la fonction corrigée, avec les notations précédentes pour les développements de Fourier à la pointe :

$$h(z) = \text{Im}^{-k/2} f(z) = \text{Im}^{-k/2} g(q)$$

qui est Γ -invariante et holomorphe par automorphie de f . L'invariance permet de se ramener sans changement aucun à la pointe ∞ . Si h est bornée à l'infini, ce qui est exactement la condition de croissance du théorème sur f , c'est que f tend vers 0, en particulier reste holomorphe en la pointe.

Réciproquement, quitte à renvoyer la pointe sur une pointe finie, si f est parabolique alors elle est continue sur le compactifié – obtenu en rajoutant la pointe. Puisque $\text{Im}^{-k/2}$ l'est aussi, g l'est, et est donc bornée par compacité, ce qui donne la condition recherchée. \square

Théorème 2.3. Si f est une forme parabolique, alors on a la borne de Hecke $a_n = O(n^{k/2})$.

PREUVE. [Gelbart, 1975, théorème I.6] Les coefficients a_n sont ceux du développement de Fourier de f , disons en ∞ quitte à conjuguer. Ce permet de les exprimer à partir des formules de Cauchy :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \int_{S(0,r)} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz$$

et ce qui précède donne

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{S(0,r)} \frac{M y^{-k/2}}{z^{n+1}} dz \ll n^{k/2} \int_{S(0,r)} \frac{dz}{(x + i/n)^{n+1}}$$

avec une optimisation en $y = \frac{1}{n}$. \square

On peut définir un produit scalaire bien adapté sur les formes paraboliques :

Définition 2.4. Le produit scalaire de Petersson sur $S_k(\Gamma)$ est

$$\forall f, g \in S_k(\Gamma), (f, g)_{k, \Gamma} = \iint_{\mathbb{F}} f \overline{g} \operatorname{Im}^k d\mu = \iint_{\mathbb{F}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}$$

Ce produit scalaire fait de $S_k(\Gamma)$ un espace de Hilbert de dimension finie.

Plusieurs classes de formes automorphes pour GL_2 sur \mathbf{Q} sont connues et largement étudiées. Si nous ne nous intéressons pas particulièrement à leur étude, nous les mentionnons ici, renvoyant à [Diamond and Shurman, 2005] pour de plus amples développements :

- ★ les séries de Eisenstein, qui ne sont pas paraboliques :

$$E_k(z) = \sum_{(c,d) \neq (0,0)} (cz + d)^{-2k}$$

On en connaît la décomposition de Fourier explicitement, et on a $M_k(\Gamma) = \langle E_k \rangle \oplus S_k(\Gamma)$.

- ★ les séries de Poincaré en sont une généralisation,

$$\phi_\nu(z) = \sum_{\gamma} e(\nu \gamma(z)/q) (cz + d)^{-2k}$$

qui sont paraboliques pour $\nu \geq 1$

- ★ la fonction $\Delta = e(z) \prod_{i=1}^{\infty} (1 - e(nz))^{24}$, forme parabolique de poids 12
- ★ les fonctions Θ , de la forme

$$\Theta_Q(z) = \sum_n e(zq(n))$$

où q est une forme quadratique entière.

Dans le cas général on ne sait pas grand chose sur l'algèbre graduée des formes Γ -automorphes

$$M(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} M_k(\Gamma)$$

Toutefois, dans le cas du groupe modulaire $\Gamma = \operatorname{PSL}_2(\mathbf{Z})$, le comportement est mieux connu :

Théorème 2.4. Pour $\Gamma = \operatorname{PSL}_2(\mathbf{Z})$, on a

- ★ la somme des ordres des pôles et des zéros vaut $\frac{k}{12}$
- ★ on a $M_k = \Delta M_{k-12} \oplus E_k(z) \mathbf{C}$
- ★ M_k est vide pour $k \leq 1$, de dimension $\lfloor \frac{k}{12} \rfloor + \delta_{k \neq 2 \bmod 12}$ plus généralement
- ★ M_k admet pour base $\{G_2^a G_3^b : a, b \in \mathbf{N}, 4a + 6b = k\}$

PREUVE. [Iwaniec, 1997, p. 20] Nous admettons le premier résultat, qui résulte de calculs d'intégrales et d'applications du théorème des résidus. Donnons-nous alors $f \in M_{12}$ avec $k \geq 12$. Nous utilisons le fait que Δ ne s'annule qu'en ∞ où elle a un zéro simple. Puisque $E_{12}(\infty) \neq 0$, on peut trouver une constante c telle que $f - cE_{12}$ s'annule en l'infini, ce qui donne

$$\frac{f - cE_{12}}{\Delta} \in M_0$$

et par récurrence immédiate on a la décomposition voulue. La formule des dimensions en découle, connaissant les M_k explicitement pour $k \leq 12$.

Enfin, si $f \in M_k$, on refait le même travail avec $f - cE_4^a E_6^b$, et par récurrence on finit sur les premiers M_k pour lesquels on sait que ce sont des polynômes en E_4 et E_6 . \square

2.2 Les opérateurs de Hecke

AVERTISSEMENT. Le présent paragraphe est présent pour des raisons de complétude. La correspondance de Jacquet-Langlands s'intéresse non pas aux fonctions propres du laplacien, mais aux fonctions propres simultanément pour le laplacien et pour des opérateurs particuliers : les opérateurs de Hecke. Nous en donnons la définition et quelques propriétés, renvoyant par exemple à [Serre, 1970, VII] pour leur introduction dans le cas $SL_2(\mathbf{Z})$, et à [Diamond and Shurman, 2005, V] et [Strombergsson, 2001a] pour plus de détails en général.

Les opérateurs de Hecke sont des opérateurs particuliers, qui agissent sur les fonctions modulaires et ont de bonnes propriétés. Considérons Γ un sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$ de $SL_2(\mathbf{Z})$.

Les opérateurs de Hecke sont définis par l'action naturelle de la double classe $\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma$, soit plus explicitement :

Définition 2.5. On définit le p -opérateur de Hecke par

$$\begin{aligned} T_k(p) f &= f \Big|_{\Gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma} \\ &= p^{k-1} \sum_{\alpha > 0, \alpha d = p} \sum_{b=0}^{d-1} f \left(\frac{\alpha z + b}{d} \right) d^{-k} \end{aligned}$$

Théorème 2.5. Si f est une fonction Γ -modulaire de poids k , alors $T_p f$ l'est également. Si f est de plus holomorphe, $T_p f$ est aussi holomorphe. Si f est parabolique, $T_p f$ l'est également.

PREUVE. On a la formule explicite [Serre, 1970, p. 163]. \square

Théorème 2.6. Soient $f, g \in S_k(\Gamma)$. On a :

- ★ les T_p sont autoadjoints comme opérateurs sur $S_k(\Gamma)$, i.e. $\langle T_p f, g \rangle = \langle f, T_p g \rangle$ pour $p \nmid N$
- ★ les T_p commutent entre eux, i.e. $T_p T_q f = T_q T_p f$ pour $p, q \nmid N$

Ainsi, les opérateurs de Hecke premiers à N sont autoadjoints pour le produit scalaire de Petersson, et ils commutent entre eux pour des indices premiers. Puisque $S_k(\Gamma)$ est de dimension finie, les $T(p)$ admettent une base orthonormale de diagonalisation commune. Cette base vérifie des relations arithmétiques sur ses coefficients de Fourier :

Théorème 2.7. *Si les b_n sont les coefficients de Fourier de $T_p f$ et les a_n ceux de f , alors on a la relation*

$$\forall n \in \mathbf{Z}, b_n = \sum_{d|n \wedge p} d^{k-1} a_{np/d^2} = a_{np} + p^{k-1} a_{n/p}$$

Les images des formes modulaires par les opérateurs de Hecke donnent beaucoup d'informations sur la fonction elle-même, notamment :

Théorème 2.8 (théorème de multiplicité un). *Si deux formes $SL_2(\mathbf{Z})$ -modulaires de poids $2k$ non constantes de poids k sont fonctions propres des T_p , pour tout premier p avec les mêmes valeurs propres associées, alors elles sont proportionnelles.*

2.3 Formes de Maaß

La condition d'holomorphic imposée aux formes automorphes est importante, et permet notamment d'utiliser les outils de l'analyse complexe. Elle est aussi très contraignante, les seules fonctions Γ -invariantes et holomorphes étant les constantes. Lorsqu'on retire l'hypothèse d'holomorphic, des fonctions Γ -invariantes non constantes peuvent exister :

Définition 2.6. Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce de $SL_2(\mathbf{R})$. Une forme de Maaß pour Γ est une fonction f lisse sur \mathcal{H} telle que :

- ★ f est une fonction Γ -invariante, i.e. $\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathcal{H}, f(\gamma z) = f(z)$
- ★ f est une fonction propre du laplacien, i.e. $\exists \lambda \in \mathbf{C}, \Delta f = \lambda f$
- ★ f croît au plus polynomialement avec y

Remarque. Les conditions de régularité sur f peuvent être assez faibles. En effet, puisque Δ est un opérateur différentiel elliptique, il a un effet régularisant : toute fonction propre de classe C^2 est analytique réelle. Pour le voir, on résout l'équation de Laplace par séparation de variables, puis on exprime la solution générale obtenue sous une forme intégrale qui fait apparaître un noyau. Toutefois, si cette explication est explicite, l'effet régularisant des opérateurs d'un certain type, parmi lesquels le laplacien, semble demeurer.

Rien ne nous dit que retirer la condition d'holomorphic garantit l'existence de formes de Maaß non triviales. Dans le cas cocompact, l'existence d'une loi de Weyl permet de garantir l'existence de formes de Maaß [Muller, 2007].

Dans le cas non cocompact, il existe des pointes, ce qui nous permet de construire explicitement des exemples de formes de Maaß. Nous allons commencer par exhiber une famille particulière de formes de Maaß dans le cas de $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, nous nous intéresserons à ses propriétés de régularité et à ses coefficients, puis nous généraliserons à une pointe quelconque.

Nous savons que $z \mapsto y^s$ est une fonction propre du laplacien. Pour en tirer une fonction Γ -invariante, nous pouvons sommer sur tous les Γ -translatés modulo Γ_∞ , ce qui donne, au moins formellement, une fonction propre invariante du laplacien. Explicitement, en découplant par le PGCD,

$$\begin{aligned}
\sum_{c,d \in \mathbf{Z} \setminus (0,0)} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{c=nc_0, d=nd_0 \in \mathbf{Z}, c_0 \wedge d_0=1} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \sum_{c,d \in \mathbf{Z}, c \wedge d=1} \frac{y^s}{d_0^{2s} |c_0 z + d_0|^{2s}} \\
&= \zeta(2s) \sum_{c,d \in \mathbf{Z}, c \wedge d=1} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}}
\end{aligned}$$

Définition 2.7. La série de Eisenstein pour $SL_2(\mathbf{Z})$ est définie par

$$\forall s \in \mathbf{C}, \forall z \in \mathcal{H}, E(z, s) = \frac{1}{2} \sum_{c,d \in \mathbf{Z}, c \wedge d=1} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma} \text{Im}(\gamma z)^s$$

Remarque. Pour d'autres sous-groupes fuchsien de première espèce de $SL_2(\mathbf{R})$, quitte à changer de variables par $z \mapsto \sigma_a z$, on obtient une expression analogue pour les autres pointes, ce qui permet de définir les séries de Eisenstein associées à une pointe a :

$$\forall s \in \mathbf{C}, \forall z \in \mathcal{H}, E_a(z, s) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_a \setminus \Gamma} \text{Im}(\sigma_a^{-1} \gamma z)^s$$

Théorème 2.9. La série définissant les séries de Eisenstein est absolument convergente en s pour $\text{Re } s > 1$, et uniformément convergente sur tout compact en z .

PREUVE. Bergeron p. 90 \square

Ainsi, la convergence uniforme locale garantit que les calculs formels motivant l'introduction des séries de Eisenstein sont valables, ce qui en fait notamment une fonction propre du laplacien.

Définition 2.8. On définit la série de Eisenstein pour $SL_2(\mathbf{Z})$ complétée par

$$G(z, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{2} \sum_{m,n \in \mathbf{Z} \setminus \{(0,0)\}} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}} = \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) E(z, s)$$

Théorème 2.10. La série définissant la séries de Eisenstein complétée G pour $SL_2(\mathbf{Z})$ admet un prolongement méromorphe sur \mathbf{C} , avec deux pôles en 0 et 1, qui sont simples. Elle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$G(z, s) = G(z, 1 - s)$$

Comme toute forme de Maaß pour $SL_2(\mathbf{Z})$, les séries de Eisenstein sont Γ_{∞} -périodiques, donc en particulier admettent un développement de Fourier, disons

$$E(z, s) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_y(n, s) e(nx)$$

Théorème 2.11. *Pour $\operatorname{Re} s > 1$, la série de Eisenstein admet comme développement en série de Fourier*

$$E(z, s) = y^s + \phi(s)y^{1-s} + 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^*} \frac{|n|^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(|n|)}{\xi(2s)} \sqrt{y} K_{s-1/2}(2\pi|n|y) e(nx)$$

où $\phi(s) = \frac{\xi(2s-1)}{\xi(2s)}$.

PREUVE. Bergeron p. 93 \square

Des formes de Maaß existent donc tant dans le cas compact que non compact. On peut espérer que ces bonnes propriétés des séries de Eisenstein permettent d'obtenir plus facilement des résultats sur la décomposition des fonctions de $L^2(\Gamma \backslash G)$ suivant des formes de Maaß. Toutefois, les séries de Eisenstein ne sont pas $L^2(\Gamma \backslash G)$, et il faudra raffiner leur construction et leur utilisation pour arriver à la décomposition spectrale du laplacien sur $L^2(\Gamma \backslash G)$.

Les séries de Eisenstein admettent un prolongement analytique jusqu'à la droite $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. On peut déduire ce prolongement de son développement en série de Fourier dans le cas de $SL_2(\mathbf{Z})$, qui ne fait intervenir que des fonctions explicites dont on connaît bien le comportement : fonctions de Whittaker, fonction Γ et fonction ζ . Il reste toutefois vrai pour tout groupe fuchsien de première espèce [Iwaniec, 2002, chapitre 6].

Définition 2.9. Une forme de Maaß est dite parabolique, ou cuspidale, si son terme constant est nul.

Analoguement aux formes de Maaß générales, l'existence de formes paraboliques n'a rien d'évident : on renvoie à [Bergeron, 2011, 4.5].

2.4 Formes automorphes et représentations

AVERTISSEMENT. Comme pour la paragraphe sur les opérateurs de Hecke, ce paragraphe est présent pour des raisons de complétude. Le point de vue le plus général, vers lequel nous essayons d'aller en ouverture de ce travail, est celui des représentations, qui permet de généraliser la correspondance de Jacquet-Langlands en les conjectures de Langlands. Nous mentionnons quelques résultats permettant de saisir en quoi les fonctions modulaires et les formes de Maaß donnent lieu à des représentations des fonctions sur G et en quoi elles permettent d'aller vers une décomposition de la représentation régulière droite de $L^2(\Gamma \backslash G)$, renvoyant à [Bump, 1998] et [Gelbart, 1975] pour des exposés généraux.

On munit $L^2(\Gamma \backslash G)$ d'une mesure de Haar. Les formes automorphes et les formes de Maaß servent à décomposer de la représentation régulière droite de $L^2(\Gamma \backslash G)$: pour ce faire, il faut commencer par comprendre en quoi ces fonctions, qui sont définies sur \mathcal{H} , donnent lieu à des fonctions sur G . Grâce à la transitivité de G sur \mathcal{H} , il est possible d'écrire tout z comme un gi , g étant uniquement défini modulo K . Cela permet d'associer à toute fonction sur \mathcal{H} une fonction sur G . On pose

Définition 2.10. Pour toute forme Γ -automorphe de poids k f , on définit $\phi_f(g) := f(gi)j(g, i)^{-k}$.

Théorème 2.12. Pour une forme cuspidale f fixée, on a les propriétés suivantes sur ϕ_f :

- * $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g), \forall \gamma \in \Gamma$
- * $\phi_f(g r_\theta) = e^{-ik\theta} \phi_f(g), \forall \theta \in \mathbf{R}$
- * ϕ_f est à croissance modérée
- * si f est parabolique, ϕ_f est bornée, donc appartient à $L^2(\Gamma \backslash G)$
- * si f est parabolique, ϕ_f est parabolique, i.e. $\forall g \in G, \forall \sigma \in SL_2(\mathbf{Z}), \int_0^1 \phi_f \left(\begin{pmatrix} 1 & xh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = 0$
- * $\Delta_k \phi_f = -\frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \phi_f$, i.e. ϕ_f est fonction propre du laplacien
- * ϕ est un isomorphisme linéaire de $S_k(\Gamma)$ et les telles fonctions de $L^2(\Gamma \backslash SL_2(\mathbf{R}))$

PREUVE. Voir [Gelbart, 1975] \square

Définition 2.11. Les fonctions de la somme directe algébrique des telles fonctions

$$L_{\text{cusp}}^2 = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} L_{\text{cusp},k}^2$$

sont appelées formes Γ -automorphes sur G .

L'objectif est de décomposer la représentation régulière droite R . Puisque le laplacien Δ commute avec la représentation, ses sous-espaces propres vont être des sous-représentations, et nous avons vu que les formes paraboliques étaient des fonctions propres du laplacien : décomposer la représentation et obtenir des formes paraboliques sont donc deux aspects du même problème.

Le dual unitaire de $SL_2(\mathbf{R})$ est constitué des représentations suivantes :

- * la représentation triviale
- * les séries principales paires π_s^+
- * les séries principales impaires π_s^-
- * les séries complémentaires π_s^c
- * les séries discrètes π_k^\pm , pour $k \geq 2$
- * les limites de séries discrètes π_1^\pm

3 Un peu de théorie spectrale

3.1 La décomposition spectrale du laplacien

On veut relier représentations, spectre et géométrie, il faut donc préciser ce qu'on entend par « spectre » et les propriétés qu'on lui connaît. Le cadre est celui de l'action naturelle de $G = SL_2(\mathbf{R})$ sur \mathcal{H} par homographies, action transitive de stabilisateur en l'identité égal à $K = SO_2(\mathbf{R})$, soit $\mathcal{H} \cong G/K$.

Le laplacien hyperbolique est donné par les formules générales sur le laplacien sur une surface de Riemann, $\Delta = -y^2 (\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2)$. Les éléments de $SL_2(\mathbf{R})$ sont les isométries hyperboliques, et sont ceux qui conservent le laplacien : Δ est invariant par l'action.

Théorème 3.1. *Le laplacien hyperbolique vérifie de bonnes propriétés sur $C^\infty(Y)$:*

- * Δ est symétrique, i.e. $\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle$
- * Δ est positif, i.e. $\langle \Delta f, f \rangle \geq 0$
- * on peut étendre Δ à tout $L^2(Y)$ de manière symétrique

PREUVE. Ces résultats s'obtiennent essentiellement grâce à ce domaine fondamental et à la formule de Stokes [Iwaniec, 2002, p. 63]. Un domaine de définition de Δ est $\{f \in \mathcal{B} : \Delta f \in \mathcal{B}\}$, qui est dense dans L^2 , faisant que Δ admet un unique prolongement à tout L^2 , comme opérateur autoadjoint positif.

