

# TD Didactique

proportionnalité

# Que nous disent les programmes ?

- enseignée au cycle 3, mais déjà abordée au cycle 2 avec la résolution de problèmes multiplicatifs

*Exemple : Un manuel de mathématiques pèse 340 g. Combien pèsent 5 manuels identiques ?*

Ces problèmes préparent les élèves à la reconnaissance de situation de proportionnalité et à leur résolution par une procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre.

- dans quel domaine est-elle enseignée ?
  - nombres et calculs
  - grandeurs et mesures
  - espace et géométrie

# Quels sont les pré-requis pour aborder la proportionnalité ?

- lecture de tableaux, de graphiques
- connaissance des nombres en jeu dans les problèmes (nombres décimaux pour les problèmes incluant la monnaie par exemple)
- *choisir plutôt la correspondance 1 bonbon coûte 50 centimes, plutôt que 0,5 €*

# Quelles procédures ?

## ÉNONCÉ

Les gâteaux mentionnés coûtent tous le même prix. Calculer le prix à payer pour l'achat de 10 gâteaux sachant que le coût pour 6 de ces gâteaux est de 5,40 €.

- passage à l'unité

Le passage par l'unité correspond au calcul du prix d'un gâteau.

Si les grandeurs sont exprimées avec leurs unités :

- si 6 gâteaux coûtent 5,40 €, alors 1 gâteau coûte 6 fois moins, c'est-à-dire  $5,40 \text{ €} \div 6 = 0,90 \text{ €}$  ;
- si 1 gâteau coûte 0,90 €, alors 10 gâteaux coûtent 10 fois plus, c'est-à-dire  $0,90 \text{ €} \times 10 = 9 \text{ €}$ .

Le passage par l'unité donne le prix d'un gâteau, soit 0,90 €. Seule l'unité change par rapport au coefficient de proportionnalité précédent. On retrouve le même calcul que précédemment :

$$10 \times (5,40 \div 6) = 10 \times 0,9 = 9$$

Sans l'usage des unités, il ne fait pas sens.

NOMBRE DE GATEAUX	1	6	10
Prix à payer en euros	?	5,40	?

# Quelles procédures ?

- détermination puis utilisation du coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité est la grandeur quotient « prix à payer par gâteau ». Il a du sens pour les élèves.

Exprimé avec son unité (euro par gâteau), il vaut  $5,40 \text{ €} / 6 \text{ gâteaux} = 0,90 \text{ €/gâteau}$ .

La grandeur « prix à payer » est le produit de la grandeur « nombre de gâteaux » par le coefficient de proportionnalité.

Si les grandeurs sont exprimées avec leurs unités, le prix de 10 gâteaux est :

$$10 \text{ gâteaux} \times (5,40 / 6 \text{ €/gâteau}) = 10 \text{ gâteaux} \times 0,90 \text{ €/gâteau} = 9 \text{ €}$$

Si les grandeurs ne sont pas exprimées avec leurs unités, le prix de 10 gâteaux est :

$$10 \times (5,40 \div 6) = 10 \times 0,9 = 9$$

Ce seul calcul ne permet pas de donner du sens à la notion de proportionnalité

NOMBRE DE GATEAUX	6	10
Prix à payer en euros	5,40	?



# Quelles procédures ?

- la linéarité (induite par l'énoncé) : obtenir une correspondance à partir d'une autre

# Les procédures à utiliser par les élèves

## PROCÉDURES UTILISANT LA PROPRIÉTÉ DE LINÉARITÉ POUR L'ADDITION

### Domaine « Nombres et calculs »

8 fois 10 est égal à 80 et 8 fois 3 est égal à 24.

Comme 13 est égal à 10 plus 3, on en déduit que 8 fois 13 est égal à 80 plus 24.

### Domaine « Grandeurs et mesures »

5 kg de pommes de terre coûtent 6,40 € et 3 kg coûtent 3,84 €.

Comme 5 kg moins 3 kg font 2 kg, on en déduit que 2 kg de ces pommes de terre coûtent 6,40 € moins 3,84 € soit 2,56 €.

### Domaine « Espace et géométrie »

La figure ABCD est telle que ACD est un triangle isocèle en A. On donne les dimensions suivantes  $DA = 18,2$  cm,  $DC = 5,6$  cm,  $AB = 11,9$  cm et  $BC = 6,3$  cm.

Sans utiliser de multiplication, indiquer les dimensions de l'agrandissement A'B'C'D' de cette figure telle que  $A'B' = 15,3$  cm et  $B'C' = 8,1$  cm.

Comme  $DC = 5,6$  cm =  $11,9$  cm -  $6,3$  cm, on en déduit  $D'C' = 15,3$  cm -  $8,1$  cm =  $7,2$  cm.

Comme  $DA = 18,2$  cm =  $11,9$  cm +  $6,3$  cm, on en déduit  $D'A' = 15,3$  cm +  $8,1$  cm =  $23,4$  cm.

# Les procédures à utiliser par les élèves

## PROCÉDURES UTILISANT LA PROPRIÉTÉ DE LINÉARITÉ POUR LA MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE

### Domaine « Nombres et calculs »

7 fois 13 est égal à 91.

Comme 35 est le quintuple de 7, on a 35 fois 13 est le quintuple de 91 c'est-à-dire 455.

### Domaine « Grandeurs et mesures »

Une pile de 500 feuilles de papier identiques a une épaisseur de 3,5 cm. Quelle est l'épaisseur d'une pile de 2 000 de ces mêmes feuilles ?

J'ai acheté 35 mangas qui étaient tous au même prix à la librairie et cela m'a coûté 252 €.

Si ma sœur veut en acheter 5, combien va-t-elle payer ?

### Domaine « Espace et géométrie »

Dans un agrandissement ou une réduction, les longueurs sur la figure agrandie ou réduite sont proportionnelles aux longueurs associées sur la figure initiale. Les situations d'agrandissement ou de réduction sont particulièrement riches et propices à la mise en place d'activités à prise d'initiatives.

Certaines procédures utilisent à la fois les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, on les qualifie alors parfois de « **procédures mixtes** ».

Dix objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent quinze de ces objets ?