Le théorème de Stokes donne

$$\langle \Delta f, g \rangle = \int_{\mathbb{F}} \Delta f \bar{g} d\mu_z = \int_{\partial \mathbb{F}} \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \bar{g} dl - \int_{\mathbb{F}} \Delta f \bar{\Delta g} dx dy$$

et l'intégrale sur le bord est nulle par le théorème de structure sur les domaines fondamentaux de Dirichlet : ce sont des polygones aux côtés allant par paires, une paire étant d'intégrale nulle puisque : les deux côtés de la paire sont congrus, les fonctions automorphes sont donc constantes globalement dessus ; et le sens de parcours étant opposé. D'où :

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, g \rangle &= \int_{\mathbb{F}} \nabla f \bar{\nabla g} dx dy = \int_{\mathbb{F}} \bar{\nabla f} \nabla g dx dy = \langle f, \Delta g \rangle \\ \langle \Delta f, f \rangle &= \int_{\mathbb{F}} \nabla f \bar{\nabla f} dx dy = \int_{\mathbb{F}} |\nabla f|^2 dx dy \geq 0 \end{aligned}$$

La nouvelle expression obtenue avec la formule de Stokes permet ainsi de vérifier les résultats annoncés. \square

On peut alors se demander s'il existe un théorème spectral pour Δ dans notre cadre automorphe, i.e. s'il existe un système orthonormé complet de $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ constitué de formes propres de Maaß de Δ . Une autre question est de savoir si l'opérateur est à trace, i.e. de trace finie. On pourra alors chercher à exprimer cette trace, ce qui est l'objet de la formule des traces. Déjà, si λ , écrit sous forme $\lambda = s(1-s)$ qui sera plus utile pour les calculs et pour voir les symétries, est valeur propre du laplacien, les propriétés précédentes prouvent que

$$\lambda > 0 \quad \text{soit} \quad s \in \frac{1}{2} + i\mathbf{R} \cup [0, 1]$$

On connaît également quelques familles de valeurs propres particulières pour Δ , ainsi que le présente [Bergeron, 2011, 3.2]. Toutefois, ce ne sont pas des formes de Maaß ni des formes automorphes.

Plusieurs problèmes se posent : notamment, Δ n'est pas un opérateur borné, déjà dans \mathbf{R} : le système $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ donnant un système de fonctions propres aux valeurs propres associées divergentes. La solution est d'introduire de bons opérateurs intégraux à noyaux, compacts et auto-adjoints, qui commutent avec Δ , et se servir de la décomposition de l'espace ainsi obtenue, qui s'applique aussi à Δ par commutativité, et que l'on espère être assez intéressante pour qu'elle fournisse une décomposition du laplacien satisfaisante.

Ces opérateurs sont les opérateurs à noyau k radial, *i.e.* tels que $k(z, w) = f(d(z, w))$, qui font apparaître l'importance du noyau automorphe K associé :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{H}, T_k f(z) &:= \int_{\mathcal{H}} k(z, w) f(w) dw \\ &= \int_{\mathbb{F}} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma w) f(\gamma w) \right) dw \\ &= \int_{\mathbb{F}} K(z, w) f(w) dw \quad \text{où} \quad K(z, w) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma w) \end{aligned}$$

En plus de commuter avec le laplacien, ces opérateurs permettent d'en obtenir les valeurs propres :

Théorème 3.2. *Les fonctions propres du laplacien sont fonctions propres des opérateurs intégraux invariants. Plus précisément, pour tout noyau k il existe une fonction h telle que*

$$\Delta f = \lambda f \implies T_k f = h(\lambda) f$$

Réciproquement, une fonction qui est propre pour tous les T_k est également propre pour le laplacien.

PREUVE. Nous renvoyons aux théorèmes 3.7 et 3.8 de [Bergeron, 2011]. \square

On peut se demander quel est le rapport entre les valeurs propres de Δ et celles de T_k , *i.e.* se poser le problème de l'explicitation de la fonction h , qui a priori peut être très erratique. Il suffit pour cela de trouver explicitement des fonctions propres pour toute valeur propre λ , la seule inconnue restant étant $h(\lambda)$, on pourra ainsi la déterminer. Avec les $y^\lambda = y^{1/2+ir}$, on a

$$h(r) = \int_{\mathcal{H}} k(z, i) y^{1/2+ir} d\mu(z)$$

Avec les calculs de transformations intégrales rappelés en annexes, et menés en [Bergeron, 2011, 3.4, p. 60], on obtient les expressions explicites :

$$\begin{aligned} h(r) &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iru} \int_{|u|}^{\infty} \frac{k(\rho) \sinh(\rho)}{\sqrt{\cosh \rho - \cosh u}} d\rho du \\ g(u) &:= \sqrt{2} \int_{|u|}^{\infty} \frac{k(\rho) \sinh(\rho)}{\sqrt{\cosh \rho - \cosh u}} d\rho \\ k(\rho) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dg(u)}{\sqrt{\cosh u - \cosh \rho}} \end{aligned}$$

et, notamment, toutes les fonctions usuelles peuvent être choisies pour h (ou pour g , ou pour k), grâce aux formules d'inversions intégrales, dès que des conditions de décroissance assez fortes sont vérifiées.

3.2 Un spectre discret sur \mathcal{C}

Un premier résultat permet d'isoler l'étude sur les formes paraboliques :

Théorème 3.3. *L'espace $\mathcal{C}(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ des formes paraboliques est stable par les T_k .*

PREUVE. Il suffit de constater que le terme constant de l'image d'une forme parabolique est nul :

$$\begin{aligned}
 c_0(T_k f)(y) &= \int_0^1 T_k f(\sigma_a n_t z) dt && \text{par définition du terme constant} \\
 &= \int_0^1 \int_{\mathcal{H}} k(\sigma_a n_t z, w) d(w) dw dt && \text{par définition de } T_k \\
 &= \int_{\mathcal{H}} k(z, w) \left(\int_0^1 f(\sigma_a n_t w) dt \right) dw && \text{via } w \leftarrow \sigma_a n_t w \text{ et l'invariance de } k \\
 &= \int_{\mathcal{H}} k(z, w) f_a(\text{Im}(w)) dw \\
 &= 0 && \text{puisque } f \text{ est parabolique}
 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu. \square

Si la surface $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ est compacte, les noyaux k sont bornés et donc les opérateurs sont compacts. Lorsque la surface n'est plus compacte, il faut être un peu plus précis. Pour obtenir un opérateur compact, il faut soustraire au noyau k les parties principales, *i.e.* au voisinage des pointes du domaine : en effet, malheureusement, le noyau K n'est pas borné, il explose à proximité des pointes : k est à support compact autour de 0, mais lorsque z et w sont proches d'une pointe a , z et γw sont également proches, comme on le voit pour le cas $a = \infty$, auquel on se ramène quitte à conjuguer :

$$d(z, \gamma w) = d(z, w + t) \leq d(z, w) + d(w, w + t) \leq d(z, w) + \frac{t}{y}$$

et pour $w = x + iy$ proche de ∞ , *i.e.* pour y grand, un nombre de plus en plus grand de t permet de rester dans le support de k , chacun y entrant pour y assez grand et $d(z, w)$ assez petit. En effet, intuitivement plus on est haut dans la pointe, si on pense au cas $SL_2(\mathbf{Z})$, plus les points sont proches du point fixe ∞ , donc moins ils vont être écartés par les éléments paraboliques.

Il faut donc soustraire au noyau la contribution problématique de ces zones, contributions appelées parties principales aux pointes :

Définition 3.1. La partie principale de K à la pointe a est

$$H_a(z, w) = \sum_{\gamma \in \Gamma_a \backslash \Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, \sigma_a n(t) \sigma_a^{-1} \gamma w) dt$$

C'est une fonction automorphe en w .

Ainsi on écrit

$$K = \widehat{K} + \sum_{\alpha} H_{\alpha}$$

et l'étude du noyau se ramène à deux études : celle de \widehat{K} et celle des H_{α} . La barrière créée par la non-convergence des parties principales du noyau est en réalité illusoire, car ces parties principales ne contribuent pas à l'action sur les formes paraboliques :

Théorème 3.4. *La partie principale $H_{\alpha}(z, \cdot)$ est orthogonale aux formes paraboliques, i.e.*

$$\forall z \in \mathcal{H}, \langle H_{\alpha}(z, \cdot), \mathcal{C}(\Gamma \setminus \mathcal{H}) \rangle = \{0\}$$

PREUVE. Quitte à conjuguer pour ramener la pointe à $\alpha = \infty$, on a :

$$\begin{aligned} \langle H_{\alpha}(z, \cdot) \rangle &= \int_{\Gamma_{\infty} \setminus \Gamma_{\neq B}} H_{\alpha}(z, \gamma w) \overline{f(\gamma w)} dw \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^1 H_{\alpha}(z, \gamma w) \overline{f(\gamma w)} dy dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, n_t w) dt \overline{f(\gamma w)} dy dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, t + iy) dt \int_0^1 \overline{f(\gamma w)} dx dv / v^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque f est parabolique. \square

Cela fait, nous considérons la partie agissant réellement sur \mathcal{C} , à savoir le noyau modifié $\widehat{K} := K - \sum_{\alpha} H_{\alpha}$. Le théorème permet de dire que $T_K f = T_{\widehat{K}} f$, et de plus :

Théorème 3.5. *Le noyau \widehat{K} est borné.*

PREUVE. [Iwaniec, 2002, p. 67] Puisque k est à support compact, seule la contribution des termes paraboliques est significative :

$$K(z, w) = \sum_{\gamma} k(z, \gamma w) + O(1)$$

On en tire que l'on peut exprimer la partie principale uniquement avec les termes correspondant aux transformations paraboliques, soit

$$H_{\alpha}(z, w) = \int_{-\infty}^{\infty} k(z, \sigma_{\alpha} n(t) \sigma_{\alpha}^{-1} w) dt + O(1)$$

ce qui donne

$$\widehat{K}(z, w) = \sum_{\alpha} J_{\alpha}(z, w) + O(1)$$

où on pose

$$J_a(z, w) = \sum_{\gamma \in \Gamma_a} k(z, \gamma w) - \int_{-\infty}^{\infty} k(z, \sigma_a n(t) \sigma_a^{-1} w) dt$$

Il reste à prouver que ce reste est borné sur F^2 , ce qui est le cas par la formule d'Euler-Mac Laurin :

$$\begin{aligned} J_a(\sigma_a z, \sigma_a w) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} k(z, w + n) - \int_{-\infty}^{\infty} k(z, w + t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dk(z, w + t) \\ &\ll \int_0^{\infty} |k'| \\ &\ll 1 \end{aligned}$$

□

Puisque la noyau est borné et que la surface est cofinie, il est également L^2 . Il vient :

Théorème 3.6. $T_{\widehat{\mathcal{K}}}$ est un opérateur compact.

PREUVE. C'est le théorème de Hilbert-Schmidt, $\widehat{\mathcal{K}}$ étant borné. □

De cela on déduit que $\overline{\text{Im } T_{\widehat{\mathcal{K}}}}$ admet une décomposition hilbertienne suivant un système orthonormé complet de fonctions propres de $T_{\widehat{\mathcal{K}}}$. Puisque Δ commute avec les $T_{\widehat{\mathcal{K}}}$, les sous-espaces propres des $T_{\widehat{\mathcal{K}}}$ sont stables par Δ . Cela donne que $\overline{\text{Im } T_{\widehat{\mathcal{K}}}}$ admet une décomposition formée de sous-espaces stables de Δ . Il reste à prouver que l'on peut trouver un tel opérateur d'image dense dans \mathcal{C} , ce qui est le cas pour la résolvante ou pour le noyau de la chaleur, voir [Bergeron, 2011, Iwaniec, 2002].

Théorème 3.7. L'opérateur de noyau la fonction de Green est d'image dense de \mathcal{C} dans $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

PREUVE. [Iwaniec, 2002, p. 68] □

Les T_f se réduisent donc diagonalement dans L^2 , autrement dit on peut écrire L^2 comme somme directe hilbertienne de sous-espaces propres communs à tous les T_f , par le théorème spectral, et ces espaces propres sont de dimension finie par compacité. Puisque Δ commute avec eux, ces sous-espaces sont aussi stables par Δ . Or l'induit est symétrique en dimension finie, donc diagonalisable en base orthonormée. Ainsi : L^2 se décompose en somme directe hilbertienne de sous-espaces propres de Δ .

On en déduit finalement la décomposition spectrale du laplacien sur l'espace des formes paraboliques, qui est purement discrète :

Théorème 3.8. L'espace $\mathcal{C}(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ admet une décomposition hilbertienne en sous-espaces propres du laplacien Δ . Ces sous-espaces propres sont de dimensions finies. Si $(u_k)_k$ est une base hilbertienne formée de formes paraboliques, toute fonction de $\mathcal{C}(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ se décompose sous la forme

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, u_k \rangle u_k$$

On peut également prouver d'autres résultats :

Théorème 3.9. *La suite des valeurs propres du laplacien hyperbolique vérifie :*

- * $\lambda_i \rightarrow \infty$
- * $\sum \lambda_i^{-2} < \infty$

PREUVE. Voir dans [Iwaniec, 2002] \square

On a alors

$$\text{Tr}\Gamma_k = \sum_i h(t_i)$$

3.3 Un spectre continu sur \mathcal{E}

Il reste maintenant à étudier une éventuelle décomposition spectrale du laplacien sur le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{C}(\Gamma \backslash \mathcal{H})$. Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions et outils. Les séries de Eisenstein à la pointe a sont usuellement définies par

$$E_a(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_a \backslash \Gamma} \text{Im}^s \sigma_a^{-1} \gamma z$$

Ce sont des fonctions automorphes particulièrement intéressantes : puisque $z \mapsto y^s$ est une fonction propre du laplacien hyperbolique, en intégrant on obtient que $E_a(z, s)$ est aussi fonction propre. Toutefois, il se peut qu'il n'y ait pas convergence de cette série, et nous définissons les séries de Eisenstein incomplètes :

Définition 3.2. La série de Eisenstein incomplète définie à la pointe a par la fonction ψ à support compact est

$$E_a(z|\psi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_a \backslash \Gamma} \psi(\text{Im} \sigma_a^{-1} \gamma z)$$

On note $\mathcal{E}(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ l'espace engendré par ces séries de Eisenstein incomplètes.

Dans ce cas, il n'y a plus de problème de convergence, on obtient même une fonction automorphe bornée, mais on perd le caractère propre de ces fonctions automorphes.

Théorème 3.10. *Les espaces de Eisenstein en a sont des sous-espaces propres du laplacien, plus précisément :*

$$\Delta E_a = E_a M \quad \text{où} \quad Mf(r) = - \left(r^2 + \frac{1}{4} \right) f(r)$$

PREUVE. Il suffit d'appliquer le laplacien sous l'intégrale, se servant du fait que les E_a sont "fonctions propres". [Bergeron, 2011, p. 68] \square

On s'intéresse à une expression de $E_a(z|\psi)$ en fonction des $E_a(z, s)$ qui ont de meilleures propriétés.

Théorème 3.11. En notant $\widehat{\psi}$ la transformée de Mellin de ψ :

$$\widehat{\psi}(s) = \int_0^\infty \psi(y)y^{-s-1} dy,$$

on a l'expression :

$$\forall \text{Re}(s) > 1, E_a(z|\psi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } s = \sigma} E_a(z, s) \widehat{\psi}(s) ds$$

Théorème 3.12. \mathcal{C} et \mathcal{E} sont orthogonalement supplémentaires dans l'espace des fonctions automorphes bornées \mathcal{B} .

PREUVE. Prenons $f \in \mathcal{B}$ et ψ une fonction lisse à support compact et \mathfrak{a} une pointe de $\Gamma \backslash \mathcal{H}$, alors

$$\begin{aligned} \langle f, E_a(\cdot|\psi) \rangle &= \int_{\mathbb{F}} f(Z) \sum_{\gamma \in \Gamma_a \backslash \Gamma} \overline{\psi}(\text{Im } \sigma_a^{-1} \gamma z) d\mu(z) \\ z \mapsto \gamma^{-1} \sigma_a z &= \sum_{\gamma \in \Gamma_a \backslash \Gamma} \int_{\sigma_a^{-1} \gamma F} f(\sigma_a z) \overline{\psi}(y) d\mu(z) \\ &= \int_{0 < \text{Re} < 1} f(\sigma_a z) \overline{\psi}(y) d\mu(z) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(\sigma_a z) dx \right) \overline{\psi}(y) \frac{dy}{y^2} \\ &= \int_0^\infty a_0^{\mathfrak{a}}(f) \overline{\psi}(y) \frac{dy}{y^2} \end{aligned}$$

cette dernière expression faisant apparaître le coefficient constant à la pointe \mathfrak{a} . Les formes paraboliques sont donc orthogonales à l'espace de Eisenstein \mathcal{E} . Réciproquement, une fonction f orthogonale à \mathcal{E} vérifie cette condition pour toute fonction ψ , cela revient à dire que ses coefficients constants sont nuls en toutes pointes, *i.e.* que f est paraboliques. \square

Ainsi, puisque la décomposition spectrale du laplacien est déjà connue sur \mathcal{C} , il suffit de faire de même sur \mathcal{E} . On va se servir de l'expression intégrale donnée par les résultats précédents pour décomposer spectralement les $E_a(z|\psi)$.

3.4 La transformation de Eisenstein

\mathcal{E} est engendré par les séries de Eisenstein incomplètes E_a , donc il suffit de décomposer les telles séries.