Pour résoudre ce problème on peut diviser par 2 le prix de dix objets pour trouver le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre) puis ajouter le prix de dix objets et le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour l'addition).

## Un exercice pratique pour vous

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos?

*Résolvez ce problème en utilisant les trois procédures :*

- *linéarité (multiplication, addition),*
- *passage à l'unité,*
- *détermination et utilisation du coefficient de proportionnalité.*

## Un exercice pratique pour vous

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos?

### *Linéarité :*

→ *Si 4 stylos valent 2,42 e, alors 8 stylos valent deux fois plus, soient  $2 \times 2,42 = 4,84$ e. (linéarité de la multiplication)*

→ *Alors 12 stylos valent 8 stylos et 4 stylos, soient  $4,84 + 2,42 = 7,26$  e (linéarité de l'addition)*

→ *Si 4 stylos valent 2,42 e, alors 2 stylos valent deux fois moins, soient  $2,42 : 2 = 1,21$ e. (linéarité de la multiplication)*

→ *Alors, 14 stylos valent  $7,26 + 1,21 = 8,47$  e. (linéarité de l'addition)*

## Un exercice pratique pour vous

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos?

*Passage à l'unité :*

→ *Si 4 stylos valent 2,42e, alors 1 stylo vaut 0,605 e  
donc 14 stylos valent  $14 \times 0,605 = 8,47e$*

## Un exercice pratique pour vous

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos?

*Coefficient de proportionnalité :*

→ *Le coefficient de proportionnalité est le rapport entre les stylos et les euros.  
4 stylos valent 2,42e, donc le coefficient de proportionnalité est de  $2,42/4$*

*Pour 14 stylos, il faut donc multiplier 14 par  $2,42/4$  soient 8,47e.*

# Quelle progression ?

- dès le CM1, notion à développer sur le long terme
- Les élèves ont recours à des procédures utilisant :
  - les propriétés de la linéarité (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, ou pour la multiplication par un nombre).
  - passage à l'unité
- Ensuite, les élèves rencontrent progressivement des situations qui nécessitent de **combiner des procédures** utilisant les propriétés de la linéarité (procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité).
- Pendant la seconde moitié du cycle, s'ajoutent des problèmes impliquant des échelles ou des vitesses constantes. Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.
- Pour que la proportionnalité prenne tout son sens, l'élève doit aussi être confronté à des **situations ne relevant pas de la proportionnalité** (« Si je mesure 1 mètre à 10 ans, je peux mesurer 2 mètres à 20 ans mais sûrement pas 4 mètres à 40 ans et je sais aussi que je ne mesurais pas 10 centimètres à 1 an. »)
- penser à proposer des situations en rituels

# Quelle progression ?

	Septembre-Octobre	Novembre-Décembre	Janvier-Février	Mars-Avril	Mai-juin
CM1	<b>Propriétés de linéarité (additive et multiplicative)</b>				
	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5
	Introduire Institutionnaliser				
CM2	<b>Passage à l'unité puis coeff. de proportionnalité</b>				
	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
6 <sup>ème</sup>	<b>Coeff. de proportionnalité</b>				
	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15

# Quelle progression ?

## Diversité des contextes

Quantités, grandeurs (taille, volume, masse) et agrandissement

	Septembre-Octobre	Novembre-Décembre	Janvier-Février	Mars-Avril	Mai-juin
CM1	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5
CM2	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
6 <sup>ème</sup>	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15

Vitesses constantes, agrandissement, échelles

Pourcentages simples

# Quels gestes professionnels développer ?

- suivre une démarche :
  - recherche individuelle
  - échanges sur les procédures par groupe (pour se rendre compte que certaines méthodes sont plus efficaces que d'autres selon le problème)
  - mise en commun : présentation des différentes procédures
  - trace écrite des procédures (affichage, cahiers)
- amener les élèves à exprimer les grandeurs dans des unités
- pas de “méthode experte” à imposer, mais permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures. On parlera plutôt de “procédure la plus adaptée à la situation”
- une variable didactique : la relation entre les nombres

Exemples d'activités de classe :

# Des situations de “découverte” en nombres et calculs



# Des situations de réinvestissement en nombres et calculs

- 5 Marie range ses photos dans un album.  
Pour ranger 20 photos, elle a utilisé 3 pages.

*Si elle continue ainsi, combien de pages lui faudra-t-il pour ranger 100 photos ?*

- 4 Au collège, 320 élèves ont voté à l'élection du représentant des élèves. Nina a obtenu 60 % des voix. Nino a eu le reste des voix, c'est-à-dire 40 %.

- a) *Combien Nina a-t-elle obtenu de voix ?*  
b) *Combien Nino a-t-il obtenu de voix ?*

- 2 20 % des 450 habitants du village de Granspor ont assisté au match de rugby qui s'est déroulé dimanche.

*Combien de personnes ont assisté à ce match ?*

# Des situations de découverte en grandeurs et mesures

## Je cherche Avec quatre bandes

- A** Aya met bout à bout des bandes vertes, toutes de même longueur.  
En mettant bout à bout 4 bandes vertes, elle obtient une longueur de 8 cm.



Quelle longueur obtiendra-t-elle en mettant bout à bout :

- a. 8 bandes vertes ?
- b. 12 bandes vertes ?
- c. 40 bandes vertes ?
- d. 48 bandes vertes ?

- B** Romy met bout à bout des bandes rouges, toutes de même longueur.  
En mettant bout à bout 4 bandes rouges, elle obtient une longueur de 6 cm.

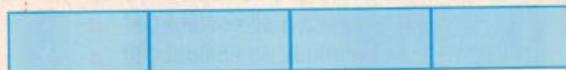


Quelle longueur obtiendra-t-elle en mettant bout à bout :

- a. 8 bandes rouges ?
- b. 12 bandes rouges ?
- c. 40 bandes rouges ?
- d. 48 bandes rouges ?



- C** Milo met bout à bout des bandes bleues, toutes de même longueur.  
En mettant bout à bout 4 bandes bleues, il obtient une longueur de 9 cm.



Quelle longueur obtiendra-t-il en mettant bout à bout :

- a. 8 bandes bleues ?
- b. 12 bandes bleues ?
- c. 40 bandes bleues ?
- d. 48 bandes bleues ?

Capmaths CM1

# Des situations de découverte en grandeurs et mesures

## Je cherche Le prix des cahiers

A Quel est le prix de chaque lot de cahiers ?

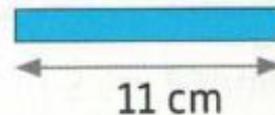
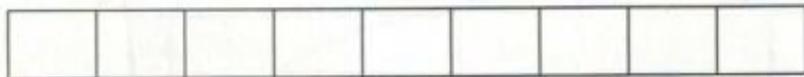


Capmaths CM1

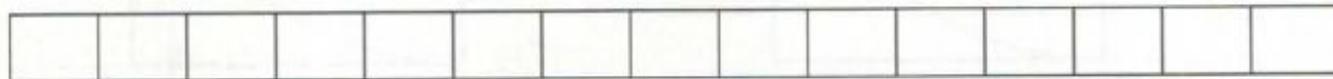
# Des situations de découverte en grandeurs et mesures

## Séance 1

**Étape 1 :** En utilisant les rectangles que tu as reçus et la bande témoin, trouve la longueur d'une file de 9 rectangles alignés tous de la même façon.



**Étape 2 :** En utilisant les rectangles que tu as reçus et la bande témoin, trouve la longueur d'une file de 15 rectangles alignés tous de la même façon.

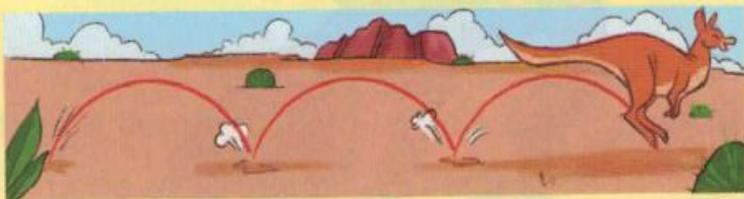


**Étape 3 :** Trouve la longueur d'une file de 12 rectangles alignés tous de la même façon.

# Des situations de "réinvestissement" en grandeurs et mesure

## LES SAUTS DE KANGOUROU

- 1** Un kangourou fait des sauts réguliers.  
En 3 sauts, il avance de 12 mètres.



De combien avance-t-il en faisant :

- a.** 6 sauts ?
- b.** 15 sauts ?
- c.** 12 sauts ?
- d.** 300 sauts ?

## LES TOURS DE PÉDALIER

- 2** Milo a remarqué que lorsqu'il fait 2 tours de pédalier, son vélo parcourt 5 mètres.  
Quelle distance parcourt son vélo lorsqu'il fait :

- a.** 4 tours de pédalier ?
- b.** 6 tours de pédales ?
- c.** 12 tours de pédalier ?
- d.** 20 tours de pédalier ?
- e.** 28 tours de pédalier ?

- 3** Combien de tours de pédalier doit faire Milo pour parcourir :
- a.** 20 mètres ?
  - b.** 500 mètres ?

# Des situations de réinvestissement en grandeurs et mesures

Exercice

**7** Avec sa trottinette, Max avance de 5 m à chaque fois que ses roues ont fait 12 tours.

**a.** Ses roues ont fait 240 tours. De combien de mètres Tom a-t-il avancé ?

**b.** Max veut aller à l'école à trottinette. Il doit parcourir 1 km.

Combien de tours feront ses roues ?



Exercice

**8** En 2019, l'envoi d'un colis de 500 g coute 6 € 25 c. Pour un colis de 1 kg, cela coute 7 € 80 c.

Le prix de l'envoi est-il proportionnel au poids du colis ?

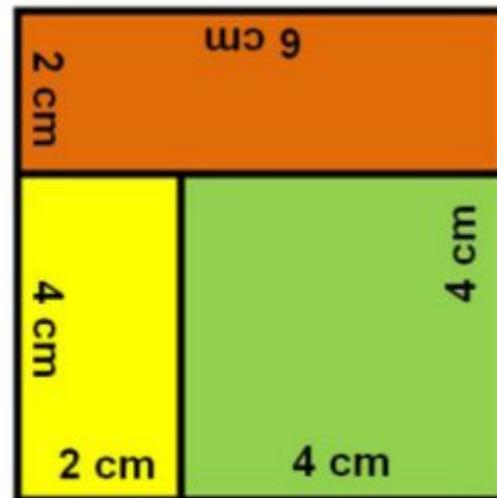
# Des situations de découverte en espace et géométrie

## les puzzles

### Énoncé

Présenter l'activité en parlant d'agrandir la figure. Ne pas parler de proportionnalité à ce stade.

Agrandis les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurant 2 cm mesurent finalement 6 cm.



# Des rituels ou “activités flash”

**3 objets identiques pèsent ensemble 7 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 30 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 60 de ces objets ?**

## Des rituels ou “activités flash”

**7 objets identiques pèsent ensemble 5 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 21 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 420 de ces objets ?**

## Des rituels ou “activités flash”

**10 objets identiques pèsent ensemble 42 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 5 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 15 de ces objets ?**

## Des rituels ou “activités flash”

**10 objets identiques pèsent ensemble 45 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 3 de ces objets ?**

## Des rituels ou “activités flash”

**7 objets identiques pèsent ensemble 28 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 9 de ces objets ?**

# Une vidéo de classe



- CM1-CM2 en REP + en 2017
- séances ritualisées
- Ici, la séance est une séance de calcul mental en début de séquence sur la proportionnalité
- 2ème séance sur ce thème
- séance non modélisante : une manière de faire

## Objectifs de la séance :

- travailler sur le sens en faisant oralisant systématiquement le travail mené
- utiliser la procédure la plus pertinente en utilisant les variables en jeu (pas systématiquement le “retour à l’unité”)
- renforcer l’aptitude des élèves à voir les relations entre les nombres
- CM1 : utiliser les propriétés de la linéarité dans des problèmes à 1 étape
- CM2 : utiliser les propriétés de linéarité ou retour à l’unité dans des problèmes à 1 ou 2 étapes

# Des rituels ou “activités flash”

- ne pas systématiser la représentation en tableau : on cherche à ce que l'élève comprenne, pas qu'il systématise
- penser en termes de progression sur l'année et sur le cycle :
  - propriétés de linéarité pour l'addition et la multiplication
  - passage à l'unité
  - coefficient de proportionnalité (qui sera de plus en plus difficile à trouver)