Nous connaissons la formulation intégrale *via* la transformée de Mellin :

$$E_a(z|\psi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } s = \sigma} \widehat{\psi}(s) E_a(z, s) ds$$

où l'intégrale converge absolument pour $\sigma > 1$. Les estimations connues sur $\widehat{\psi}$ et des résultats d'analyse complexe, explicités dans [Iwaniec, 2002, p. 101] permettent de bouger l'intégrale jusqu'à $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, ce qui fait apparaître les résidus relatifs aux pôles traversés par le contour d'intégration :

$$E_a(z|\psi) = \sum_{1/2 \leq s_k \leq 1} \widehat{\psi}(s_k) u_{aj}(z) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s) E_a(z, s) ds$$

Cette expression montre que le reste du travail à fournir est sur l'intégrale sur la droite $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Définition 3.3. On définit la transformation de Eisenstein sur $C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ par

$$\begin{aligned} E_a : C_0^\infty(\mathbf{R}^+) &\longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma \backslash \mathcal{H}) \\ f &\longmapsto z \mapsto \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty f(r) E_a(z, 1/2 + ir) dr \end{aligned}$$

Pour les calculs, de sorte à ne pas avoir à justifier des convergences d'intégrales qui ne sont pas nécessairement connues, nous utilisons les séries de Eisenstein tronquées, à l'image de ce qui a été fait pour la décomposition spectrale sur \mathcal{C} :

Définition 3.4. On définit la transformation de Eisenstein sur $C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ par

$$\begin{aligned} E_a^Y : C_0^\infty(\mathbf{R}^+) &\longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma \backslash \mathcal{H}) \\ f &\longmapsto z \mapsto \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty f(r) E_a^Y(z, 1/2 + ir) dr \end{aligned}$$

Cela suffira en passant à la limite $Y \rightarrow \infty$ à la fin des calculs. Pour mener à bien ces calculs, le principal outil est :

Théorème 3.13 (Formule de Maaß-Selberg, [Bergeron, 2011]). *Pour deux complexes distincts $s = \sigma + ir$ et $s' = \sigma + ir'$ tels que $r + r' \neq 0$, on a :*

$$\begin{aligned} \langle E^Y(z, s), E^Y(z, s') \rangle &= \frac{1}{i(r+r')} \phi(\sigma - ir') Y^{i(r+r')} - \frac{1}{i(r+r')} \phi(\sigma + ir) Y^{-i(r+r')} \\ &+ \frac{1}{2\sigma - 1 + i(r-r')} Y^{2\sigma - 1 + i(r-r')} \\ &- \frac{1}{2\sigma - 1 + i(r-r')} \phi(\sigma + ir) \phi(\sigma - ir') Y^{1 - 2\sigma - i(r-r')} \end{aligned}$$

PREUVE. Voir [Iwaniec, 2002, p. 101]. \square

Théorème 3.14. *Pour f et g dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ et a et b deux pointes, on a*

$$\langle E_a f, E_b g \rangle = \delta_{ab} \langle f, g \rangle$$

3.5 La décomposition spectrale sur \mathcal{E}

On a une décomposition partielle de l'espace \mathcal{E} en somme directe orthogonale de sous-espaces stables du laplacien :

Théorème 3.15. *On a la décomposition :*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{1/2 \leq s_k \leq 1} \mathcal{R}_k \oplus \bigoplus_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}$$

PREUVE. Les \mathcal{E}_{α} sont orthogonaux entre eux par le résultat qui précède, venant de la formule de Maaß-Selberg. Puis les résidus provenant du déplacement du contour d'intégration sont orthogonaux aux \mathcal{E}_{α} car :

- ★ les valeurs propres des E_{α} sont de la forme $r^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$
- ★ les valeurs propres en $\sigma > \frac{1}{2}$ sont de la forme $\lambda_k = s_k(1 - s_k) < \frac{1}{4}$

Ce qui fait que les sous-espaces propres associés sont orthogonaux. \square

Nous sommes ainsi en mesure de terminer la décomposition spectrale du laplacien sur \mathcal{E} . En effet, nous avons :

$$E_{\alpha}(z|\psi) = \sum_{1/2 \leq s_k \leq 1} \widehat{\psi}(s_k) u_{aj}(z) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } s = \frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s) E_{\alpha}(z, s) ds$$

qui n'est pas encore la décomposition spectrale voulue, les coefficients n'étant pas les projections (EXPLIQUER). On transforme donc l'intégrale grâce à l'équation fonctionnelle, pour obtenir :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } s = \frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s) E_{\alpha}(z, s) ds = \sum_b \frac{1}{4i\pi} \int_{\text{Re } s = \frac{1}{2}} \langle E_{\alpha}(\cdot|\psi), E_b(\cdot, s) \rangle E_b(z, s) ds$$

Puis la décomposition de l'espace de Eisenstein précédemment prouvée permet d'obtenir la décomposition spectrale recherchée :

Théorème 3.16. *On a la décomposition spectrale*

$$\mathcal{E} = \mathcal{R} \oplus \bigoplus_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}$$

Le spectre du laplacien sur \mathcal{R} est fini et inclus dans $[0, \frac{1}{4}[$. Le spectre du laplacien sur \mathcal{E}_{α} est continu, paramétré par $[\frac{1}{4}, \infty[$ avec des espaces propres de multiplicités 1. Toute forme de Maaß de \mathcal{E} se décompose donc en

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, u_k \rangle u_k + \sum_{\alpha} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle f, E_{\alpha} \left(\cdot, \frac{1}{2} + ir \right) \right\rangle E_{\alpha} \left(\cdot, \frac{1}{2} + ir \right) dr$$

Remarque. Le spectre du laplacien a une partie que l'on dit « continue ». En réalité, ce n'est pas un spectre à proprement parler : il existe une « base » de décomposition continue, justifiant la dénomination par analogie, mais les séries de Eisenstein intervenant dans la décomposition ne sont pas des valeurs propres du laplacien.

On connaît donc les projections des noyaux automorphes :

$$\begin{aligned}\langle K(\cdot, w), u_k \rangle &= h(r_k) \overline{u_k}(w) \\ \langle K(\cdot, w), E_a\left(\cdot, \frac{1}{2} + ir\right) \rangle &= h(r) \overline{E_a}\left(w, \frac{1}{2} + ir\right)\end{aligned}$$

Théorème 3.17 (Décomposition spectrale des noyaux automorphes). *On a la décomposition spectrale explicite des noyaux automorphes, qui converge uniformément sur tout compact :*

$$K(z, w) = \sum_k h(r_k) u_k(z) \overline{u_k}(w) + \sum_a \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) E_a\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) \overline{E_a}\left(w, \frac{1}{2} + ir\right) dr$$

où E_a est la série de Eisenstein associée à la pointe a :

$$E_a(z, s) = \sum_{\Gamma_a \backslash \Gamma} \left(\text{Im} \left(\sigma_a^{-1} \right)^s \right)$$

3.6 Théorèmes spectraux pour les formes automorphes

On sait donner une décomposition spectrale relative au laplacien Δ dans les espaces $C(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ et dans $E(\Gamma \backslash \mathcal{H})$, ce qui permet d'obtenir la décomposition spectrale globale qui servira dans pour les noyaux automorphes :

Dans $C(\Gamma \backslash \mathcal{H})$, on a la décomposition spectrale suivante, qui converge uniformément sur tout compact si f est dans D :

$$f(z) = \sum_k \langle f, u_k \rangle u_k(z)$$

Dans $E(\Gamma \backslash \mathcal{H})$, on a la décomposition spectrale suivante, qui converge uniformément sur tout compact si f est dans D :

$$f(z) = \sum_k \langle f, u_k \rangle u_k(z) + \sum_a \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, E_a\left(\cdot, \frac{1}{2} + ir\right) \rangle E_a\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) dr$$

Et on a $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H}) = \overline{C} \oplus \overline{E}$, d'où :

Théorème 3.18. *On a la décomposition spectrale sur tout L^2 :*

$$f(z) = \sum_k \langle f, u_k \rangle u_k(z) + \sum_a \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, E_a\left(\cdot, \frac{1}{2} + ir\right) \rangle E_a\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) dr$$

4 La correspondance de Jacquet-Langlands

La cadre est désormais suffisamment explicité pour énoncer et aborder la preuve de la correspondance de Jacquet-Langlands.

4.1 Formulation

Le programme de Langlands vise à relier la théorie des nombres à l'analyse harmonique sur certains espaces, typiquement les surfaces hyperboliques auxquelles nous nous intéressons, qui sont construites de manière arithmétique, obtenues comme quotients de \mathcal{H} par $\Gamma_{a,b}$ ou $\Gamma_0(N)$. La correspondance de Jacquet-Langlands va en ce sens, en établissant une correspondance entre les spectres du laplacien hyperbolique sur ces différentes surfaces.

Nous revoyons à la partie VI sur les algèbres de quaternions sur \mathbf{Q} pour les définitions, exemples et preuves utilisées dans la suite, que nous considérons comme des outils. Soit \mathcal{O} un ordre maximal d'une algèbre de quaternions A de discriminant $d_A > 1$. Dans ce cas, le groupe $\Gamma_{a,b}$ est cocompact. On note h une fonction-test typique de la formule des traces, *i.e.* une fonction paire et holomorphe sur $[\text{Im} < \frac{1}{2} + \varepsilon]$ vérifiant la propriété de décroissance uniforme $h(r) = O\left(\left(1 + |r|^2\right)^{-(1+\varepsilon)}\right)$, qui est une hypothèse suffisante pour utiliser les résultats précédents de théorie spectrale et pour pouvoir appliquer la formule des traces développée dans la section suivante.

Commençons par rappeler les définitions des formes primitives et des formes paraboliques anciennes :

Définition 4.1. Une forme ancienne pour $\Gamma_0(d_A)$ est une forme de Maaß de la forme $\tilde{f}(z) = f_0(dz)$ pour une forme parabolique f_0 pour $\Gamma_0(m)$, où $m \mid d_A$. Pour que cette \tilde{f} soit $\Gamma_0(m)$ -invariante, il faut que $d \mid \frac{d_A}{m}$.

L'espace des formes de Maaß primitives est l'orthogonal de l'espace des formes anciennes.

Le résultat qui suit est une égalité distributionnelle, *i.e.* pondérée par certaines fonctions-tests, qui permettra de comparer les spectres *via* le choix de bonnes fonctions-tests.

Théorème 4.1 (correspondance de Jacquet-Langlands sur les distributions). *Avec ces hypothèses sur h , en notant C_{prim} l'espace des formes de Maaß primitives, on a*

$$\sum_{f_k \in L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus C_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k)$$

Ce qui permet d'aboutir à la tant cherchée correspondance :

Théorème 4.2 (correspondance de Jacquet-Langlands). *L'ensemble des valeurs propres non nulles et comptées avec multiplicités du laplacien hyperbolique dans $L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})$ est égal à l'ensemble des valeurs propres comptées avec multiplicités associées aux formes de Maaß primitives dans $L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})$. Autrement dit, le spectre non nul des surfaces arithmétiques quaternioniques est exactement le spectre primitif parabolique des surfaces de congruence. En particulier, on a l'inclusion spectrale :*

$$Sp\left(\Delta_{\mathcal{H}}, L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})\right) \subseteq Sp\left(\Delta_{\mathcal{H}}, L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})\right)$$

Les résultats de l'un peuvent donc se généraliser à l'autre, ce qui permet de choisir le cadre le mieux connu pour prouver les résultats.

Remarque. Cette version de la correspondance de Jacquet-Langlands est plus faible que la version originale, de [Jacquet, 1972, Jacquet and Langlands, 1970]. En effet, il existe non seulement une correspondance entre les valeurs propres du laplacien hyperbolique dans $L^2(Y_{a,b})$ et certaines valeurs propres dans $L^2(Y_0(N))$, mais la correspondance est encore vraie pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke, [Bolte and Johansson, 1999, théorème 5.2]. Le résultat est encore meilleur qu'on ne le croit : Bolte et Johansson [Bolte and Johansson, 1996] ont mis au point une construction explicite qui donne des fonctions propres du laplacien dans $L^2(Y_0(N))$ à partir de fonctions propres du laplacien dans $L^2(Y_{a,b})$.

Remarque. L'interprétation géométrique des termes de la formule des traces est donnée dans la section suivante, sur la formule des traces de Selberg. Notons d'ores et déjà une interprétation de la correspondance de Jacquet-Langlands, déjà annoncée en introduction : il y a le même nombre de géodésiques dans la surface $Y_{a,b}$ que de géodésiques premières dans la surface $Y_0(N)$.

4.1.1 L'égalité distributionnelle des spectres

Nous voulons prouver :

Théorème 4.3 (Correspondance globale de Jacquet-Langlands).

$$\sum_{f_k \in L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k)$$

Pour prouver l'égalité distributionnelle des spectres, on va ramener l'égalité spectrale à une égalité entre parties géométriques grâce à la formule des traces de Selberg. Nous renvoyons à la partie V sur la formule des traces pour les détails, nous expliciterons le résultat lorsqu'il sera nécessaire dans cette partie, l'essentiel demeure de comprendre que cette formule des traces permet de relier le spectre global $\sum_k h(r_k)$ qui nous intéresse à des quantités géométriques, que l'on est souvent capables de mieux comprendre, parfois d'expliciter. Il faut toutefois savoir relier la partie primitive du spectre au spectre total sur les $\Gamma_0(m)$, seul que l'on sait exprimer *via* la formule des traces, ce qui exploite de nombreux petits calculs de convolution dont les règles sont rappelées en annexes :

Théorème 4.4. Avec $\beta = \mu \star \mu = \tau^{-1}$, on a

$$\sum_{f_k \in \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \setminus \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{m \mid d_A} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) \sum_{f_k \in \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \setminus \mathcal{H})} h(r_k)$$

PREUVE. À une forme de Maaß primitive $f_0 \in \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(m) \setminus \mathcal{H})$ donnée, correspondent exactement les formes anciennes $\tilde{f}(z) = f_0(dz)$ de $\Gamma_0(d_A)$ données par $d \mid \frac{d_A}{m}$: il y en a donc $\tau(d_A/m)$. Par définition, l'espace des formes de Maaß primitives est l'orthogonal de l'espace des formes anciennes.

Notons $\delta(m, \lambda)$ la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(C(\Gamma_0(m) \setminus \mathcal{H}))$ des formes de Maaß propres associées à λ , et $\delta'(m, \lambda)$ la dimension du sous-espace des telles formes de Maaß propres primitives. Avec la correspondance qui précède, il vient donc par récurrence immédiate :

$$C(\Gamma_0(d_A) \setminus \mathcal{H}) = \mathcal{C}_{\text{prim}} \oplus \mathcal{C}_a = \bigoplus_{m \mid d_A} \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(m) \setminus \mathcal{H})$$

et on obtient la relation sur les dimensions, que l'on sait être finies :

$$\delta(d_A, \lambda) = \sum_{m \mid d_A} \tau \left(\frac{d_A}{m} \right) \delta'(m, \lambda)$$

Cette formule revient à la convolution $\delta = \tau \star \delta'$, soit en inversant $\delta' = \beta \star \delta$:

$$\delta'(d_A, \lambda) = \sum_{m \mid d_A} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) \delta(m, \lambda)$$

En groupant les éléments de la partie spectrale que l'on cherche à évaluer par valeur propre, *i.e.* en faisant des paquets de taille $\delta(m, \lambda)$ pour chaque valeur propre λ , on obtient la formule voulue avec le résultat qui précède sur les dimensions :

$$\begin{aligned} \sum_{k, f \in \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \setminus \mathcal{H}) \text{ pour } r_k} h(r_k) &= \sum_{r_k} \sum_{f \in \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \setminus \mathcal{H}) \text{ pour } r_k} h(r_k) \\ &= \sum_{r_k} h(r_k) \delta'(d_A, \lambda_k) \\ &= \sum_{r_k} h(r_k) \sum_{m \mid d_A} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) \delta(m, \lambda_k) \\ &= \sum_{r_k} h(r_k) \sum_{m \mid d_A} \sum_{f \in \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \setminus \mathcal{H}) \text{ pour } r_k} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) \\ &= \sum_{m \mid d_A} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) \sum_{r_k} \sum_{f \in \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \setminus \mathcal{H}) \text{ pour } r_k} h(r_k) \\ &= \sum_{m \mid d_A} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) \sum_{k, f \in \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \setminus \mathcal{H}) \text{ pour } r_k} h(r_k) \end{aligned}$$

Ce qui achève de ramener le spectre global des formes primitives pour $\Gamma_0(d_A)$ aux spectres globaux des formes générales pour les sous-groupes $\Gamma_0(m)$. \square

Il reste à prendre en compte les formes constantes pour avoir une reformulation de notre partie spectrale relative aux surfaces de congruence. Pour cela, on utilise le petit calcul de convolution $\beta \star 1 = \mu \star \mu \star 1 = \mu$, qui fait qu'on peut intégrer la partie $h(r_0)$ correspondant à la valeur propre constante dans la formule précédente, puisque $\sum_{m|d_A} \beta(d_A/m) = 1$ car d_A est un discriminant, donc produit d'un nombre pair de premiers distincts. On a donc bien :

$$\begin{aligned} \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k) &= h(r_0) + \sum_{f_k \in \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k) \\ &= h(r_0) + \sum_{m|d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) \sum_{f_k \in \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \backslash \mathcal{H})} h(r_k) \\ &= \sum_{m|d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \backslash \mathcal{H})} h(r_k) \end{aligned}$$

Il reste donc, pour obtenir l'égalité globale annoncée, à prouver que

Théorème 4.5.

$$\sum_{m|d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \backslash \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{f_k \in L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})} h(r_k)$$

Or la formule des traces permet justement d'explicitier chacun de ces deux termes en fonction de quantités géométriques, dont on va pouvoir montrer qu'elles vérifient chacune la même relation terme par terme, ce qui suffit à conclure. On note

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots$$

les valeurs propres du spectre discret, ordonnées de manière croissante, du laplacien hyperbolique. On note comme usuellement $\lambda_k = \frac{1}{4} + r_k^2$ où r_k est choisi parmi l'une des deux possibilités de sorte à obtenir λ_k . On peut par exemple supposer que $r_k \in i\mathbf{R}_+ \cup]0, \frac{1}{2}]$.

Rappelons les deux formules des traces qui nous intéressent ici :

Théorème 4.6. *Si les $\lambda_k = r_k^2 + \frac{1}{4}$ sont les valeurs propres comptées avec multiplicités du laplacien hyperbolique dans $L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{H})$, alors avec $A(\Gamma_{\mathcal{O}})$ l'aire d'un domaine fondamental de $\Gamma_{\mathcal{O}}$ pour l'action sur \mathcal{H} , m_t l'ordre d'un élément primitif elliptique de trace t , g la transformée de Fourier de h , $E(t, \mathcal{O}^1)$ le nombre de \mathcal{O}^1 -classes de conjugaison des éléments de trace t et de norme 1, et E' le nombre de telles classes primitives :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} h(r_k) &= \frac{A(\Gamma_{\mathcal{O}})}{4\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \cdot r \operatorname{th}(\pi r) dr}_{G_{\text{id}}} \\ &+ \sum_{t=0,1} \frac{E'(t, \mathcal{O}^1)}{2m_t} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_t-1} \frac{1}{\sin(k\pi/m_t)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{e^{-2k\pi r/m_t}}{1+e^{-2\pi r}} dr}_{G_{\text{ellipt}}(t)} \\ &+ \sum_{t=3}^{+\infty} E'(t, \mathcal{O}^1) \underbrace{\cosh^{-1}(t/2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(2k \cosh^{-1}(t/2))}{\operatorname{sh}(k \cosh^{-1}(t/2))}}_{G_{\text{hyp}}(t)} \end{aligned}$$

Théorème 4.7. *Si les $\lambda_k = r_k^2 + \frac{1}{4}$ sont les valeurs propres comptées avec multiplicités du laplacien hyperbolique dans $L^2(\Gamma_0(N) \setminus \mathcal{H})$, alors avec les mêmes notations et pour N sans facteur carré :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} h(r_k) &= \frac{A(\Gamma_0(N))}{4\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \cdot r \operatorname{th}(\pi r) dr}_{G_{\text{id}}} \\ &+ \sum_{t=0,1} \frac{E'(t, \Gamma_0(N))}{2m_t} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_t-1} \frac{1}{\sin(k\pi/m_t)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{e^{-2k\pi r/m_t}}{1+e^{-2\pi r}} dr}_{G_{\text{ellipt}}(t)} \\ &+ \sum_{t=3}^{+\infty} E'(t, \Gamma_0(N)) \underbrace{\cosh^{-1}(t/2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(2k \cosh^{-1}(t/2))}{\operatorname{sh}(k \cosh^{-1}(t/2))}}_{G_{\text{hyp}}(t)} \\ &+ 2^{\omega(N)} \underbrace{\left[g(0) \log\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ir\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1 + ir) \right) dr \right]}_{G_{\text{spectre}}} \\ &+ 2^{\omega(N)} \underbrace{\left[2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} g(2 \log(n)) - \sum_{p|N} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log p}{p^k} g(2k \log(p)) \right]}_{G_{\text{parab}}} \end{aligned}$$

Les termes provenant de l'identité, des éléments elliptiques et hyperboliques sont appelés la partie compacte de la formule des traces. Les autres termes forment la partie non compacte et suffiront, pour les calculs à suivre, sous la forme $\tau(N) \left(C + \sum_{p|N} f(p) \right)$, avec

$$C = g(0) \log\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{2} + ir \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} (1 + ir) \right) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} g(2 \log(n))$$

et

$$f(p) = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log p}{p^k} g(2k \log(p))$$

Notons que $\tau(N)$ est le nombre de pointes de $\Gamma_0(N)$, ce qui montre bien la contribution identique de chaque pointe à la formule des traces, tant par les éléments paraboliques que par la partie continue du spectre. On va alors prouver la même relation terme à terme, pour chaque terme dépendant des groupes.