# Une vidéo de classe

- CM1-CM2 en REP + en 2017
- séances de classe structurées :
  - introduction de la notion
  - compréhension de ce qui est en jeu
  - institutionnalisation dans les cahiers
  - renforcement
  - évaluation
  - remédiation
- Ici, la séance est en milieu de séquence
- séance non modélisante : une manière de faire

## Objectifs de la séance :

- s'assurer de la maîtrise de tous les élèves de la procédure utilisant les propriétés de linéarité
- renforcer l'aptitude des élèves à voir les relations entre les nombres
- travailler sur le sens en faisant écrire ce qui est fait, calculé



# Une vidéo de classe

CM1

1. Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

Pour 15 crêpes	Pour 25 crêpes
300 g de farine	500 g de farine
3 œufs	5 œufs
75 cL de lait	125 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile	5 cuillères à soupe d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.

Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

2. Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recette de Corentin.

Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

3. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

- Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
- Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?

Et en 10 secondes ?

4. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boîte une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g. Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

5. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 836 g.

Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

6. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 178 g.

Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

7. Une usine fonctionne tous les jours (7 jours sur 7) et toute la journée chaque jour (24 heures sur 24). Elle produit des robots ménagers de façon continue. L'usine produit 80 robots par jour.

Combien l'usine produit-elle de robots par semaine ?

Recopier la phrase suivante en la complétant :

« On peut dire qu'il sort un robot de cette usine toutes les ..... minutes. »

8. Plusieurs enfant jouent avec des ~~Kapla~~ <sup>bois</sup>. C'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.

Alex a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

- Emma a empilé 100 planchettes ;
- Léo a empilé 5 planchettes ;
- Zoé a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

# Une vidéo de classe

CM2

1. Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois que s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

- Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes ;
- Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?  
Et en 10 secondes ?

2. Un train roule à la vitesse constante de 240 km/h.

Quelle distance parcourt-il en 15 minutes à cette vitesse ?

Combien de temps met-il pour parcourir 100 km à cette vitesse ?

3. Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boîte une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g. Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

4. L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 836 g.

Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

5. Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 178 g.

Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

6. Une usine fonctionne tous les jours (7 jours sur 7) et toute la journée chaque jour (24 heures sur 24). Elle produit des robots ménagers de façon continue. L'usine produit 80 robots par jour.

Combien l'usine produit-elle de robots par semaine ?

Recopier la phrase suivante en la complétant :

« On peut dire qu'il sort un robot de cette usine toutes les ..... minutes. »

7. Sur un plan de l'école Jean Lurçat l'échelle donnée dit que 10 cm sur le plan représentent 25 m en réalité.

Sur le plan, le couloir du deuxième étage de l'école mesure 13,6 cm.

Quelle est la longueur du couloir en réalité ?

Une salle de classe mesure 6 m de large. Quelle est la largeur de cette salle sur le plan ?

8. Plusieurs enfants jouent avec des ~~Kapla~~ <sup>Kapla</sup>, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.

Alex a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

- Emma a empilé 100 planchettes ;
- Léo a empilé 5 planchettes ;
- Zoé a empilé 17 planchettes.

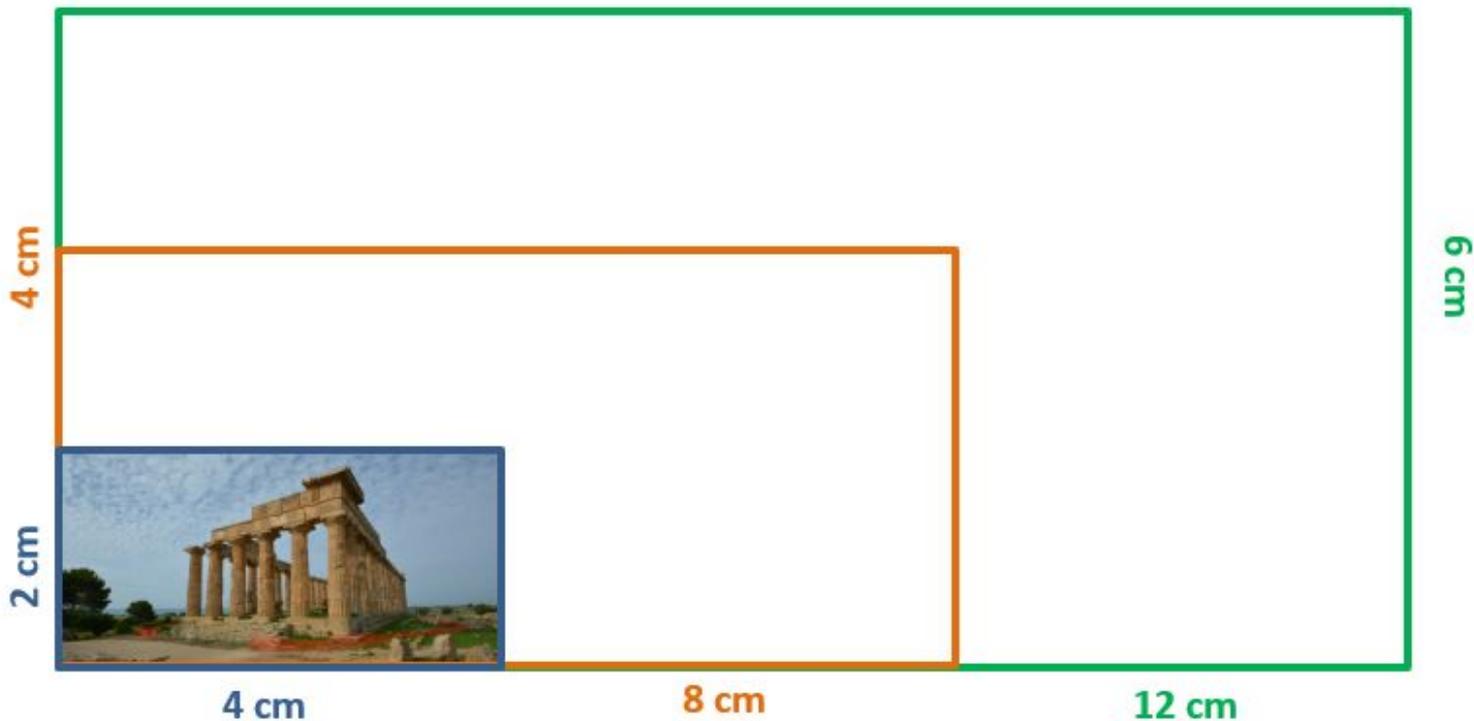
Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

# les puzzles (espace et géométrie)

« Une figure agrandie conserve la même forme que la figure initiale. »

« Pour agrandir une figure, il faut multiplier toutes les longueurs par un même nombre. »

Exemple de trace écrite pour un agrandissement



# Analyse comparée de manuels

# Des points de comparaison

- A quel moment la proportionnalité est-elle abordée ? en CM1 ? en CM2 ?
- Comment est-elle abordée : systématiquement par un tableau ?
- Quelle est la place du sens dans les exercices proposés ?
- Quelles sont les propriétés que les élèves sont incités à utiliser ?
- La proportionnalité est-elle abordée dans tous les champs disciplinaires des mathématiques : nombres et calculs, grandeurs et mesures, espace et géométrie ?

# Principales erreurs des élèves

# Penser tous les problèmes en terme de proportionnalité

Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.  
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Oui

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 2 \\ \hline 220 \end{array}$$

Il fera 220 centimètres

Revenir au sens pour que l'élève se questionne si la situation relève vraiment de la proportionnalité.

# Penser tous les problèmes en terme de proportionnalité

## Problème 7 :

Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?  
Justifie ta réponse.

Oui car c'est un tableau de proportionnalité.

Oui car si le nombre de Km augmente le nombre de min aussi.

Revenir au sens pour que l'élève se questionne si la situation relève vraiment de la proportionnalité.

# Persistance du modèle additif

Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.  
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$1,60 + 4 = 5,60$   
pour 6 baguette il faudra 5 € et 60 centime

Pour 4 baguettes de plus, on paye 4 euros de plus.

# Non prise en compte du passage à l'unité

Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.  
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$$\begin{array}{r} \times \quad 1,60 \\ \quad \quad 6 \\ \hline 9,60 \end{array}$$

Le prix de 6 baguettes  
s'est 9,60€

L'élève pense qu'une baguette vaut 1,60e donc le résultat est faux.

# L'élève ne sait pas choisir la procédure à adopter

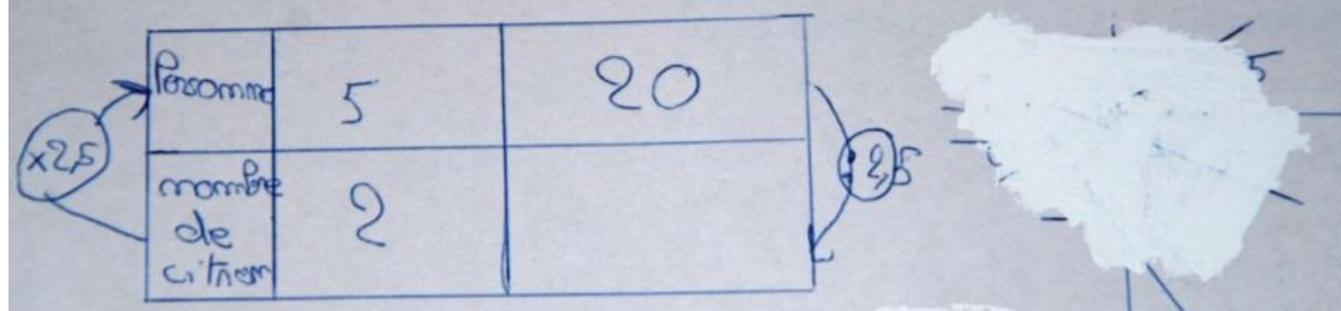
Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

personne	5	20
nombre de citrons	2	



The student has drawn a table with two rows and two columns. The first row is labeled 'personne' and contains the numbers 5 and 20. The second row is labeled 'nombre de citrons' and contains the number 2. To the left of the table, a circle contains 'x2.5' with an arrow pointing to the transition from 5 to 20. To the right, another circle contains 'x4' with an arrow pointing to the transition from 2 to an empty cell. To the right of the table is a large, messy scribble.

L'élève construit un tableau, mais ne sait pas l'exploiter... Attention à privilégier le sens, plutôt que la formalisation d'un tableau sans compréhension.

# Mauvaise utilisation des signes mathématiques

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$2 = 5$   
 $4 = 10$   
 $8 = 15$   
 $12 = 20$  Pour 20 personnes il faut 12 citrons

Même si on comprend ce que veut dire l'élève, cette modélisation n'est pas conforme.

Pour vous préparer au concours...

# Sujet de concours, partie didactique

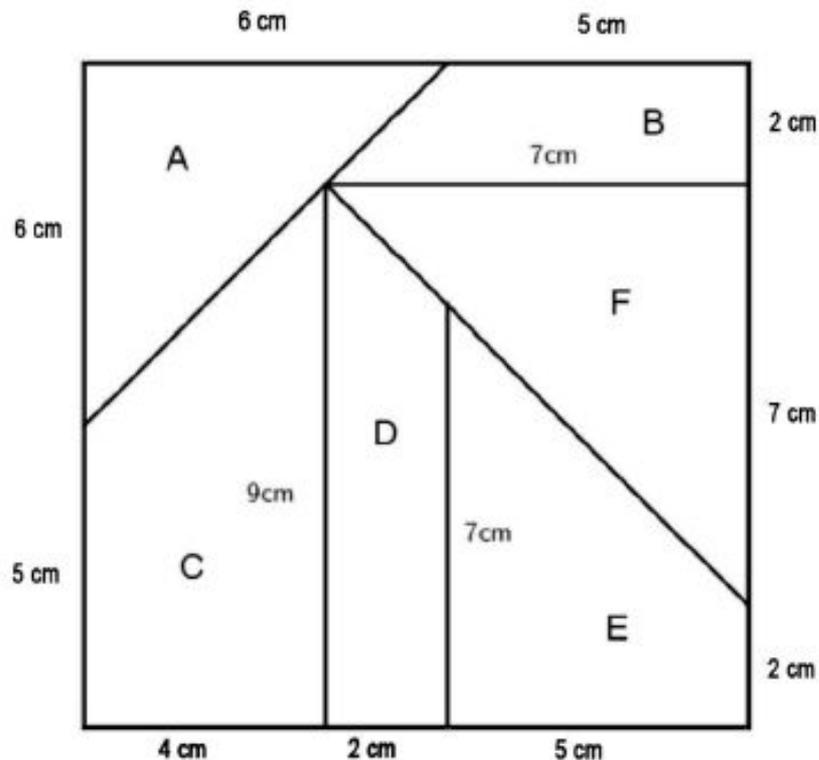
*Consignes données oralement :*

« Voici un puzzle carré.

Vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand. Il faudra le reconstituer exactement avec les pièces agrandies.

Le segment de 4 cm devra mesurer 6 cm sur votre puzzle agrandi.

Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche ».



# Sujet de concours 1, partie didactique

*Modalités de mise en œuvre : le professeur demande aux élèves de travailler par groupes de quatre, de s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, de se répartir la construction des pièces en faisant leurs calculs individuellement puis d'assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi.*

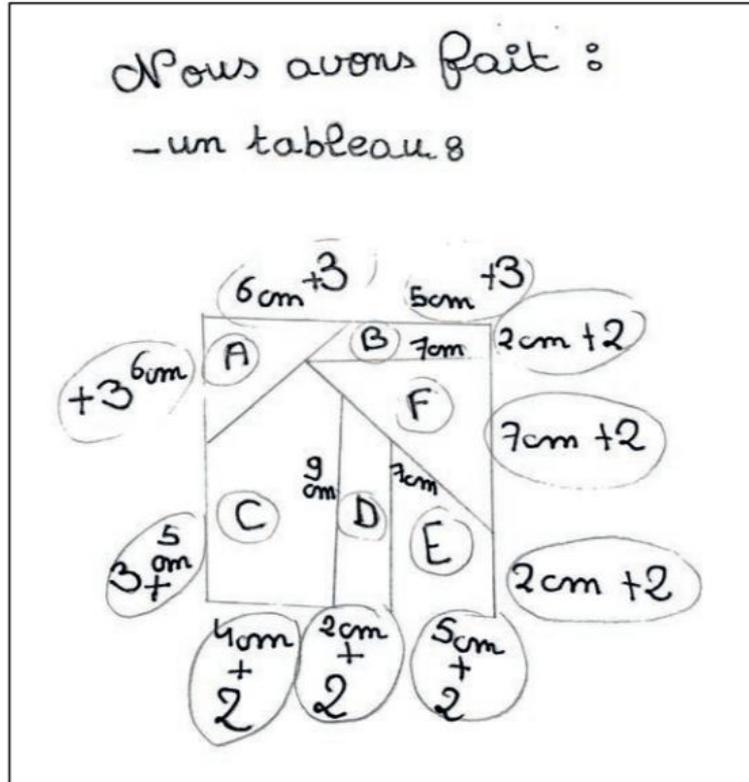
1. Quel champ mathématique cette situation permet-elle de travailler ?
2. Analyser les différentes stratégies mises en œuvre en pointant les réussites et les erreurs des groupes ayant produit les affiches 1, 2 et 3.
3. Dans la mesure du possible, indiquer les procédures utilisées pour déterminer chacune des valeurs trouvées par le groupe ayant produit l'affiche 4.

# Corrigé : champ mathématique

- proportionnalité en grandeurs et mesures
- problèmes multiplicatifs puisque situation d'agrandissement

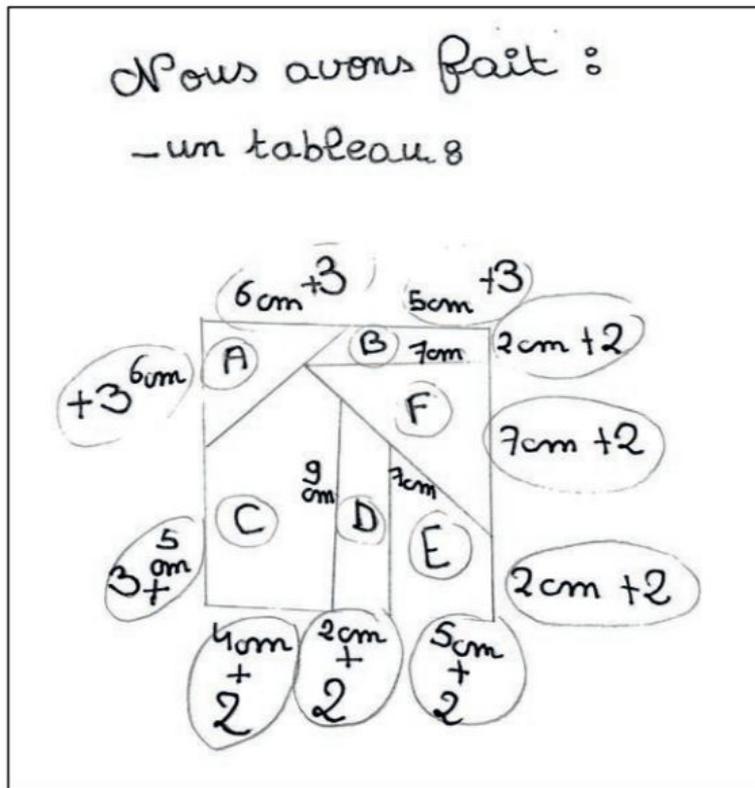
# Sujet de concours, partie didactique

Affiche n°1 :



# Corrigé de concours, partie didactique

Affiche n°1 :



Les élèves voient que  $6\text{ cm} = 4\text{ cm} + 2\text{ cm}$   
Ils ont ajouté 2 (ou 3) aux mesures initiales

Réussites :

- ils ont réussi à modéliser la situation par un schéma
- ils n'ont pas ajouté le même nombre à chaque longueur de côté