Pour les termes provenant de l'identité, il s'agit de prouver que

Théorème 4.8. *On a*

$$A(\Gamma_{\mathcal{O}}) = \sum_{m|d_{\Lambda}} \beta\left(\frac{d_{\Lambda}}{m}\right) A(\Gamma_0(m))$$

PREUVE. Nous connaissons ces aires :

$$A(\Gamma_{\mathcal{O}}) = \frac{\pi}{3} \prod_{p|d_{\Lambda}} (p-1) = \frac{\pi}{3} d_{\Lambda} \prod_{p|d_{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$A(\Gamma_0(m)) = \frac{\pi}{3} \prod_{p|m} (p+1) = \frac{\pi}{3} m \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

On peut alors transformer l'identité recherchée par inversion de Mobius :

$$\begin{aligned} d_{\Lambda} \prod_{p|d_{\Lambda}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \sum_{m|d_{\Lambda}} \beta\left(\frac{d_{\Lambda}}{m}\right) m \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ \text{i.e. } d_{\Lambda} \prod_{p|d_{\Lambda}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) &= \sum_{m|d_{\Lambda}} \tau\left(\frac{d_{\Lambda}}{m}\right) m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ \text{i.e. } d_{\Lambda} \prod_{p|d_{\Lambda}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) &= \sum_{m|d_{\Lambda}} \sum_{d'|m} d' \prod_{p|d'} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

La dernière ligne provenant du jeu d'écriture, où $F(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

On a également :

$$\begin{aligned}
\sum_{m \mid d_A} \tau\left(\frac{d_A}{m}\right) F(m) &= \sum_{d_A = mq_1} \tau(q_1) F(m) \\
&= \sum_{d_A = mq_2 q_3} F(m) \\
&= \sum_{Q = mq_2} \sum_{Q \mid d_A} \sum_{m \mid Q} F(m)
\end{aligned}$$

qui est l'explicitation de la convolution $\tau \star F = (\mathbf{1} \star \mathbf{1}) \star F = \mathbf{1} \star (\mathbf{1} \star F)$.

Maintenant, la dernière formulation obtenue est une identité entre fonctions multiplicatives, il suffit donc de la vérifier sur les nombres premiers, auquel cas les produits sont réduits à un terme et la formule est immédiate :

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \{1, p\}} \sum_{d' \mid m} d' \prod_{p \mid d'} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= p \left(1 - \frac{1}{p}\right) + 1 + 1 \\
&= p + 1 \\
&= p \left(1 + \frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

comme souhaité \square

Il reste à regarder les termes non triviaux. Au vu des formules des traces précédemment rappelées, il suffit de prouver la relation pour les nombres de classes de conjugaison, seuls termes dépendant du groupe dans la formule des traces. On regarde les cas hyperbolique et elliptique d'abord : ils sont analogues et se traitent de la même manière, comme dans les calculs pour obtenir la formule des traces.

Pour le cas hyperbolique, *i.e.* le cas où la trace est $t > 2$,

Théorème 4.9. *On a*

$$E'(t, \mathcal{O}^1) = \sum_{m \mid d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) E'(t, \Gamma_0(m))$$

PREUVE. En partitionnant par la trace de l'élément primitif associé, on obtient que, Γ étant un groupe quaternionique ou de congruence :

$$E(t, \Gamma) = \sum_{s \leq t} E'(s, \mathbf{1}, \Gamma)$$

En effet, on a $\text{cl}(\gamma) = \text{cl}(\gamma') \iff \text{cl}(\gamma^r) = \text{cl}(\gamma'^r)$ pour tout $r \geq 1$, puisque la conjugaison est un morphisme. En revenant aux éléments primitifs, avec $\gamma = \gamma_0^r$ et puisque les puissances d'un primitif sont non conjuguées, on obtient qu'à une classe d'équivalence correspond exactement une classe d'équivalence de primitif.

Puisque $E(3, 1, \Gamma) = E'(3, 1, \Gamma)$, les traces étant au moins égales à 3 (le résultat reste trivialement vrai dans le cas elliptique, la seule trace possible étant 1, et les paraboliques ne nous concernent pas ici puisqu'ils n'apparaissent pas dans la formule des traces sous cette forme), une récurrence à l'aide de la formule précédente prouve qu'il suffit de montrer la relation pour les éléments non primitifs, *i.e.*

$$E(t, \mathcal{O}^1) = \sum_{m \mid d_A} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) E(t, \Gamma_0(m))$$

On s'intéresse au nombre de classes modulo \mathcal{O}^1 d'éléments de trace t et de norme 1. Un tel élément a pour polynôme minimal $X^2 - tX + 1$. Considérons le corps quadratique K sur \mathbf{Q} engendré par ce polynôme irréductible, c'est un corps totalement réel. Notons que l'extension quadratique est entièrement déterminée par t , ce qui justifie que dans le cas de l'extension quadratique $\mathbf{Q}[\gamma]$ pour γ de trace t et de norme 1, le résultat ne dépend que de t , et non pas précisément de γ . C'est grâce à ces remarques que l'on peut relier nombre de classes de transformations modulo \mathcal{O}^1 et nombre de plongements optimaux modulo \mathcal{O}^1 :

Lemme 5. *Si $\gamma \in \mathcal{O}$, $\gamma \notin Z_A \cong \mathbf{Q}$, $\text{tr}(\gamma) = t$, $N(\gamma) = 1$, on a*

$$E(t, \mathcal{O}^1) = \sum_{Z[\gamma] \subseteq \Omega} E(\Omega, \mathcal{O}^1)$$

la somme portant sur les ordres Ω de $\mathbf{Q}[\gamma]$ contenant $Z[\gamma]$.

PREUVE. [Bergeron, 2011, lemme 8.14] Soit γ un tel élément. Alors, $\mathbf{Q}[\gamma]$ est une sous-algèbre commutative de A , nécessairement de dimension 2 car sinon ce serait A qui n'est pas commutative : c'est donc une extension quadratique. Admettons, ainsi que [Bergeron, 2011, 8.3], que les tels plongements sont en bijection avec les classes de γ modulo A^* , notée $\{\gamma\}_{A^*}$.

Maintenant, puisque \mathcal{O} est un ordre de $\mathbf{Q}[\gamma]$, pour tous $\alpha \in A^*$, $\alpha^{-1}\mathcal{O}\alpha \cap \mathbf{Q}[\gamma]$ est un ordre de $\mathbf{Q}[\gamma]$. On peut donc partitionner $\{\gamma\}_{A^*}$ par ces ordres, soit

$$\{\gamma\}_{A^*} = \bigsqcup_{\Omega} C(\gamma, \Omega) \quad \text{où} \quad C(\gamma, \Omega) = \{\alpha^{-1}\gamma\alpha : \alpha \in A^*, \mathbf{Q}[\gamma] \cap \alpha^{-1}\mathcal{O}\alpha = \Omega\}$$

Cette réunion est bien disjointe, sinon il y aurait deux conjugués de γ égaux, soient $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ et $\beta^{-1}\gamma\beta$ donnant deux ordres différents. Mais dans ce cas, $\alpha\beta^{-1}$ commute à γ , donc $\mathbf{Q}[\gamma, \alpha\beta^{-1}]$ est encore commutative, donc ne peut être que de dimension 2, donc c'est $\mathbf{Q}[\gamma]$, donc $\alpha\beta^{-1} \in \mathbf{Q}[\gamma]$, et donc

$$\mathbf{Q}[\gamma] \cap \alpha^{-1}\mathcal{O}\alpha = (\alpha^{-1}\beta)(\mathbf{Q}[\gamma] \cap \alpha^{-1}\mathcal{O}\alpha)(\alpha^{-1}\beta)^{-1} = \mathbf{Q}[\gamma] \cap \beta^{-1}\mathcal{O}\beta$$

Les éléments de $C(\gamma, \Omega)$ sont les plongements optimaux de Ω dans \mathcal{O} , ce qui donne le résultat. \square

Ce qui montre qu'il suffit de prouver la relation pour le nombre de plongements optimaux :

$$E(\Omega, \mathcal{O}^1) = \sum_{m \mid d_A} \beta \left(\frac{d_A}{m} \right) E(\Omega, \Gamma_0(m))$$

Ainsi, si elle est vraie pour les $E(\Omega, \mathcal{O}^1)$, elle reste vraie pour les $E(t, \Gamma)$, et donc aussi pour les $E'(t, \Gamma)$.

Il reste à prouver cette relation pour le nombre de plongements optimaux. Le théorème de dénombrement des plongements optimaux donne que cette relation est équivalente à :

$$\prod_{p \mid d_A} \left(1 - \left(\frac{\Omega}{p}\right)\right) = \sum_{m \mid d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) \prod_{p \mid m} \left(1 + \left(\frac{\Omega}{p}\right)\right)$$

où on rappelle que :

$$\left(\frac{\Omega}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left(\frac{D}{p}\right) = 1 \text{ ou } \Omega_p \text{ non maximal dans } K_p \\ -1 & \text{si } \left(\frac{D}{p}\right) = -1 \\ 0 & \text{si } \left(\frac{D}{p}\right) = 0 \end{cases}$$

Évaluons les deux termes. Puisque d_A est un discriminant non trivial, il est sans facteur carré et est produit d'un nombre pair de nombres premiers, disons $2r$. Pour $p \mid d_A$, on peut avoir le symbole $\left(\frac{\Omega}{p}\right)$ qui vaut 1 (notons k leur nombre), 0 (notons e leur nombre) ou -1 (qui sont donc $2r - e - k$). Nous voilà donc capable d'évaluer chacun des deux termes précédents. Les termes non nuls et intéressants du membre de gauche sont ceux correspondant à $\left(\frac{\Omega}{p}\right) = -1$, et le produit est nul dès qu'un des $\left(\frac{\Omega}{p}\right)$ vaut 1 :

$$\prod_{p \mid d_A} \left(1 - \left(\frac{\Omega}{p}\right)\right) = 2^{2r-e} \delta_{k=0}$$

Les termes non nuls dans la somme du membre de droite sont ceux tels que $\left(\frac{\Omega}{p}\right) \neq -1$, ce qui fait $k + e$ nombres premiers concernés. En écrivant toutes les sommes possibles, *i.e.* tous les produits possibles de ces $k + e$ nombres premiers, on obtient, avec $\beta(p_1 \cdots p_l) = (-2)^l$ et la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \sum_{m \mid d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) \prod_{p \mid m} \left(1 + \left(\frac{\Omega}{p}\right)\right) &= \sum_{j=0}^e \sum_{i=0}^k (-2)^{2r-i-j} 2^{ij} \binom{k}{i} \binom{e}{j} \\ &= 2^{2r-e} \sum_{j=0}^e (-1)^j 2^{e-j} \binom{e}{j} \sum_{i=0}^k (-1)^k \binom{k}{i} \\ &= 2^{2r-e} \delta_{k=0} \end{aligned}$$

ce qui fait que les deux termes sont bien égaux. \square

Vient alors le tour des termes non compacts. Il n'y en a pas dans les $\Gamma_{\mathcal{O}}$ qui sont cocompacts, il faut donc prouver que leur apport est nul du côté des $\Gamma_0(m)$. Or ces termes paraboliques sont, dans la formule des traces, tous de la forme

$$\tau(\mathfrak{m}) \left(C + \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{m}} f(\mathfrak{p}) \right)$$

Dans notre cas, on a justement

Théorème 4.10.

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{m} | d_A} \beta \left(\frac{d_A}{\mathfrak{m}} \right) \tau(\mathfrak{m}) &= 0 \\ \sum_{\mathfrak{m} | d_A} \beta \left(\frac{d_A}{\mathfrak{m}} \right) \tau(\mathfrak{m}) \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{m}} f(\mathfrak{p}) &= 0 \end{aligned}$$

PREUVE. La relation revient à écrire $\beta \star \tau = \delta$ et $d_A > 1$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{m} | d_A} \beta \left(\frac{d_A}{\mathfrak{m}} \right) \tau(\mathfrak{m}) \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{m}} f(\mathfrak{p}) &= \sum_{\mathfrak{p} | d_A} f(\mathfrak{p}) \sum_{\mathfrak{m} | \frac{d_A}{\mathfrak{p}}} \beta \left(\frac{d_A}{\mathfrak{m}\mathfrak{p}} \right) \tau(\mathfrak{m}\mathfrak{p}) \\ &= 2 \sum_{\mathfrak{p} | d_A} f(\mathfrak{p}) \sum_{\mathfrak{m} | \frac{d_A}{\mathfrak{p}}} \beta \left(\frac{d_A/\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}} \right) \tau(\mathfrak{m}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui termine de prouver la correspondance pondérée globale entre les spectres. \square

Nous avons donc prouvé :

$$\sum_{f_k \in L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{f_k \in C \oplus C_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k)$$

4.1.2 La correspondance de Jacquet-Langlands

Pour obtenir l'identité ponctuelle des spectres, il reste à choisir de bonnes fonctions h , dans l'idéal pour « sélectionner » une seule valeur propre ainsi que sa multiplicité. Essayons d'isoler la contribution de λ_* , ce qui reviendrait à prendre $h : \delta_{\lambda_*}$. Toutefois cette fonction ne vérifie pas les propriétés supposées au début de la partie, nécessaires pour appliquer la formule des traces. Cela amène à considérer plutôt la fonction approchée de sélection

$$h_T(r) = \exp \left(-T \left(r^2 - r_*^2 \right)^2 \right)$$

qui vérifie bien les propriétés de décroissance rapide des fonctions-tests. Notons que le spectre est discret : du côté de $\Gamma_0(d_A)$, on ne regarde que les paraboliques pour lesquels le spectre est discret par les résultats de la partie II; et pour l'autre cas, $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est cocompact donc le spectre est également discret. On peut donc trouver un $\delta > 0$ qui isole λ_* , i.e. tel que $|\lambda - \lambda_*| \geq \delta$ pour toute valeur propre $\lambda \neq \lambda_*$, ce qui fait que $h_T(r) < e^{-T\delta^2/2} h_1(r)$, avec h_1 en particulier

intégrable. Les contributions des $\lambda \neq \lambda_*$ seront donc négligeables devant celles des fonctions propres correspondant à λ_* lorsque T tend vers l'infini. Écrivons notre correspondance globale, en séparant λ_* des autres valeurs propres :

$$\begin{aligned} \sum_{f_k \in L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})} h_T(r_k) &= \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h_T(r_k) \\ \text{i.e. } \sum_{f_k \in E_{\lambda^*}} 1 + \sum_{f_k \in L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})} \frac{h_T(r_k)}{h_1(r_k)} h_1(r_k) &= \sum_{f_k \in E_{\lambda^*}} 1 + \sum_{f_k \in \mathbf{C} \oplus \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} \frac{h_T(r_k)}{h_1(r_k)} h_1(r_k) \\ \text{i.e. } \text{mult}_{L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})}(\lambda^*) + O\left(e^{-T\delta^2/2}\right) &= \text{mult}_{L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})}(\lambda^*) + O\left(e^{-T\delta^2/2}\right) \\ \text{donc } \text{mult}_{L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})}(\lambda^*) &= \text{mult}_{L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})}(\lambda^*) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat pour chaque valeur propre de chacun des deux spectres : elles apparaissent avec mêmes multiplicités dans chacun des deux cas. \square

4.2 La conjecture de Selberg

On reprend ici quelques réflexions et présentations de l'article [Sarnak, 1995]. On ne sait pas prouver la conjecture de Selberg :

Conjecture 1 (Selberg).

$$\lambda_1(\Gamma_0(n) \backslash \mathcal{H}) \geq \frac{1}{4}$$

mais on a un résultat plus faible :

Théorème 4.11 (Luo-Rudnick-Sarnack).

$$\lambda_1(\Gamma_0(n) \backslash \mathcal{H}) \geq \frac{5}{36}$$

PREUVE. Nous renvoyons à l'article original [?] ou à [Bergeron, 2011, III.9, III.10 et VI] pour des commentaires et quelques résultats. \square

Et grâce à la correspondance de Jacquet-Langlands, les valeurs propres dans $L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})$ sont des valeurs propres de $L^2(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})$, donc la conjecture se transmettrait à ce cas, ainsi que le résultat affaibli :

Conjecture 2 (Selberg).

$$\lambda_1(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H}) \geq \frac{1}{4}$$

et en tous cas on a :

$$\lambda_1(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H}) \geq \frac{5}{36}$$

Ainsi, en tissant une équivalence quantitative entre les comportements spectraux des cas quaternionique et de congruence, la correspondance de Jacquet-Langlands permet de transmettre des résultats de l'un des points de vue vers l'autre : les outils et les idées peuvent devenir fructueux dans les deux cadres.

5 Formules des traces

La formule des traces de Selberg est une connexion quantitative explicite entre le spectre du laplacien sur l'espace $L^2(\Gamma \backslash G)$ et sa géométrie.

C'est un outil qui permet de déduire des relations entre spectres ou entre géométries en prouvant des relations sur l'autre aspect, en fonction de ce qui est le mieux connu. Typiquement, on obtient des inclusions spectrales à partir de comparaisons géométriques, mieux maîtrisées et plus explicites, ou encore des égalités entre quantités géométriques a priori distinctes en comparant différentes formules de traces.

Pour essayer de comprendre le fonctionnement de la preuve et de donner une intuition de la formule des traces, commençons pour nous intéresser au cas d'une surface hyperbolique $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ compacte, cas dans lequel tous les problèmes techniques, notamment de convergence, disparaissent.

5.1 Idées de la formule des traces & formule de prétrace

On s'intéresse à la décomposition de la représentation régulière droite de $G = SL_2(\mathbf{R})$ sur $L^2(\Gamma \backslash G)$, qui est entièrement décomposable, ce qui permet d'écrire

$$L^2(\Gamma \backslash G) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) \pi$$

où \widehat{G} est le dual unitaire de G , *i.e.* l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles unitaires. Nous renvoyons à notre partie 2.4 pour un rappel de la composition de ce dual unitaire. Les multiplicités sont parfois nulles, de sorte à ce que cette « somme directe » soit une véritable somme directe, *i.e.* sur un ensemble effectif discret.

On définit pour une fonction f , disons continue à support compact,

$$R(f) = \int_G f(g) R(g) dg$$

où dg est une mesure de Haar fixée. En sommant la décomposition obtenue pour G , et en pondérant par $f(g)$, qui ne dépend pas de π , on obtient la même décomposition pour $R(f)$, qui a priori n'était pas entièrement décomposable :

$$R(f) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) \pi(f)$$

Cela permet d'obtenir une expression pour la trace de l'opérateur :

$$\text{Tr} R(f) = \sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\pi \text{Tr}(\pi(f))$$

qui est le coté général spectral de la formule des traces.