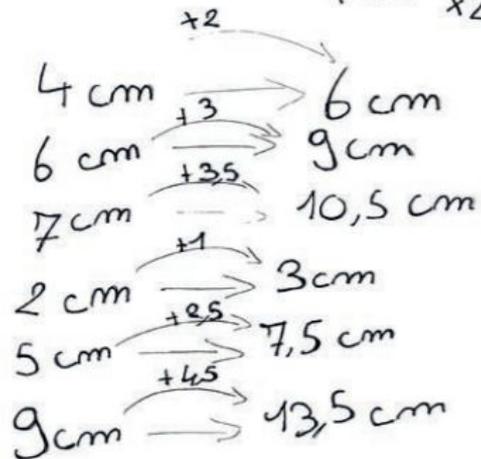
Erreurs :

- ils pensent qu'augmenter une mesure, c'est ajouter un nombre alors qu'ici, nous sommes dans le champ multiplicatif
- Les valeurs à l'intérieur du carré n'ont pas été agrandies

# Sujet de concours, partie didactique

Affiche n°2 :

Pour trouver la solution de ce puzzle,  
il faut ajouter le  $\frac{1}{4}$  de chaque nombre  
et le multiplier par  $\times 2$



# Corrigé de concours, partie didactique

Affiche n°2 :

Pour trouver la solution de ce puzzle,  
il faut ajouter le  $\frac{1}{4}$  de chaque nombre  
et le multiplier par  $\times 2$

4 cm	$\xrightarrow{+3}$	6 cm
6 cm	$\xrightarrow{+3}$	9 cm
7 cm	$\xrightarrow{+3.5}$	10,5 cm
2 cm	$\xrightarrow{+1}$	3 cm
5 cm	$\xrightarrow{+2.5}$	7,5 cm
9 cm	$\xrightarrow{+4.5}$	13,5 cm

Les élèves voient que  $6\text{cm} = 4\text{cm} + (\frac{1}{4} \times 4\text{cm}) \times 2$

Ils ont donc utilisé la procédure de linéarité mixte (addition et multiplication)

Réussites :

- ils ont réussi à modéliser la situation en donnant toutes les mesures
- ils n'ont pas ajouté le même nombre à chaque longueur de côté

Erreurs :

- la phrase d'explication n'est pas juste mathématiquement : on comprend qu'il faut faire :  $(\frac{1}{4}x) \times 2$  où  $x$  représente la longueur à agrandir

# Sujet de concours, partie didactique

Affiche n°3 :

Pour faire le puzzle on a d'abord divisé  
4 par 2 :

$$4 \div 2 = 2$$

Et on a fait la multiplication de 2 (résultat de  $4 \div 2$ ) par  
3 :

$$2 \times 3 = 6$$

On a donc divisé par 2 puis multiplié par 3, en  
procédant de cette façon :

4  $\rightarrow$  6 (dans l'exemple)

2  $\rightarrow$  3       $2 \div 2 = 1, 1 \times 3 = 3$

6  $\rightarrow$  9       $6 \div 2 = 3, 3 \times 3 = 9$

7  $\rightarrow$  10,5       $7 \div 2 = 3,5, 3,5 \times 3 = 10,5$

5  $\rightarrow$  7,5       $5 \div 2 = 2,5, 2,5 \times 3 = 7,5$

9  $\rightarrow$  13,5       $9 \div 2 = 4,5, 4,5 \times 3 = 13,5$

# Corrigé de concours, partie didactique

Affiche n°3 :

Pour faire le puzzle on a d'abord divisé 4 par 2 :

$$4 \div 2 = 2$$

Et on a fait la multiplication de 2 (résultat de  $4 \div 2$ ) par 3 :

$$2 \times 3 = 6$$

On a donc divisé par 2 puis multiplié par 3, en procédant de cette façon :

4	→	6 (dans l'exemple)	
2	→	3	$2 \div 2 = 1, 1 \times 3 = 3$
6	→	9	$6 \div 2 = 3, 3 \times 3 = 9$
7	→	10,5	$7 \div 2 = 3,5, 3,5 \times 3 = 10,5$
5	→	7,5	$5 \div 2 = 2,5, 2,5 \times 3 = 7,5$
9	→	13,5	$9 \div 2 = 4,5, 4,5 \times 3 = 13,5$

Les élèves ont utilisé les propriétés de linéarité de la multiplication.

Réussites :

- la procédure est claire et efficace
- pas d'erreurs de calcul
- toutes les mesures ont été recalculées

Erreurs :

- aucune erreur

# Sujet de concours, partie didactique

Affiche n°4 :

4	6	7	2	5	9
6	9	10,5	3	7,5	13,5

↑

↖ → 6 car on le sait.

6 → 9 car  $6 + 3$  est égale à 9.

7 → 10,5 car -

2 → 3 car la moitié de 6 est 3.

5 → 7,5 car  $4 + (2 \div 2)$  est égale à 7,5.

9 → 13,5 car  $4 + 4 + (2 \div 2)$  est égale à 13,5.

# Corrigé de concours, partie didactique

Affiche n°4 :

4	6	7	2	5	9
6	9	10,5	3	7,5	13,5

↑

↖ → 6 car on le sait.

6 → 9 car  $6 + 3$  est égale à 9.

7 → 10,5 car -

2 → 3 car la moitié de 6 est 3.

5 → 7,5 car  $4 + (2 \div 2)$  est égale à 7,5.

9 → 13,5 car  $4 + 4 + (2 \div 2)$  est égale à 13,5.

Les élèves ont élaboré un tableau à partir des données de l'énoncé. Ils utilisent les propriétés de la linéarité de l'addition et de la multiplication

Réussites :

- la procédure est claire et efficace
- pas d'erreurs de calcul

Erreurs:

- aucune erreur
- ils n'ont pas su expliquer pour 7, mais on suppose qu'ils ont utilisé la 4ème colonne du tableau (divisé la moitié de 2, qui donne la moitié de 3 soit 1,5), puis la 2ème (ils ont ajouté 1,5 à 9

# Sujet de concours 2, partie didactique (groupe 3 2018)

Une enseignante de CM2 propose l'exercice suivant en classe de CM2.

Une boîte contient des dragées toutes identiques.  
120 dragées pèsent 360 g.  
Combien pèsent 30 dragées ?