Avec $\phi \in L^2(\Gamma \backslash G)$, on a

$$R(f)(\phi)(x) = \int_{\Gamma \backslash G} K(x, g) \phi(g) dg \quad \text{où} \quad K(g, h) = K_f(g, h) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(g^{-1}\gamma h)$$

faisant apparaître le noyau automorphe de Selberg K .

La trace d'un noyau K est la trace de l'opérateur intégral à noyau défini par K , *i.e.* son intégrale sur la diagonale si elle existe :

$$\text{Tr}(K) = \int_{\Gamma \backslash G} K_f(g, g) dg$$

L'opérateur est notamment à trace lorsqu'il est de Hilbert-Schmidt, *i.e.* lorsque le noyau est L^2 , en particulier borné. C'est le cas lorsque f est par exemple lisse à support compact.

Nous avons une expression qui est une intégrale sur $\Gamma \backslash G$ plutôt que sur notre surface hyperbolique usuelle $\Gamma \backslash \mathcal{H}$. Pour remédier à cela, il faudrait pouvoir quotienter par K . Pour cela, K doit être bi- K -invariant, *i.e.* f doit être invariante à droite et à gauche. Par la décomposition de Cartan, $G = KAK$, cette hypothèse revient à ce que f soit une fonction sur $A \cong \mathbf{R}$. Essentiellement, cela revient à considérer que f est une fonction de la distance, $f(x, y) = f(d(x, y))$. Supposons-le désormais, de sorte que :

$$\text{Tr}(K) = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H} \cong \mathbb{F}} K_f(z, z) d\mu(z)$$

La décomposition spectrale donne que nous avons obtenue précédemment, puisque nous sommes dans le cas compact donc sans spectre continu, donne avec $(u_i)_i$ un système orthonormé complet de formes de Maaß :

$$K(z, w) = \sum_k h(r_k) u_k(z) \overline{u_k(w)}$$

ce qui permet d'expliciter la trace de K , puisque les u_k forment une famille L^2 -orthonormée :

Théorème 5.1. Avec $h(r) = \sqrt{2} \int_x^\infty e^{iru} \int_{|u|^\infty} \frac{k(\rho) \sinh(\rho)}{\sqrt{\cosh \rho - \cosh u}} d\rho du$, on a

$$\text{Tr}(K) = \int_{\mathbb{F}} K(z, z) d\mu(z) = \sum_k h(r_k)$$

Il s'agit du *côté spectral* de la formule des traces pour le noyau automorphe K .

D'un autre côté, on peut aussi développer cette trace en

$$\text{Tr}R(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathbb{F}} k(z, \gamma z) d\mu(z)$$

Il s'agit d'un *côté pré-géométrique*, qui ne semble pas très manipulable sous cette forme, mais qui est une expression faisant intervenir non pas le spectre mais bien les transformations de l'espace \mathcal{H} . L'identité que l'on a écrite est la *formule de prétrace* :

Théorème 5.2. *On a*

$$\sum_k h(r_k) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_F k(z, \gamma z) d\mu(z)$$

On développe alors en faisant apparaître les similarités géométriques : les types d'éléments – identité, paraboliques, hyperboliques, elliptiques – sont conservés au sein d'une même classe de conjugaison, on va donc essayer de découper par classes de conjugaison de manière à pouvoir apprécier les contributions de chaque type d'élément plus explicitement et obtenir un côté exprimable par des invariants géométriques. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \text{Tr}K_C &= \int_F \sum_{\gamma' \in C} k(z, \gamma' z) d\mu(z) = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} \sum_{\tau \in Z(\gamma) \backslash \Gamma} k(z, \tau^{-1} \gamma \tau z) \\ &= \int_{Z(\gamma) \backslash \mathcal{H}} k(z, \gamma z) d\mu(z) \end{aligned}$$

par changement de variable $\gamma \longleftarrow \tau \gamma \tau^{-1}$ et par invariance de la mesure $d\mu$.

Cette expression de la trace est bien propre à la classe de conjugaison. On va donc pouvoir se ramener aux représentants simples de chaque type d'élément modulo conjugaison :

- * un élément parabolique est conjugué à un élément de N , *i.e.* à une translation $z \mapsto z + t$
- * un élément hyperbolique est conjugué à un élément de A , *i.e.* à une homothétie $z \mapsto pz$
- * un élément elliptique est conjugué à un élément de K , *i.e.* à une rotation $z \mapsto r_\theta \cdot z$

Faire cette réduction va permettre de simplifier les termes et donc de développer plus avant la formule de prétrace, et permettra aussi une interprétation géométrique de chaque terme intervenant dans la formule des traces.

On considère l'action par conjugaison, on note $\gamma \cdot \tau := \gamma \tau \gamma^{-1}$, et $\Gamma \cdot \tau = \Gamma \tau$ la classe de conjugaison de τ . On note K_C le noyau restreint aux éléments de la classe de conjugaison $C = \Gamma \gamma$, et Γ_γ le centralisateur de γ , de sorte que $C = \Gamma \gamma \cong Z_\gamma \backslash \Gamma$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \text{Tr}R(f) &= \int_{\Gamma \backslash G} K(z, z) d\mu(z) \\ &= \sum_{C=\{\gamma\}} \text{Tr}K_C \\ &= \int_{\Gamma \backslash G} \sum_{\{\gamma\}} \sum_{\delta \in \Gamma_\gamma \backslash \Gamma} f(x^{-1} \delta^{-1} \gamma \delta x) dx \\ &= \sum_{\{\gamma\}} \int_{\Gamma \backslash G} \int_{\Gamma_\gamma \backslash \Gamma} f((\delta x)^{-1} \gamma (\delta x)) d(\delta x) \\ &= \sum_{t=\delta x \in \Gamma_\gamma \backslash G} \int_{\{\gamma\}} \int_{\Gamma_\gamma \backslash G} f(g^{-1} \gamma g) dg \\ &= \sum_{t=t' u, t \in \Gamma_\gamma \backslash G, u \in \Gamma_\gamma \backslash \gamma} \mu(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1} \gamma g) dg \end{aligned}$$

par invariance de la mesure $d\mu$. C'est la formule de prétrace géométrique :

Théorème 5.3 (Formule de prétrace). *On a*

$$\text{Tr}R(f) = \sum_{\pi \in \widehat{G}} m_{\pi} \text{Tr}(\pi(f)) = \sum_{\{\gamma\}} \mu(\Gamma_{\gamma} \backslash G_{\gamma}) \int_{G_{\gamma} \backslash G} f(g^{-1}\gamma g) dg$$

5.2 Analogie avec le cas réel

La formule de prétrace obtenue n'est que la généralisation de la classique formule de Poisson en dimension 1. En effet, dans ce cas, $G = \mathbf{R}$, $\Gamma = \mathbf{Z}$, les classes de conjugaison sont triviales, les centralisateurs sont tout G , et $\widehat{\mathbf{R}}^{\text{unit}} = \{e_{\lambda} = e^{-i\lambda} : \lambda \in \mathbf{R}\}$ par la transformation de Fourier. La partie spectrale de la formule des traces est alors, selon la décomposition précédente :

$$\text{Tre}_{\lambda}(f) = \sum_{\lambda \in \widehat{\mathbf{R}}} \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{\lambda y} dy = \sum_{\lambda} \widehat{f}(\lambda)$$

Et la partie géométrique est, puisque tout commute et que $\Gamma_{\gamma} = G_{\gamma} = \{\text{id}\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\{\gamma\}=\gamma} \text{vol}(\Gamma_{\gamma} \backslash G_{\gamma}) \int_{G_{\gamma} \backslash G} f(x^{-1}\gamma x) dx &= K(x, y) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} f(x + m - x) \\ &= \sum_{\{\gamma\}} f(\gamma) \end{aligned}$$

On retrouve la formule de Poisson dans le cas des fonctions périodiques, où le spectre est réduit à \mathbf{Z} par l'analyse de Fourier :

$$L^2(\mathbf{Z} \backslash \mathbf{R}) \cong \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \mathbf{C}e_m$$

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} f(m) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(m)$$

5.3 La partie spectrale compacte, purement discrète

K est un noyau automorphe attaché à une fonction k lisse, *i.e.* $K(z, w) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma z)$.

Il reste à estimer plus précisément ce qu'est le côté géométrique de la formule de prétrace. Pour cela, nous allons nous attacher à préciser la contribution de chaque classe de conjugaison d'élément, et donc nous intéresser aux quatre types de transformations qui ont chacune leur type de contribution propre : identité, hyperboliques, paraboliques et elliptiques. Les transformations paraboliques sont caractéristiques du cas non compact.

5.3.1 L'identité

Dans ce cas, la classe est réduite à $C = \{\text{id}\}$, donc puisque $k(z, w) = f(\rho(z, w))$:

$$\text{Tr}K_C = \int_{\mathcal{F}} k(z, z) d\mu(z) = f(0) \int_{\mathcal{F}} d\mu(z) = f(0) A(\mathcal{F})$$

où $A(\mathcal{F})$ est l'aire d'un domaine fondamental pour Γ dans \mathcal{H} . La valeur de $f(0)$ est connue par les formules usuelles de transformations et d'inversions de Plancherel :

$$f(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rh}(r) \text{th}(\pi r) dr$$

5.3.2 Contribution des éléments hyperboliques

On note $C = P^1$ où P est une classe hyperbolique primitive, et $\gamma = \gamma_p^1$ pour γ_p primitif dans P , de sorte que $Z(\gamma) = Z(\gamma_p)$.

Par conjugaison, on peut se ramener à un élément « typique » hyperbolique, $z \mapsto pz$, $p > 0$ et $p \neq 1$. On peut supposer que $p > 1$, quitte à regarder p^{-1} , ce qui ne fait qu'inverser l'ordre de parcourt des axes, mais conserve les points fixes. Autrement dit, on conjugue de sorte à ramener l'axe à $i\mathbf{R}$ et les points fixes à 0 et ∞ . La longueur de translation est

$$d(z, \gamma_p z) = d(i, pi) = \log p, \forall z \in i\mathbf{R}$$

Les géodésiques sont conservées par les isométries, donc puisque ses extrémités sont des points fixes de Γ , elle devient une géodésique fermée dans $\Gamma \backslash \mathcal{H}$. Donc la longueur de translation $\log p$ est égale à la longueur de la géodésique fermée multipliée par le nombre de tours. On note $p = N(P)$ la norme de P , qui ne dépend pas de ses représentants, puisqu'elle s'exprime en particulier par la trace :

$$\text{Tr}(P) = N(P)^{1/2} + N(P)^{-1/2}$$

Après conjugaison, un domaine fondamental pour $z \mapsto pz$ est $\{1 < y < p\}$, d'où avec l'expression classique de la formule de prétrace :

$$\begin{aligned}
\text{Tr}K_C &= \int_1^p \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, p^l z) d\mu(z) \\
&= \int_1^p \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\left(\frac{d|z|}{y}\right)^2\right) \frac{dx dy}{y^2} \text{ où } 2d = |p^{1/2} - p^{-1/2}| \\
&= \int_1^p \frac{dy}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} k(d^2(1+x^2)) dx \\
&= \frac{\log p}{2d} \int_{d^2}^{+\infty} \frac{k(u)}{\sqrt{u-d^2}} du \\
&= \frac{\log p}{d} q(d^2) = \frac{\log p}{2d} g(l \log p)
\end{aligned}$$

Ce qui donne enfin :

$$\text{Tr}K_C = \frac{g(l \log p) \log p}{|p^{1/2} - p^{-1/2}|}$$

Donc la trace totale pour tous les hyperboliques ayant mêmes points fixes s'obtient en sommant sur toutes les classes P^l pour $l \geq 1$:

$$\sum_{C=P^l} \text{Tr}K_C = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{g(l \log p) \log p}{|p^{1/2} - p^{-1/2}|}$$

Pour soulever l'aspect plus géométrique de cette formule des traces dans le cas compact, nous suivons [Bergeron, 2011, 5.2.4]. À une Γ -classe d'éléments hyperboliques, on associe une unique géodésique ferme, qui est son axe projeté sur la surface; et une unique géodésique première fermée : considérons l'élément primitif de même orientation engendrant γ , puis son axe, que l'on referme en le projetant dans le quotient $\Gamma \backslash \mathcal{H}$: c'est la géodésique fermée associée à γ . On pose alors $l(\gamma)$ la longueur de la géodésique γ , $\Lambda(\gamma) = l(\gamma_0)$ la longueur de l'unique géodésique première parcourue dans le même sens et associée à γ , et $N_\gamma = e^{l(\gamma)}$ sa norme. On obtient alors

Théorème 5.4. *Si S est une surface hyperbolique compacte, $G(S)$ l'ensemble des géodésiques fermées orientées de S , g une fonction paire lisse à support compact et h sa transformée de Fourier, alors on a*

$$\sum_i h(r_i) = \frac{A(S)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \cdot r \text{th}(\pi r) dr + \sum_{G(S)} \frac{\Lambda(\gamma)}{N_\gamma^{1/2} - N_\gamma^{-1/2}} g(\log N_\gamma)$$

Cette dernière formule, essentiellement géométrique, est valable pour toute surface hyperbolique compacte. Dès que Γ est un $\Gamma_{a,b}$ ou un $\Gamma_{\mathcal{O}}$, on sait que les traces sont entières. Un tel paramétrage permet de réorganiser la somme sur $G(S)$, en partitionnant par les longueurs des géodésiques, et de faire apparaître les quantités arithmétiques $E'(t, \mathcal{O}^1)$, que l'on sait manipuler grâce à des raisonnements algébriques à l'image du dénombrement des plongements optimaux d'ordres de quaternions effectué dans la section suivante. C'est cette possibilité qui permet de réaliser effectivement la connexion entre des cadres géométriques a priori totalement étrangers, et d'obtenir la correspondance de Jacquet-Langlands.

5.3.3 La formule des traces

On en déduit la formule des traces dans le cas d'une surface hyperbolique compacte :

$$\sum_k h(r_k) = \frac{A(F)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} rh(r) \operatorname{th}(\pi r) dr + \sum_p \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{g(l \log p) \log p}{|p^{l/2} - p^{-l/2}|}$$

5.4 Une formule des traces plus générale pour $SL_2(\mathbb{Z})$

Mais dès que la surface n'est plus compacte, tous ces développements ne fonctionnent plus sans encombre, et il se peut que la trace n'existe pas. Des pointes apparaissent sur le domaine fondamental, et engendrent un spectre continu et pas seulement discret. Deux problèmes peuvent survenir et empêcher la trace de converger :

- * (côté spectral) les parties correspondant au spectre continu ne sont pas L^2
- * (côté géométrique) les noyaux sur les classes de conjugaison ne sont pas L^1 au voisinage des pointes

Pour pouvoir partir dans la même direction que dans le cas compact et avoir quelques résultats, nous allons tronquer les pointes, et se limiter à un sous-domaine $F(Y)$ de F , qui se rapprochera de F lorsque Y tendra vers l'infini : il faudra alors estimer le comportement des formules obtenues lorsqu'on passe à la limite. On considère donc

$$\operatorname{Tr}^Y K = \int_{F(Y)} K(z, z) d\mu(z)$$

et on obtiendra des formules explicites en développant de deux manières différentes, comme annoncé dans le cas compact :

- * (côté spectral) $\operatorname{Tr}^Y K \sim A_1 \log Y + T_1$
- * (côté géométrique) $\operatorname{Tr}^Y K \sim A_2 \log Y + T_2$

où les constantes sont explicites et ne dépendront que de Γ . Les identifications $A_1 = A_2$ et $T_1 = T_2$ donnent alors beaucoup d'informations : c'est la formule des traces de Selberg. Dorénavant, nous supposons que les hypothèses sur la fonction k et ses transformées sont suffisantes pour que tout converge sans problème :

$$\begin{aligned} k(u) &\ll (1+i)^{-s} \\ h(r) &\ll (1+|r|)^{-4} \\ g(x) &\ll e^{-|x|/2} \end{aligned}$$

5.4.1 Une partie spectrale continue

On intègre la décomposition spectrale de K sur $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$, avec cette fois la partie continue du spectre correspondant aux pointes, donnée par les séries de Eisenstein :

$$\begin{aligned} \text{Tr}^Y K &= \int_{F(Y)} K(z, z) d\mu(z) \\ &= \sum_k h(r_k) \int_{F(Y)} |u_k(z)|^2 d\mu(z) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \sum_c \int_{F(Y)} \left| E_c^Y \left(z, \frac{1}{2} + ir \right) \right|^2 d\mu(z) dr \end{aligned}$$

où on rappelle que :

$$E_a(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_a \backslash \Gamma} \left(\text{Im} \sigma_a^{-1} \gamma z \right)^s$$

De là, on tire une borne supérieure en intégrant sur tout F , ce qui ne pose plus de problème de convergence si l'on conserve les séries de Eisenstein tronquées, qui sont bien L^2 . La partie discrète se majore grâce au fait que les u_k forment une famille normée. La partie continue s'évalue grâce à la formule de Maaß-Selberg, avec $s = \sigma + ir$:

$$\begin{aligned} \langle E^Y(z, s), E^Y(z, s') \rangle &= \frac{1}{i(r+r')} \phi(\sigma - ir') Y^{i(r+r')} - \frac{1}{i(r+r')} \phi(\sigma + ir) Y^{-i(r+r')} \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma - 1 + i(r-r')} Y^{2\sigma - 1 + i(r-r')} \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma - 1 + i(r-r')} \phi(\sigma + ir) \phi(\sigma - ir') Y^{1 - 2\sigma - i(r-r')} \end{aligned}$$

où ϕ est telle que le coefficient constant de la série de Eisenstein $E(z, s)$ soit $a_0(y, s) = y^s + \phi(s) y^{1-s}$.

Après calculs de l'intégrale obtenue, on se retrouve avec un majorant, que l'on espère ne pas être trop mauvais, de sorte à donner une estimation du côté spectral de la formule des traces :

$$I(Y) = \frac{1}{4} \Phi \left(\frac{1}{2} \right) h(0) + O \left(Y^{-2\epsilon} \right)$$

et en intégrant ces estimations, il vient enfin :

$$\text{Tr}^Y K < \sum_k h(r_k) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{1}{2} + ir \right) h(r) dr + \frac{1}{4} h(0) \text{Tr} \left(\Phi \left(\frac{1}{2} \right) \right) + g(0) h \log Y + O \left(Y^{-\epsilon} \right)$$

Cherchons maintenant à minorer, de sorte à avoir une réelle estimation de cette partie spectrale. Il s'agit d'estimer ce qui a été perdu en tronquant, *i.e.* de majorer la contribution des parties paraboliques.

Si u_k est parabolique, on a :

$$\int_{F_a(Y)} |u_k|^2 = O(|s_k|Y^{-2})$$

Si u_k est résidu d'une Eisenstein, on a :

$$\int_{F_a(Y)} |u_k|^2 = O(Y^{1-2s_k})$$

Les termes tronqués aux voisinages des pointes sont donc de contribution négligeables devant le terme principal de la partie centrale : ils sont tous absorbés par le $O(Y^{-\varepsilon})$. La majoration précédente est donc une égalité, et on a l'estimation voulue :

$$\text{Tr}^Y K = \sum_k h(r_k) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{1}{2} + ir \right) h(r) dr + \frac{1}{4} h(0) \text{Tr} \left(\Phi \left(\frac{1}{2} \right) \right) + g(0) h \log Y + O(Y^{-\varepsilon})$$

Soit, avec l'heuristique annoncée en introduction, $A_1 = \dots$ et $T_1 = \dots$

5.4.2 Les termes paraboliques

AVERTISSEMENT. Dans cette partie, faute de temps et d'organisation, certains calculs n'ont pas été repris ou justifiés : ils sont traités dans [Iwaniec, 2002, chapitre 7].

Comme pour tous les types de transformation, la classe de conjugaison d'un élément parabolique est formée de transformations paraboliques, et tous les paraboliques de mêmes pointes forment le centralisateur : il y en a en particulier un qui est primitif.

Théorème 5.5. *Il y a h classes primitives de paraboliques, une pour chaque classe d'équivalence de pointe.*

PREUVE. En effet, si deux paraboliques sont conjugués p et $\gamma p \gamma^{-1}$, alors p fixe une pointe x et $\gamma p \gamma^{-1}$ fixe la pointe équivalente $\gamma(x)$. Réciproquement, soient deux pointes équivalentes, soient x et $y = \gamma_0(x)$, et soient des éléments γ et γ' fixant x et y respectivement. Alors, γ et $\gamma_0^{-1} \gamma' \gamma_0$ sont tous deux paraboliques fixant x , donc :

$$\begin{aligned} \gamma &= \sigma_x \tau_1 \sigma_x^{-1} \\ \gamma_0^{-1} \gamma' \gamma_0 &= \sigma_x \tau_t \tau_1 \tau_t^{-1} \sigma_x^{-1} \end{aligned}$$

car tous les « bons » conjugueurs sont de la forme $\pm \sigma_x \tau_t$. \square

Soit C_a la classe primitive attachée à la classe des pointes équivalentes à a , elle est constituée des générateurs des centralisateurs de ces pointes. Toute classe de conjugaison parabolique est puissance de l'une de ces classes primitives, à savoir celle de même pointe. On peut donc noter $C = C_a^l$, en notant γ_a un générateur de $\Gamma_a = Z(\gamma_a)$ et $\gamma = \gamma_a^l$, de sorte que $Z(\gamma) = Z(\gamma_a) = \{\gamma_a^k : k \geq 1\}$.

On peut ramener le point fixe de γ à ∞ , de sorte que, en conjuguant par σ_a , on ait une action équivalente aux translations, soit :

$$\sigma_a^{-1}\gamma\sigma_a = \tau_l \quad \sigma_a^{-1}\gamma\sigma_a = \tau_1^l = \tau_l$$

Nous sommes alors armés pour estimer la partie géométrique d'une classe parabolique :

$$\mathrm{Tr}^Y(K_C) = \int_{Z(\gamma)\backslash\mathcal{H}(Y)} k(z, \gamma z) d\mu(z) = \int_{B\backslash\sigma_a\mathcal{H}(Y)} k(z, z+l) d\mu(z)$$

Un tel domaine fondamental est inclus dans $[0, 1] \times [0, Y]$ car la bande verticale $\mathrm{Re} \in [0, 1]$ est un domaine fondamental pour la translation $z \mapsto z + 1$ et que tout est tronqué à $\mathrm{Im} < Y$, et que le domaine a été tronqué. Il contient $[0, 1] \times [Y', Y]$ où $YY' = c_a^{-2}$. On peut donc encadrer la trace $\mathrm{Tr}^Y K_C$ par les intégrales sur chacun de ces deux domaines. On peut alors calculer :

$$\int_0^1 \int_0^Y k(z, z+l) dz = \int_0^Y k\left(\left(\frac{l}{2y}\right)^2\right) \frac{dy}{y^2} = \frac{l}{4} \int_{1/4Y}^{+\infty} k(u) u^{-3/2} \frac{du}{(l/2\sqrt{u})^2} = \frac{1}{l} \int_{1/4Y}^{+\infty} k(u) u^{-1/2} du$$

Pour obtenir toutes les classes paraboliques relatives à la pointe a , il faut donc sommer sur tous les l , et puisque $l = (2y)^2 u$, on a $l \leq (2Y)^2 u$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^Y K_a &= 2 \int_{(2Y)^{-2}}^{+\infty} k(u) u^{-1/2} \sum_{1 \leq l < 2Y\sqrt{u}} \frac{1}{l} du \\ &= 2 \int_{(2Y)^{-2}}^{+\infty} k(u) u^{-1/2} \left(\log(2Y\sqrt{u}) + \gamma + O(u^{-1/2}Y^{-1}) \right) du \\ &= L(Y) + O(Y^{-1} \log(Y)) \end{aligned}$$

où $L(Y) = 2 \int_0^{+\infty} k(u) u^{-1/2} (\log(2Y\sqrt{u}) + \gamma) du$. En effet, le défaut

$$\int_0^{(2Y)^{-2}} k(u) u^{-1/2} (\log(2Y\sqrt{u}) + \gamma) du \leq \frac{1}{2Y} \in O(Y^{-1} \log(Y))$$

Et pour la minoration, donnée par l'intégrale sur $Y' \leq y \leq Y$, il n'y a plus de problème en 0, et on a directement par le même calcul :

...

Ainsi, on a une évaluation de la trace des classes paraboliques relatives à a :

$$\mathrm{Tr}^Y K_a = \sum_{C=C_a^1} \mathrm{Tr}^Y K_C = L(Y) + O(Y^{-1} \log(Y))$$

Il reste à estimer $L(Y)$, ce qui se fait par les formules classiques d'inversions :

$$\begin{aligned} L(Y) &= 2 \int_0^{+\infty} k(u) u^{-1/2} (\log(2Y\sqrt{u}) + \gamma) du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} k(u) u^{-1/2} (\log(2Y) + \gamma) du + \int_0^{+\infty} k(u) u^{-1/2} (\log(u)) du \end{aligned}$$

Et le second terme vaut :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} k(u) u^{-1/2} (\log(u)) du &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^v \frac{\log(u)}{\sqrt{u(v-u)}} du \right) dq(v) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\log(uv)}{\sqrt{u(1-u)}} du \right) dq(v) \\ &= \frac{1}{\pi} q(0) \int_0^1 \frac{\log(u)}{\sqrt{u(1-u)}} du - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} du \int_0^{+\infty} \log(v) dq(v) \end{aligned}$$

On obtient enfin :

$$L(Y) = g(0) (\log(Y) + \gamma) - \int_0^{+\infty} \log \operatorname{sh} \left(\frac{r}{2} \right) dg(r)$$

Et une inversion de Laplace permet aussi d'exprimer cette dernière intégrale sous la forme :

$$L(Y) = g(0) \log \left(\frac{Y}{2} \right) + \frac{1}{4} h(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \psi(1+it) dt$$

Notons que l'on trouve déjà le terme principal attendu. En fait, c'est simplement dû au fait que les problèmes émergent aux pointes, et qu'ils ne sont donc amenés que par les éléments paraboliques. On peut prouver directement que les noyaux associés aux autres transformations sont tous Hilbert-Schmidt, donc compacts et à trace : c'est le théorème de Gelfand-Graev-Piatetski-Shapiro. Ici, nous allons plutôt calculer, comme pour l'identité, la contribution de la trace directement.

5.4.3 Les termes elliptiques

Les termes elliptiques s'obtiennent analogiquement aux termes hyperboliques. Aucune pointe n'intervient, intuitivement ce ne sont pas ces termes qui vont poser problème.

Il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison elliptiques, elles sont d'ordre fini. En effet, dans tout groupe fuchsien, il n'y a pas de point d'accumulation dans les orbites, en particulier les stabilisateurs sont finis. Puisque les elliptiques ont leur point fixe dans \mathcal{H} , les itérés d'un elliptique sont tous dans le stabilisateur de son point fixe, donc ne sont qu'en nombre fini : les elliptiques sont d'ordre fini.

Soit \mathcal{E}_0 une telle classe primitive, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0^1$ une classe elliptique de mêmes points fixes que \mathcal{E}_0 . Quitte à conjuguer et à ramener le point fixe à i , on peut supposer que l'action est donnée par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{m}$, soit r_θ où $\theta = \frac{\pi}{m}$. Le centralisateur est $\langle r_\theta \rangle$, donc un domaine fondamental est tout secteur S d'angle 2θ basé en i . On en tire :

$$\mathrm{Tr}K_{\mathbb{E}} = \int_S k(z, r(l\theta)z) d\mu(z) = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{H}} k(z, r(l\theta)z) d\mu(z)$$

Après développement des calculs, cette fois-ci en coordonnées polaires données par la décomposition de Cartan $G = KAK$, autrement dit, puisque i est fixe par les rotations, $z = r(\phi) \alpha_r i$, on trouve [Iwaniec, 2002, p. 147] :

$$\mathrm{Tr}K_{\mathcal{E}} \left(2m \sin \left(\frac{\pi l}{m} \right) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \frac{\cosh(\pi(1 - 2l/m)r)}{\cosh(\pi r)} dr$$

5.4.4 La formule des traces

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_k h(r_k) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \left(-\frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{1}{2} + ir \right) \right) dr &= \frac{A(F)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r h(r) \mathrm{th}(\pi r) dr \\ &+ \sum_p \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{g(l \log p) \log p}{|p^{l/2} - p^{-l/2}|} \\ &+ \sum_R \sum_{0 < l < m_R} \left(2m \sin \left(\frac{\pi l}{m} \right) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{\mathrm{ch} \left(\pi \left(1 - \frac{2l}{m} \right) \right)}{\mathrm{ch}(\pi r)} dr \\ &+ \frac{h(0)}{4} \mathrm{Tr} \left(I - \Phi \left(\frac{1}{2} \right) \right) - hg(0) \log(2) - \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \psi(1 + ir) dr \end{aligned}$$

5.5 Applications

La bonne connaissance ou la comparaison des deux termes permet de prouver de nombreux résultats :

- ★ la loi spectrale de Weyl : $\#\mathrm{Sp}_T \sim \frac{A(S)}{4\pi} T$ pour une surface compacte ou pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathcal{H}$
- ★ le théorème des géodésiques premières : $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$
- ★ la correspondance de Jacquet-Langlands : les valeurs propres du laplacien hyperbolique dans $L^2(Y_{a,b})$ sont les valeurs propres de Maaß primitives dans $L^2(Y_0(N))$

5.5.1 La loi de Weyl

On cherche à évaluer le croissance du spectre. On pourrait prendre pour h la fonction de sélection de $[0, T]$ pour estimer la croissance du spectre, en faisant varier T . Toutefois, cette fonction n'est pas suffisamment régulière pour la formule des traces s'y applique. On pourrait l'approcher en régularisant, ou en essayant d'utiliser des fonctions plus lisses ayant un comportement similaire. Pour cela, écrivons la formule des traces de Selberg avec les fonctions gaussiennes $h(r) = e^{-\delta r^2}$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta}} e^{-x^2/4\delta}$, pour $\delta > 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta r_k^2} = \frac{A(S)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r e^{-\delta r^2} \tanh(\pi r) dr + \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta}} \sum_{\gamma \in G(Y)} \frac{\log(N_0)}{N_\gamma^{1/2} - N_\gamma^{-1/2}} e^{-l^2/4\delta}$$

On étudie alors chaque terme de la formule des traces :

- * $\#G_L(S) = O(e^L)$
- * la somme de droite est donc un $O\left(\delta^{-1/2} e^{-l_0^2/8\delta}\right)$, donc tend vers 0
- * une intégration par parties de l'intégrale donne $\frac{1}{8} + O(1)$

Ces remarques donnent, par la formule des traces :

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta r_k^2} = \frac{A(S)}{4\pi\delta} (1 + O(1))$$

On a donc un développement limité des sommes partielles. Un théorème taubérien d'Ikéhara permet alors d'obtenir :

$$\#\{k : \lambda_k \leq T\} \sim \frac{A(S)}{4\pi} T$$

Dans le cas non cocompact $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbf{Z})$, on peut aussi aboutir à un résultat similaire grâce à une formule des traces plus générale, que l'on cherche à établir par la suite :

$$\#\{k : \lambda_k \leq T\} \sim \frac{T}{12}$$

5.5.2 Le théorème des géodésiques premières

La formule des traces permet d'estimer l'évolution de la longueur des géodésiques premières fermées de Y , en effet avec

$$g = 2 \cosh\left(\frac{x}{2}\right) e^{-2\delta \cosh(x)} \quad h = \Gamma(s) \delta^{-s} + O\left(\delta^{-1/2} |\Gamma(s)|\right)$$

les contributions explicitées par la formule des traces donnent, en sommant sur les longueur de géodésiques p :

$$\sum_p e^{-\delta p} \log(p) = \sum_{1/2 < s_k \leq 1} \Gamma(s_k) \delta^{-s_k} + O(\delta^{-1/2})$$

On sait que les valeurs propres s_k sont de parties réelles inférieures à 1, et s'il y en a une de multiplicité un, alors on a

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log(p) \sim x \quad \text{et au moins} \quad \theta(x) = O(x)$$

et analoguement au cas du théorème des nombres premiers, cela implique :

$$\pi_x \sim \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log(t)} \quad \text{et au moins} \quad \pi(x) = O(\text{li}(x))$$

Avec la formule des traces plus générales, on constate que tous les termes venant du défaut de compacité sont en $O(\delta^{-1/2})$: spectre continu, classes elliptiques, classes paraboliques, la formule reste donc vraie.

5.5.3 Application à la correspondance de Jacquet-Langlands

On veut comparer les spectres du laplacien hyperbolique sur deux types de surfaces : les revêtements de congruence $Y_{a,b}$ et les surfaces modulaires $Y_0(N)$. Pour cela, la formule des traces donne des expressions pour les sommes globales pondérées par h , on va comparer les spectres en comparant les parties géométriques. L'idée est de trouver une « bonne » combinaison linéaire, telle que la combinaison linéaire des formules des traces pour les $Y_0(m)$ donne celle des $Y_{a,b}$, et identifier cette combinaison linéaire des formules des traces pour les $Y_0(m)$ comme une formule des traces dans un autre cadre.

On constate explicitement, grâce à la formule des traces, que

$$A(\Gamma_{\mathcal{O}}) = \sum_{m \mid d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) A(\Gamma_0(m))$$

On en déduit, en découpant en niveaux de formes de Maaßprimitives et grâce à la formule des traces, que

$$\sum_{f_k \in \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{m \mid d_A} \beta\left(\frac{d_A}{m}\right) \sum_{f_k \in \mathcal{C}(\Gamma_0(m) \backslash \mathcal{H})} h(r_k)$$

Ainsi, on obtient la correspondance « globale » de Jacquet-Langlands :

$$\sum_{f_k \in L^2(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{H})} h(r_k) = \sum_{f_k \in \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}_{\text{prim}}(\Gamma_0(d_A) \backslash \mathcal{H})} h(r_k)$$

Et en prenant des fonctions de sélection h , de type $h = e^{-x^2} \sim \delta_0$, on obtient la correspondance spectrale de Jacquet-Langlands : les valeurs propres comptées avec multiplicité du laplacien hyperbolique sur $Y_{a,b}$ sont les valeurs propres associées aux formes de Maaß primitives comptées avec multiplicité du laplacien hyperbolique dans $Y_0(N)$.

6 Algèbres de quaternions et plongements optimaux

6.1 Les algèbres de quaternions

On considère un corps F de caractéristique différente de 2.

Définition 6.1. Une algèbre de quaternions est une F -algèbre A vérifiant :

- ★ l'algèbre est simple : elle n'admet aucun idéal bilatère non trivial
- ★ l'algèbre est centrale : le centre Z_A de A est F
- ★ la dimension de A sur F est 4

Théorème 6.1 (Représentation standard des quaternions). *Une algèbre de quaternion A sur F se met sous la forme $A = D_{a,b}(F) = \text{Vect}(1, i, j, k)$ où $a, b \in F$ et les éléments i, j, k sont définis par les relations :*

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad k = ij = -ji$$

PREUVE. [Vignéras, 1980, I.1] \square

ce qui fait notamment qu'une algèbre de quaternion n'est pas commutative. Deux exemples classiques sont :

- Exemple.**
- ★ l'algèbre des matrices $D_{1,1}(F) \cong M_2(\mathbf{R})$, qui n'est pas une algèbre à division
 - ★ les quaternions de Hamilton $D_{-1,-1}(\mathbf{R}) = \mathbf{H}$, qui est une algèbre à division

Le conjugué d'un quaternion $h = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ est

$$\bar{h} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$$

La norme d'un quaternion $h = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ est

$$N(h) = h\bar{h} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$$

La trace d'un quaternion est :

$$\text{Tr}(h) = h + \bar{h} = 2x_0$$

6.1.1 Résultats généraux

Théorème 6.2 (Quaternions comme algèbres de matrices). *On a un isomorphisme classique entre $D_{a,b}(F)$ et $M_2(F(\sqrt{a}))$, qui induit un plongement de $D_{a,b}(F)$ dans une algèbre de matrice :*

$$\begin{aligned}
\Phi : A &\longrightarrow M_2(F(\sqrt{a})) \\
1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
i &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \\
j &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\
k &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

PREUVE. La vérification des propriétés de linéarité, de bijectivité et de conservation des relations algébriques est immédiate. \square

C'est un isomorphisme d'algèbres, qui vérifie de plus $\text{Tr}(h) : \text{Tr}(\phi(h))$ et $N(h) = \det(\phi(h))$.

Théorème 6.3. Soit $D_{a,b}(F) \cong M_2(F)$, soit $D_{a,b}(F)$ est à division.

PREUVE. [Katok, 1992, 5.2.5, p. 115] Supposons que $D_{a,b}(F)$ ne soit pas une algèbre à division. Puisque $D_{a,b}(F)$ n'est pas à division, il existe un élément non nul non inversible, i.e. un élément non nul de norme nulle, soit $h = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$. Récrivons explicitement la situation :

$$N(h) = x_0^2 - x_1^2a - x_2^2b + x_3^2ab = 0 = n(x_0 + ix_1) - bn(x_2 + ix_3)$$

où n désigne la norme de l'extension quadratique $F(i)$ de F . Déjà, $x_2 + ix_3$ est non nul, sinon $x_0 + ix_1$ le serait aussi, et donc h . Donc, puisque $F(i)$ est un corps, $n(x_2 + ix_3)$ est non nul, et on peut expliciter b :

$$b = \frac{n(x_0 + ix_1)}{n(x_2 + ix_3)}$$

que l'on peut mettre sous la forme $n(q_0 + iq_1) = q_0^2 - aq_1^2$. Ainsi on peut construire un isomorphisme explicite entre $D_{a,b}(F)$ et $M_2(F)$:

$$\begin{aligned}
\Phi : 1 &\longmapsto I_2 \\
i &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\
j &\longmapsto \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1a & -q_0 \end{pmatrix} \\
k &\longmapsto \begin{pmatrix} q_1a & -q_0 \\ aq_0 & -aq_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

que l'on vérifie être un isomorphisme. \square

Exemple. $D_{5,11}(\mathbf{Q})$ est isomorphe à $M_2(\mathbf{Q})$, puisque qu'elle n'est pas à division : $1 + 3i + j + k$ est non nul mais de norme nulle.

6.1.2 Les quaternions et leurs surfaces arithmétiques associées

Nous notons $\Gamma_{\mathcal{O}} = \Gamma_{\mathcal{O}}(D_{a,b}(\mathbf{Q})) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q})$ l'image de $\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} : N(x) = 1\}$ par l'isomorphisme ϕ , que l'on peut éventuellement considérer aussi dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Q})$ quitte à quotienter par $\{\pm 1_{\mathcal{A}}\}$. Nous nous plaçons dorénavant dans le cas typique $\mathcal{O} = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}i + \mathbf{Z}j + \mathbf{Z}k = D_{a,b}(\mathbf{Z})$, auquel cas on note $\Gamma_{\mathcal{O}} = \Gamma_{a,b}$. On a alors plus explicitement :

$$\Gamma_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix} : x_i \in \mathbf{Z}, x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = 1 \right\}$$

On a alors que l'isomorphisme ϕ induit un isomorphisme entre $D_{a,b}(\mathbf{R})^1$ et $\mathrm{SL}_2(F(\sqrt{a}))$. En particulier, lorsque $D_{a,b}(F)$ est déployée à l'infini, *i.e.* lorsque $D_{a,b}(F) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R})$.

Théorème 6.4. $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est un groupe fuchsien.

PREUVE. Comme pour tout groupe topologique, il suffit de prouver que l'identité est isolée. Or justement, notons \mathcal{U} l'ensemble des matrices $(g_{ij})_{ij}$ « proches de l'identité », *i.e.* les coefficients sont proches de ceux de l'identité à $\frac{1}{2}$ près, soit $|g_{ij} - \delta_{ij}| < \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathcal{O}^1 \cap \mathcal{U}$. On connaît les expressions des g_{ij} par l'isomorphisme ϕ , on en tire que $|g_{11} + g_{22} - 2| = |2x_0 - 2| < 1$, donc $x_0 = 1$ puisqu'il est entier. Puis $b|x_2 \pm x_3\sqrt{a}| < 1$ donne $x_2 = 0$ en divisant par $b > 1$. De même, $|x_1\sqrt{a}| < \frac{1}{2}$ et $|x_3\sqrt{a}| < \frac{1}{2}$, ce qui donne $x_1 = x_3 = 0$, qui conclut. \square

Un type particulièrement intéressant de surfaces hyperboliques consiste en les surfaces données par ces groupes de quaternions : de telles surfaces sont appelées surfaces hyperboliques arithmétiques.

Théorème 6.5. $\Gamma_{a,b}$ est de première espèce.

PREUVE. [Bergeron, 2011, théorème 2.5] \square

Nous connaissons plutôt bien les $\Gamma_{a,b}$. D'abord, deux groupes $\Gamma_{a,b}$ et $\Gamma_{a',b'}$ sont commensurables (*i.e.* leur intersection est d'indice fini, quitte à conjuguer, dans chacun d'eux) si, et seulement si, les formes quadratiques associées $x^2 - ay^2 - bz^2$ et $x^2 - a'y^2 - b'z^2$ sont \mathbf{Q} -semblables. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

Théorème 6.6. Les groupes quaternioniques $\Gamma_{a,b}$ vérifient les équivalences suivantes :

- * $\Gamma_{a,b}$ cocompact dans G
- * $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ n'admet pas de solution entière non triviale
- * $D_{a,b}(\mathbf{Q})$ est une algèbre à division

PREUVE. [Bergeron, 2011, théorème 2.5] \square

Théorème 6.7 (Aire de $\Gamma_{\mathcal{O}}$).

$$A(\Gamma_{\mathcal{O}}) = \frac{\pi}{3} \prod_{p \mid d_{\mathcal{A}}} (p-1)$$

6.1.3 Premiers résultats sur les rapports local-global

Définition 6.2. Soit A une algèbre de quaternions sur \mathbf{Q} . Soit v une place de \mathbf{Q} . On dit que A se ramifie en v si A_v est une algèbre à division, et que A est déployée en v si $A_v \cong M_2(\mathbf{Q}_v)$. On dit que A est indéfinie si elle est déployée à l'infini, et définie si elle se ramifie à l'infini. On définit le symbole de Hilbert de $A = D_{a,b}$ en une place v de \mathbf{Q} par

$$(a, b)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } A_v \cong M_2(\mathbf{Q}_v) \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 6.8 (Classification des algèbres de quaternions). *Le nombre de places ramifiées dans une algèbre de quaternions est pair, et pour tout ensemble fini pair de places, il existe une unique algèbre de quaternions à isomorphisme près ayant exactement ces places comme places de ramification.*

PREUVE. [Vignéras, 1980, théorème. 3.1 p. 74] \square

On en déduit que pour une algèbre de quaternion indéfinie, il y a un nombre pair de nombres premiers en lesquels elle se ramifie, et donc d_A est produit d'un nombre pair de nombres premiers.

6.2 Ordres d'algèbres de quaternions

Définition 6.3. Un ordre d'une algèbre de quaternion $A = D_{a,b}(F)$ est un ensemble \mathcal{O} vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- ★ \mathcal{O}_F -module et sous-anneau de A , finiment engendré et engendrant A
- ★ \mathcal{O}_F -module et sous-anneau de A , libre de rang $4n$
- ★ sous-anneau de A d'éléments à normes et traces entières, et tel que $F\mathcal{O} = A$

Typiquement, un ordre est le « réseau » $\mathcal{O}_F + \mathcal{O}_F i + \mathcal{O}_F j + \mathcal{O}_F k$. Par exemple, $\mathcal{O} = D_{a,b}(\mathbf{Z})$ dans $A = D_{a,b}(\mathbf{Q})$.

On rappelle que le discriminant d'une base est $\text{disc}((e_i)_i) = \det(\text{Tr}(e_i e_k)_{ij})$. On a notamment la formule de changement de base

$$\text{disc}((e_i)_i) = \det(P)^2 \text{disc}((f_k)_k)$$

où P est la matrice de passage de e à f . Cela implique notamment que si e et f sont deux bases du module \mathcal{O} , les traces sont dans $\mathcal{O} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$. Puisque la matrice de passage P est inversible dans \mathbf{Z} , elle est de déterminant ± 1 , donc le discriminant ne dépend pas du choix de la base, ce qui permet de définir le discriminant d'un ordre $d(\mathcal{O})$. On en déduit :

Théorème 6.9. *Soient \mathcal{O} et \mathcal{O}' deux ordres de A . Si $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, alors $d(\mathcal{O}) \mid d(\mathcal{O}')$. Si de plus $d(\mathcal{O}) = d(\mathcal{O}')$, alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. En particulier, tout ordre est inclus dans un ordre maximal.*

6.2.1 Le cas particulier des extensions quadratiques

AVERTISSEMENT. Dans cette section et les suivantes, plusieurs résultats concernant les adèles et les propriétés connues des localisés sont énoncées telles qu'elles sont citées ou utilisées dans les ouvrages consultés. Faute de références, les preuves demeurent – momentanément – vides.

Nous nous intéressons ici aux extensions quadratiques de \mathbf{Q} : il s'agit des $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ où D est un discriminant fondamental.

Théorème 6.10. *Les ordres de K sont les $\Omega_n := \mathbf{Z} + n\omega\mathbf{Z}$ où $\omega := \frac{D+\sqrt{D}}{2}$.*

PREUVE. Par définition, un ordre Ω contient 1, donc contient \mathbf{Z} . De plus, il engendre K sur \mathbf{Q} , il contient donc un certain $k\sqrt{D}$ avec k minimal. En écrivant

$$\begin{aligned} k\sqrt{D} &= k\frac{D+\sqrt{D}}{2} + k\frac{-D+\sqrt{D}}{2} = k\omega + k\alpha \in \Omega \\ kD &= k\frac{D+\sqrt{D}}{2} + k\frac{D-\sqrt{D}}{2} = k\omega - k\alpha \in \Omega \end{aligned}$$

il vient que $k\omega \in \Omega$. Puisque $k'\omega \in \Omega$ impliquerait que $k'\sqrt{D} \in \Omega$, ce k est minimal pour cette propriété. On a donc que $\Omega = \Omega(k)$. \square

Puisque $\Omega(1)/\Omega(n) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, l'ordre de Ω_n est n .

Nous nous intéressons au comportement des ordres de $K_p = K \otimes \mathbf{Q}_p$. Cette algèbre est de dimension 2 sur \mathbf{Q}_p donc il y a deux cas :

- * $K_p \cong \mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p$
- * $[K_p : \mathbf{Q}_p] = 2$, auquel cas (p) se met sous la forme p^e . On dit que K_p se ramifie si $e \geq 2$.

Théorème 6.11. *On sait caractériser la nature de K_p en fonction du symbole de Legendre modulo p de son discriminant D :*

- * si $(D/p) = 0$, K_p est une extension quadratique ramifiée de \mathbf{Q}_p
- * si $(D/p) = -1$, K_p est l'extension quadratique non ramifiée de \mathbf{Q}_p
- * si $(D/p) = 1$, $K_p = \mathbf{Q}_p^2$

PREUVE. \square

Analoguement aux ordres de K , on a :

Théorème 6.12. *Les ordres de K_p sont les Ω_{p^k} .*

PREUVE. \square

Pour un ordre Ω , on note Ω^1 sa sphère unité, i.e. l'ensemble de ses éléments de norme 1. Dans le cas où $d < 0$, les Ω^1 sont finis et on en connaît les indices dans Ω_1^1 . Dans le cas où $d > 0$, ils sont infinis et il existe une « unité fondamentale » ε_d telle que $\Omega^1 = \{\pm \varepsilon_d^{kA} : k \in \mathbf{Z}\}$.

6.2.2 Plongements optimaux d'ordres

Théorème 6.13. *Si \mathcal{O} est un ordre de A , alors $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ est un ordre de A_p .*

PREUVE. Vérifions les propriétés définissant les ordres. Puisque \mathcal{O} est un ordre de A , c'est un \mathcal{O}_F -module, sous-anneau, finiment engendré et engendrant A . Dans le cas de \mathcal{O}_p :

- * \mathcal{O}_p est un \mathcal{O}_F -module et un sous-anneau, comme \mathcal{O}
- * puisque \mathcal{O} est finiment engendré, disons $\mathcal{O} = \sum_i \mathcal{O}_F u_i$, on a $\mathcal{O}_p = \sum_i (\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p) u_i$, et est en particulier finiment engendré
- * puisque \mathcal{O} engendre A , $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ engendre $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p = A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p = A_p$

ce qui fait que \mathcal{O}_p est un ordre de A_p . \square

Définition 6.4. Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ une extension quadratique de \mathbf{Q} , Ω un ordre de K . Soit i un plongement de K dans A . Ce plongement est optimal de Ω dans \mathcal{O} si $i(\Omega) = \mathcal{O} \cap i(K)$, autrement dit si les deux ordres sont « identiques » relativement au plongement. Deux plongements optimaux sont conjugués si les images de l'ordre Ω sont conjugués.

Le dénombrement des plongements optimaux dans des surcorps quadratiques permettent l'évaluation des termes elliptiques et hyperboliques de la formule des traces appliquée aux deux surfaces $Y_0(N)$ et $Y_{a,b}$ qui nous intéressent, il s'agit donc de s'attaquer à ce problème désormais. L'idée centrale est de ramener le problème du dénombrement des plongements optimaux sur les corps globaux K et \mathbf{Q} à ceux de leurs composantes locales K_p et \mathbf{Q}_p , i.e. de ramener un calcul global à un calcul adélique.

Nous nous plaçons dans deux cas simples, selon l'une des deux possibilités sur la nature de A :

- * $A = M_2(\mathbf{Q})$, $\mathcal{O} = M(N) = \{M \in M_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}\}$ pour N sans facteur carré
- * $A = D_{a,b}(\mathbf{Q})$ à division de discriminant $d_A > 0$, \mathcal{O} ordre maximal de A

6.2.3 Dénombrement des plongements optimaux

Notons $E(\Omega, \mathcal{O}^1)$ le nombre de plongements optimaux de Ω dans \mathcal{O} modulo conjugaison par \mathcal{O}^1 . Alors on a :

Théorème 6.14. *Dans le premier cas :*

$$E(\Omega, \mathcal{O}^1) = h(\Omega) \begin{cases} 2 & \text{si } D < 0 \\ 1 & \text{si } D > 0 \end{cases} \prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{\Omega}{p}\right)\right)$$

Et dans le second :

$$E(\Omega, \mathcal{O}^1) = h(\Omega) \begin{cases} 2 & \text{si } D < 0 \\ 1 & \text{si } D > 0 \end{cases} \prod_{p|d(\mathcal{O})} \left(1 - \left(\frac{\Omega}{p}\right)\right)$$

où $h(\Omega)$ est le nombre de classes d'équivalences d'idéaux dans Ω , et :

$$\left(\frac{\Omega}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left(\frac{D}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ ou } \Omega_{\mathfrak{p}} \text{ non maximal dans } K_{\mathfrak{p}} \\ -1 & \text{si } \left(\frac{D}{\mathfrak{p}}\right) = -1 \\ 0 & \text{si } \left(\frac{D}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \end{cases}$$

Définition 6.5. Le nombre de classes de l'ordre \mathcal{O} est défini par $h(\mathcal{O}) = [K_A^\times : \mathcal{O}_A^\times K^\times]$.

On en a d'ailleurs une expression explicite en fonction de h_K , ainsi que plusieurs propriétés, voir [Miyake, 2006].

Remarque. La signification de ce résultat est la suivante : deux éléments localement égaux ne sont pas forcément globalement égaux, mais l'égalité de toutes les composantes locales détermine l'appartenance à la même classe. Il reste donc à multiplier le comptage local par le nombre de classes pour obtenir le comptage global.

Quitte à partitionner, on se limite à regarder et à dénombrer les éléments de trace fixée t et de norme fixée n , notons $H_{n,t}$ leur ensemble, et fixons un élément T_t d'un $H_{n,t}$ qui n'est pas vide. Puisque les polynômes minimaux sont identiques, on a $\mathbf{Q}[T_t] \cong \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, permettant de définir norme et trace sur cette extension, et d'identifier les ordres correspondants (les deux isomorphismes possibles différant de ± 1 et donnant donc la même image) \mathcal{O}_t .

Théorème 6.15. *L'ensemble des éléments de B ayant trace t et norme n est*

$$E(T_t) = \{\delta T_t \delta^{-1} : \delta \in B^\times\}$$

PREUVE. [Strombergsson, 2001a] \square

Pour tout $\delta \in B^\times$, $\mathbf{Q}[T_t] \cap \delta R \delta^{-1}$ est un ordre dans $\mathbf{Q}[T_t]$. Puisque les ordres possibles sont connus, on définit naturellement

$$E(T_t, \mathcal{O}) = \{\delta T_t \delta^{-1} : \delta \in B^\times, \mathbf{Q}[T_t] \cap \delta R \delta^{-1} = \mathcal{O}\}$$

Théorème 6.16. *On a la partition en fonction des ordres :*

$$E(T_t) = \bigsqcup_{f=1}^{\infty} E(T_t, \mathcal{O}(f))$$

PREUVE. En effet, $\delta R \delta^{-1}$ est un ordre dans $\mathbf{Q}[T_t]$, et les ordres des extensions quadratiques sont exactement les $\mathcal{O}(f)$. La partition avancée est donc seulement la disjonction des cas en fonction de l'ordre obtenu. \square

On peut exprimer les quantités dans les secondes sommes de la formule des traces, en partitionnant ainsi par les traces. Comme déjà expliqué dans l'interprétation géométrique de la formule des traces, c'est cette possibilité de réécriture, en paramétrant par les traces, qui est la clé de la preuve de la correspondance de Jacquet-Langlands.

Le dénombrement revient alors au dénombrement sur les composantes locales :

Théorème 6.17. *On a la décomposition :*

$$E(T_t, \mathcal{O}_f) / \Gamma_R = h_{\mathcal{O}_f} \prod_{v \in V} E_v(T_t, \mathcal{O}_f) / R_v^\times$$

Regardons d'abord le cas $v = \infty$:

Théorème 6.18. *On a :*

$$E_\infty(T_t, \mathcal{O}_f)/R_\infty^\times = \begin{cases} 2 & \text{si } T_t \text{ est elliptique, i.e. si } d < 0 \\ 1 & \text{si } T_t \text{ est hyperbolique, i.e. si } d > 0 \end{cases}$$

PREUVE. [Miyake, 2006, p. 248] Il y a a priori deux plongements optimaux possibles, correspondant aux deux images possibles de \sqrt{D} : deux racines réelles si $D > 0$, deux racines complexes conjuguées sinon. Nous dénombrons les plongements optimaux modulo conjugaison par $GL_2^+(\mathbf{R})$, i.e. modulo action naturelle de $GL_2^+(\mathbf{R})$ sur ces images. Or cette action a trois orbites : \mathcal{H} , $\overline{\mathcal{H}}$ et \mathbf{R} . Si les deux racines sont sur \mathbf{R} , elles sont équivalentes modulo cette action et il n'y a qu'un plongement optimal modulo conjugaison. Si les deux racines sont complexes conjuguées, une seule est dans \mathcal{H} et les deux plongements optimaux ne sont pas conjugués. \square

Retournons au cas des places finies, qui se décompose en deux cas en fonction de si R est définie en p ou non, i.e. si $R_p = M_2(\mathbf{Z}_p)$ ou non, ce dernier cas n'arrivant qu'un nombre fini de fois.

Théorème 6.19. *Dans le cas II, si $p \nmid d_B$, alors $B_p = M_2(\mathbf{Q}_p)$, $R_p = M_2(\mathbf{Z}_p)$, et dans le cas I, si $p \nmid N$, alors $R_p = M_2(\mathbf{Z}_p)$, et dans tous les cas*

$$\#C_p(T_t, \mathcal{O}_f)/R_p^\times = 1$$

PREUVE. \square

Théorème 6.20. *Dans le cas II, si $p \mid d_B$, alors B_p est une algèbre à division, R_p son unique idéal maximal, et*

$$\#C_v(T_t, \mathcal{O}_f)/R_v^\times = \begin{cases} 0 & \text{si } p \mid f \\ 1 & \text{si } p \nmid f \text{ et } (d/p) = 0 \\ 2 & \text{si } p \nmid f \text{ et } (d/p) = -1 \end{cases}$$

Il reste le cas des places finies du cas I pour $p \mid N$. Ce dénombrement se fait explicitement :

Théorème 6.21. *On a :*

$$E_v(T_t, \mathcal{O}_f)/R_v^\times = |\Omega/p^{1+\rho}| + |\Omega'/p^{1+\rho}|$$

où

$$\begin{aligned} \rho &= \text{ord}_p(l/F) \\ \Omega &= \{\xi \in \mathbf{Z}_p : \xi^2 - t\xi + n \equiv 0 \pmod{p^{1+2\rho}}\} \\ \Omega' &= \{\xi \in \mathbf{Z}_p : \xi^2 - t\xi + n \equiv 0 \pmod{p^{2+2\rho}}\} \delta(p^{2\rho+1} | l^2 d) \end{aligned}$$

PREUVE. Il s'agit de compter les solutions des congruences de ces deux ensembles :

$$(1) \quad \xi^2 - t\xi + n \equiv 0 \pmod{p^{1+2\rho}} \iff (2\xi - t)^2 \equiv l^2 d \pmod{p^{1+2\rho}} \\ \iff \xi \equiv \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{2\xi - t}{p^\rho} \right)^2 \equiv (lp^{-\rho})^2 d \pmod{p} \quad \text{car } p^{2\rho} | l^2$$

Soit $\rho < \text{ord}_p(l)$, *i.e.* $p|d$. Dans ce cas, $(lp^{-\rho})^2 d \equiv 0 \pmod{p}$ et $\xi \equiv \frac{t}{2} \pmod{p^{\rho+1}}$. Soit $p \nmid d$, et l'équation quadratique admet par définition deux solutions si d est un carré modulo p , *i.e.* si $(d/p) = 1$, aucune sinon, *i.e.* si $(d/p) = -1$.

De la même manière,

$$(2) \quad \xi^2 - t\xi + n \equiv 0 \pmod{p^{2+2\rho}} \iff (2\xi - t)^2 \equiv l^2 d \pmod{p^{2+2\rho}} \\ \iff \xi \equiv \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{2\xi - t}{p^\rho} \right)^2 \equiv (lp^{-\rho})^2 d \pmod{p} \quad \text{car } p^{2\rho} | l^2$$

Soit $\rho < \text{ord}_p(l)$, *i.e.* $p|d$. Dans ce cas, $\xi \equiv \frac{t}{2} \pmod{p^{\rho+1}}$. Soit $p|d$, et il n'y a pas de solution. \square

Ainsi on le dénombrement voulu :

$$\#C_p(\mathbb{T}_t, \mathcal{O}_f) = \begin{cases} 2 & \text{si } \rho < \text{ord}_p l \\ 1 & \text{si } \rho = \text{ord}_p l \text{ et } p|d \\ 2 & \text{si } \rho = \text{ord}_p l \text{ et } (d/p) = 1 \\ 0 & \text{si } \rho = \text{ord}_p l \text{ et } (d/p) = -1 \end{cases}$$

7 Le cadre adélique et les généralisations

AVERTISSEMENT. Cette partie, qui voulait montrer les directions vers lesquelles généraliser, ou tout du moins formuler les questions, les résultats et transposer les objets dans le cadre adélique, est restée à l'état de germe. Les constructions de formes automorphes à partie des réseaux, et la construction adélique très manuelle proposée par Deligne, devaient y trouver place. Dans l'idéal, comprendre et faire ces reformulations aurait pu permettre d'ouvrir le travail vers d'autres problèmes et d'autres résultats, notamment ceux des représentations et des conjectures de fonctorialité de Langlands. À défaut de l'avoir fait, nous renvoyons à [\[Bernstein and \(éditeurs\), 2004, articles de Cogdell\]](#).

7.1 Motivations

L'intérêt est de mettre en place un formalisme permettant de traiter simultanément toutes les composantes locales, grâce à de bonnes possibilités calculatoires, dont on a déjà pu percevoir l'efficacité dans la recherche des plongements optimaux des algèbres de quaternions. De plus, la grande généralité des résultats adéliques permet de généraliser les résultats obtenus dans des cas simples (thèse de Tate pour GL_1 , formes automorphes pour GL_2) à des cadres plus généraux

(formules des traces pour des sous-groupes de congruence plus généraux, représentations de GL_n).

7.2 Les adèles en général

7.2.1 Définitions élémentaires

Les valuations définissant les mêmes topologies sur un corps sont dites équivalentes, les classes d'équivalences sont appelées des places. Sur \mathbf{Q} , les places sont données par le théorème d'Ostrowski [?, p. 45] : ce sont les valuations p -adiques et la valeur absolue usuelle, elles sont donc paramétrées par $\mathbf{P} \cup \{\infty\}$, et dorénavant confondues avec.

Le défaut de complétude est un frein à l'utilisation d'arguments analytiques pour attaquer les problèmes de théorie de nombres. Tout corps valué peut se plonger de manière essentiellement unique dans un corps complet dans lequel il est dense et qui prolonge sa topologie, appelé son complété [?,]. Les adèles résultent d'une construction considérant tous les complétés \mathbf{Q}_v simultanément.

Définition 7.1. L'anneau \mathbf{A} des adèles de \mathbf{Q} est le produit restreint des $(\mathbf{Q}_v)_{v \in S}$ relativement aux $(\mathbf{Z}_p)_{p \in \mathbf{P}}$, muni des opérations définies composante par composante. Autrement dit,

$$\mathbf{A} = \left\{ (a_v)_v \in \prod_v \mathbf{Q}_v : \forall p \in \mathbf{P}, a_p \in \mathbf{Z}_p \right\}$$

Il est muni de la topologie définie par la base d'ouverts de la forme

$$\prod_{v \in A} \Omega_v \prod_{p \in S \setminus A} \mathbf{Z}_p$$

où A est une partie finie de S contenant ∞ , et les Ω_v sont des ouverts de \mathbf{Q}_v .

Compte tenu de la singularité topologique de la place archimédienne ∞ , nous introduisons l'anneau des adèles finies \mathbf{A}_f , produit restreint des \mathbf{Q}_p relativement aux \mathbf{Z}_p , qui s'injecte dans \mathbf{A} en fixant la première composante.

Cette construction munit \mathbf{A} d'une structure d'anneau topologique localement compact. De plus, \mathbf{Q} s'injecte dans \mathbf{A} via l'injection diagonale :

$$q \in \mathbf{Q} \longmapsto (q)_{v \in S} \in \mathbf{A}$$

Théorème 7.1. \mathbf{Q} est discret dans \mathbf{A} , et de plus,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} + [0, 1[\times \prod_{p \in \mathbf{P}} \mathbf{Z}_p$$

PREUVE. Puisque \mathbf{Q} est un sous-groupe additif topologique, il suffit de prouver que 0 est un point isolé. Considérons l'ouvert

$$U = [0, 1[\times \prod_{p \in P} \mathbf{Z}_p$$

Un élément x de cet ouvert vérifie $|x|_p < 1$, donc est dans tous les \mathbf{Z}_p , donc est entier, et puisqu'il est dans $] -1, 1[$, c'est que $x = 0$. Cela donne le recouvrement voulu. \square

Théorème 7.2. \mathbf{Q} est cocompact dans \mathbf{A} . Plus précisément,

$$\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A} / \prod_p \mathbf{Z}_p \cong \mathbf{Z} \backslash \mathbf{R}$$

PREUVE. \square

7.2.2 Les résultats d'approximation et de décomposition

Théorème 7.3. On a la décomposition

$$\mathbf{A}^\times = \mathbf{Q}^\times \left(\mathbf{R}_+^\times \times \prod_p \mathbf{Z}_p \right)$$

PREUVE. Puisque seul un nombre fini de a_p n'est pas dans \mathbf{Z}_p , on peut factoriser, au signe près, par $a_0^{-1} \in \mathbf{Q}^\times$, où a_0 est le produit des dénominateurs des a_p . \square

Pour tout groupe algébrique G , on a le groupe adélique associé :

$$G(\mathbf{A}) = \prod_{v \in S} G(\mathbf{Q}_v) \quad \text{relativement aux } G(\mathbf{Z}_p)$$

PREUVE. \square

Théorème 7.4 (Approximation forte). Relativement aux topologies de produit restreint, $\prod_{v \in S \setminus \{v_0\}} \mathbf{Q}_v$ est dense dans \mathbf{A} .

PREUVE. \square

Théorème 7.5 (Approximation forte). Si K_p est un sous-groupe compact ouvert de $SL_2(\mathbf{Z}_p)$, presque toujours égal à $SL_2(\mathbf{Z}_p)$, alors

$$SL_2(\mathbf{A}) = SL_2(\mathbf{Q}) \prod_{v \in S} SL_2(\mathbf{Q}_v)$$

PREUVE. \square

Théorème 7.6 (Approximation forte). Avec $\Gamma_K = i^{-1}(SL_2(\mathbf{R}) \times K)$, on a l'isomorphisme :

$$\Gamma_K \backslash SL_2(\mathbf{R}) \cong SL_2(\mathbf{Q}) \backslash SL_2(\mathbf{A}) / K$$

PREUVE. Grâce aux théorèmes d'isomorphismes, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{A}) / \mathrm{K}_k &\cong [\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}) (\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{K}_f)] / \mathrm{K}_f && \text{par le théorème d'approximation forte} \\ &\cong [\mathrm{i}^{-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{K}_f) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{K}_f] / \mathrm{K}_f && \text{car } \mathrm{N} \backslash \mathrm{HN} \cong \mathrm{H} \cap \mathrm{N} \backslash \mathrm{H} \\ &\cong [\Gamma_K \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{K}_f] / \mathrm{K}_f \\ &\cong \Gamma_K \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. \square

Théorème 7.7 (Approximation forte). *Si, pour tout p , K_p est un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, presque toujours égal à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, et tel que $\det(\mathrm{K}_p) = \mathbf{Z}_p^\times$, alors*

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) / \mathrm{SO}_2 \times \prod_p \mathrm{K}_p \cong \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}) \cap \left(\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R}) \times \prod_p \mathrm{K}_p \right) \backslash \mathcal{H}$$

et si on ne quotiente que partiellement,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) / \mathrm{SO}_2 \times \mathrm{K}_p \cong ? \backslash \mathcal{H}$$

PREUVE. [Rogawski,] \square

Plus généralement,

Théorème 7.8. $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q})$ est dense dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{A})$.

PREUVE. \square

7.3 Une construction plus manuelle des formes automorphes

Nous nous intéressons à une approche plus élémentaire et plus constructive, moins algébrique mais permettant de manipuler les objets adéliques. Nous suivons essentiellement la présentation de [?].

Définition 7.2. La complétion profinie de \mathbf{Z} est

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \varprojlim \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \left\{ (a_n)_n \in \prod_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} : m|n \Rightarrow a_n \equiv a_m \pmod{m} \right\}$$

Théorème 7.9. On a la décomposition $\widehat{\mathbf{Z}} = \prod_p \mathbf{Z}_p$.

PREUVE. Les entiers p -adiques sont définis par

$$\widehat{\mathbf{Z}}_p = \varprojlim \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$$

et la décomposition est une reformulation du théorème des restes chinois, *via* les applications :

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & \prod_p \mathbf{Z}_p \\
(\mathbf{a}_n)_n & \longmapsto & ((\mathbf{a}_p^{n_p})_{n_p})_p \\
\left(\prod_p \mathbf{a}_p^{n_p}\right)_{n=\prod_q q^{v_q(n)}} & \longleftarrow & ((\mathbf{a}_p^{n_p})_{n_p})_p
\end{array}$$

et il reste à vérifier (CRT) que ça fonctionne. \square

Définition 7.3. On peut alors définir l'anneau des adèles finies par

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}$$

et l'anneau des adèles par

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R} \times \widehat{\mathbf{Z}})$$

Théorème 7.10. On a la décomposition

$$\mathbf{A}^\times = \mathbf{Q}^\times \widehat{\mathbf{Z}}^\times \mathbf{R}_+^{*\times}$$

7.4 Adélisation des formes automorphes

On peut définir une fonction qui à une forme automorphe parabolique $f \in S_k(\mathbf{N})$ associe une fonction sur $GL_2(\mathbf{A})$, via

$$\forall g = \gamma g_\infty k_0 \in GL_2(\mathbf{A}), \quad \phi_f(g) = f(g_\infty \cdot i) j(g_\infty, i)^{-k}$$

Et ces fonctions adéliques sont essentiellement ce que l'on espère comme formes automorphes adéliques :

Théorème 7.11. L'application ϕ est un isomorphisme entre $S_k(\mathbf{N})$ et l'espace des fonctions sur $GL_2(\mathbf{A})$ telles que :

- * $\forall \gamma \in G_{\mathbf{Q}}, \phi(\gamma g) = \phi(g)$
- * $\forall \theta \in \mathbf{R}, \phi(g r_\theta) = e^{-ik\theta} \phi(g)$
- * la fonction ϕ est lisse en g_∞ et $\Delta \phi = -\frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1\right) \phi$
- * ϕ est à croissance modérée
- * ϕ est parabolique

A Annexes

A.1 Transformations intégrales et inversions

Théorème A.1 (Transformation de Fourier). *Si f est intégrable ainsi que sa transformée de Fourier, on a*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi$$

Théorème A.2 (Transformation de Mellin). *Dans le domaine d'absolue convergence de la transformée de Mellin, on a*

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} \psi(y)y^s \frac{dy}{y} \quad \text{et} \quad \psi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\sigma + ir)y^{-\sigma - ir} dr$$

Définition A.1 (Transformation de Eisenstein). La transformée de Eisenstein de $f \in C_c^\infty$ est définie par

$$Ef(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(r)E(e, 1/2 + ir) dr$$

A.2 Convolution

La convolution est un formalisme efficace et élégant pour les calculs, très présent en théorie multiplicative des nombres, mais pas nécessairement dans les ouvrages : on trouvera matière amplement suffisante pour notre usage dans le [?]. cf. Tenenbaum, Régis

Par analogie aux produits de Cauchy, qui donne les coefficients du produit de deux séries entières, on introduit le produit de convolution, qui donne les coefficients du produit de deux séries de Dirichlet.

La série de Dirichlet associée à une fonction f est la série $D(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, qui possède un domaine de convergence absolue qui est un demi-plan $[\operatorname{Re}(s) > x_0]$. Le produit de deux séries de Dirichlet est encore convergent sur l'intersection des domaines, et on a

$$D(f, s) D(g, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{ab=n} f(a) g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

On introduit donc le produit de convolution de deux fonctions comme étant ce coefficient

$$f \star g(n) = \sum_{ab=n} f(a) g(b) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Théorème A.3 (Propriétés de la convolution). *Le produit de convolution vérifie des propriétés fonctionnelles et structurelles intéressantes, celles qui nous serviront sont regroupées dans le théorème suivant :*

★ *l'ensemble des fonctions arithmétiques muni de la convolution est un anneau factoriel*

- ★ une fonction f est inversible pour la convolution si, et seulement si, $f(1) \neq 0$, on peut alors construire explicitement f^{-1} par récurrence
- ★ l'ensemble des fonctions multiplicatives muni de la convolution est un groupe

Plusieurs fonctions multiplicatives sont fondamentales en arithmétique et apparaissent fréquemment :

- ★ la fonction constante $\mathbf{1} : n \mapsto 1$
- ★ la fonction de Mobius $\mu = \mathbf{1}^{-1} : n \mapsto (-1)^{\omega(n)} \delta_{QF}$
- ★ le nombre de diviseurs $\tau = \mathbf{1} \star \mathbf{1} : n \mapsto \sum_{d|n} \mathbf{1} = 2^{\omega(d)}$
- ★ le fonction bêta $\beta = \tau^{-1} = \mu \star \mu$

A.3 Théorie spectrale

Les références principales pour les résultats d'analyse fonctionnelle et de théorie spectrale sont le Brézis.

Théorème A.4 (Théorème spectral). *Soit \mathbf{H} espace de Hilbert séparable. Si $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ est un opérateur autoadjoint compact, alors il existe une base hilbertienne de \mathbf{H} formée de vecteurs propres de T , i.e. un système orthonormé complet $(\phi_i)_i$ tels que $T\phi_i = \lambda_i\phi_i$, et $\lambda_i \rightarrow 0$.*

Théorème A.5 (Hilbert-Schmidt). *Soit (X, μ) un espace localement compact mesuré, avec μ borélienne positive. On suppose que $\mathbf{H} = L^2(X)$ est un espace de Hilbert séparable. Si $K \in L^2(X \times X)$, alors l'opérateur à noyau associé $T_K f(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y)$ est compact.*

Théorème A.6 (Mercer). *Soit T Hilbert-Schmidt de noyau K positif. Il existe alors un système orthonormé maximal de fonctions propres $(\phi_i)_i$ de valeurs propres associées positives. Si K est continu, on a la représentation $K(x, y) = \sum_i \lambda_i \phi_i(z) \phi_i(x)$.*

Références

- [Arakawa et al., 2002] Arakawa, Koyama, and Nakasuji (2002). Arithmetic forms of selberg zeta functions with applications to prime geodesic theorem. *Proc. Japan. Acad.*
- [Beardon, 1995] Beardon, A. F. (1995). *The geometry of discrete groups*.
- [Bergeron, 2011] Bergeron, N. (2011). *Le spectre des surfaces hyperboliques*.
- [Bernstein and (editeurs), 2004] Bernstein, J. and (editeurs), S. G. (2004). *An introduction to the Langlands program*.
- [Bolte and Johansson, 1996] Bolte, J. and Johansson, S. (1996). Theta lifts of maass waveforms. *Emerging applications of number theory*.
- [Bolte and Johansson, 1999] Bolte, J. and Johansson, S. (1999). A spectral correspondence for maass waveforms. *Geom. func. Anal.*
- [Bump, 1998] Bump, D. (1998). *Automorphic Forms and Representations*.
- [Dal'Bo, 2007] Dal'Bo, F. (2007). *Trajectoires géodésiques et horocycliques*.
- [Diamond and Shurman, 2005] Diamond, F. and Shurman, J. (2005). *A First Course in Modular Forms*.
- [do Carmo, 1976] do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall.
- [Earp and Toubiana, 2009] Earp, R. S. E. and Toubiana, E. (2009). *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*.
- [Gelbart, 1975] Gelbart, S. S. (1975). *Automorphic Forms on Adele Groups*.
- [Hida, 1993] Hida, H. (1993). *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*.
- [Iwaniec, 1997] Iwaniec, H. (1997). *Topics in Classical Automorphic Forms*.
- [Iwaniec, 2002] Iwaniec, H. (2002). *Spectral Methods of Automorphic Forms*.
- [Jacquet, 1972] Jacquet, H. (1972). *Automorphic forms on $GL(2)$. Part II*. Springer-Verlag.
- [Jacquet and Langlands, 1970] Jacquet, H. and Langlands, R. (1970). *Automorphic forms on $GL(2)$* . Springer-Verlag.
- [Juergen Elstrodt, 1998] Juergen Elstrodt, Fritz Grunewald, J. M. (1998). *Groups Acting on Hyperbolic Space : Harmonic Analysis and Number Theory*.
- [Katok, 1992] Katok, S. (1992). *Fuchsian Groups*.
- [Lafontaine,] Lafontaine, G. . H. . *Riemannian Geometry*. Springer.
- [Miyake, 2006] Miyake, T. (2006). *Modular Forms*.
- [Mneimné and Testard, 1986] Mneimné, R. and Testard, F. (1986). *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*.
- [Montgomery and Vaughan, 2007] Montgomery, H. and Vaughan, R. (2007). *Multiplicative Number Theory. 1. Classical Theory*.
- [Muller, 2007] Muller, W. (2007). Weyl's law in the theory of automorphic forms.
- [Rogawski,] Rogawski, J. Modular forms, the ramanujan conjectures and the jacquet-langlands correspondence.
- [Sarnak, 1995] Sarnak, P. (1995). Selberg's eigenvalue conjecture on the occasion of robert os-serman's retirement. *Notices of the AMS*.

- [Serre, 1970] Serre, J.-P. (1970). *Cours d'arithmétique*.
- [Shimura, 1994] Shimura, G. (1994). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*.
- [Strombergsson, 2001a] Strombergsson, A. (2001a). An application of an explicit trace formula to a well-known spectral correspondence on quaternion groups.
- [Strombergsson, 2001b] Strombergsson, A. (2001b). Some remarks on a spectral correspondence for maass waveforms. *International Mathematics Research Notices*.
- [Swinnerton-Dyer, 2001] Swinnerton-Dyer, H. P. F. (2001). *A Brief Guide to Algebraic Number Theory*.
- [Vignéras, 1980] Vignéras, M.-F. (1980). *Arithmétique des Algèbres de Quaternion*.