1. Proposer trois procédures pouvant être utilisées par les élèves pour résoudre cet exercice, en explicitant à chaque fois chacun des calculs effectués pour trouver le résultat attendu.
2. L'enseignante veut vérifier la maîtrise de la procédure dite de retour à l'unité par les élèves. Elle souhaite garder la même forme d'exercice en modifiant les nombres en jeu dans l'énoncé pour contraindre, ou au moins encourager vivement, les élèves à utiliser cette procédure. Proposer un énoncé modifié qu'elle pourrait soumettre à ses élèves.

# Corrigé du concours 2, partie didactique

## 1ère procédure : la linéarité de la multiplication

30 dragées, c'est 4 fois moins que 120 dragées, donc la masse va aussi être divisée par 4.

$$360 : 4 = 90\text{g}$$

# Corrigé du concours 2, partie didactique

## 2ème procédure : le retour à l'unité

120 dragées pèsent 360g donc 1 dragée pèse 3g.

Calcul de la masse pour 30 dragées :  $30 \times 3\text{g} = 90\text{g}$

## Corrigé du concours 2, partie didactique

### **3ème procédure : la détermination du coefficient de proportionnalité et son utilisation**

Pour passer du nombre de dragées à sa masse, il faut multiplier par 3, donc si on a 30 dragées, elles pèseront  $3 \times 30 = 90\text{g}$

## Corrigé du concours 2, partie didactique

### Pour encourager les élèves à utiliser la procédure de retour à l'unité

Il faudrait que l'enseignant propose une relation entre les nombres qui n'incite pas à recourir à la procédure de linéarité (additive ou multiplicative). Le rapport multiplicatif entre les nombres doit être moins évident.

Exemple : utiliser le rapport :  $\times 4$ ,  $\times 7$  ou  $\times 9$  et demander le prix de  $x$  dragées, tel que  $x$  ne soit pas un multiple des autres nombres.

*Une boîte contient des dragées toutes identiques.*

*13 dragées pèsent 52 grammes. Combien pèsent 19 dragées ?*

# Sujet de concours 3, partie didactique (groupe 1, 2017)

L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2008.

*Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut :*

- 250 g de farine
- 1 litre de lait
- 4 œufs
- 1 cuillerée à soupe d'huile
- 2 pincées de sel.

*Calcule la quantité de chacun des ingrédients nécessaire pour faire des crêpes pour 9 personnes.*

1. Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?
2. Expliciter les procédures utilisées pour le calcul de la masse de farine nécessaire par chacun des élèves A, B et C.
3. En quoi le choix de 300 g de farine nécessaires au lieu de 250 g aurait-il pu modifier les procédures proposées par les élèves ?

# Corrigé de concours 3, partie didactique (groupe 1, 2017)

La notion du programme travaillée dans cet exercice est la proportionnalité dans le cadre de la résolution d'un problème multiplicatif.

# Corrigé de concours 3, partie didactique (groupe 1, 2017)

Elève A

Tu peux faire tes calculs à droite du tableau.

...3.75... g de farine	-	$250\text{ g} + 125\text{ g} = 375\text{ g}$
...4.5... litre(s) de lait	-	$4 + \text{sa moitié} = 4,5\text{ litres}$
...6... œufs	-	$4 + 2 = 6\text{ œufs}$
...1 et $\frac{1}{2}$ ... cuillerée(s) à soupe d'huile	-	$1 + \text{sa moitié} = 1\text{ et } \frac{1}{2}$
...3... pincées de sel	-	$2 + 1 = 3\text{ pincées}$

Je fais à chaque fois  
le nombre + sa moitié  
parce que 6 + sa moitié  
font 9.

Procédure utilisée : la linéarité mixte de l'addition et de la multiplication

L'élève a compris que pour passer de  $9 = 6 + \frac{1}{2} \times 6$  et il l'applique à toutes les mesures avec réussite.

# Corrigé de concours 3, partie didactique (groupe 1, 2017)

Elève B *Tu peux faire tes calculs à droite du tableau.*

374,4 g de farine	250   6	41,6	<del>41,6</del>
..... litre(s) de lait	-24	416	x 3
..... œufs	70		3244
..... cuillère(s) à soupe d'huile	6		
..3..... pincées de sel	40	2   6	
	-36	3	
	4		

## Procédure utilisée : le retour à l'unité

L'élève essaye de diviser par 6 toutes ses quantités pour trouver pour 1 personne. Puis, il multiplie par 9 pour obtenir la quantité pour 9 personnes. Mais il trouve une valeur approchée qui fausse le résultat. C'est pour cela qu'il obtient un résultat incorrect pour la masse de farine.

Pour les pincées de sel, c'est correct. Il a certainement utilisé une autre méthode car sa division n'est pas terminée.

La procédure utilisée est adaptée, mais il ne va pas au bout.

# Corrigé de concours 3, partie didactique (groupe 1, 2017)

Elève C

...373.g de farine
..... litre(s) de lait
.....œufs
.....cuillère(s) à soupe d'huile
.....pincées de sel

$$\begin{array}{r} 250 \\ \overline{) 6} \\ \underline{10} \phantom{0} \\ 4 \phantom{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 250 \\ + 41 \\ + 41 \\ + 41 \\ \hline 373 \end{array}$$

## Procédure utilisée : le retour à l'unité et la linéarité de l'addition

L'élève essaye d'avoir recours au passage à l'unité puisqu'il divise la masse de farine par 6. Il trouve également un résultat approché (pointillés). Ensuite, il ajoute le résultat trouvé 3 fois (il utilise la linéarité de l'addition) car il a observé que 9 personnes = 6 personnes + 1 + 1 + 1. Son résultat est faux (373g), mais proche de la vérité (375g) car la division de 250 par 6 n'est pas un nombre décimal.

## Corrigé de concours 3, partie didactique (groupe 1, 2017)

Si l'enseignant avait proposé 300g au lieu de 250g, les calculs auraient été facilités (car 300 est un multiple de 6) et certains élèves auraient pu aller plus facilement au bout de leur démarche. Ils auraient utilisé plus facilement la linéarité de l'addition et de la multiplication, ainsi que le retour à l'unité.

Une autre procédure aurait peut-être émergé : celle du coefficient multiplicateur, qui est ici de 50.

Pour passer de 300 grammes de farine à 6 personnes, il faut diviser par 50.

Quelques textes de recherche

## textes de recherche

- Simard A, Reconnaissance de situations de proportionnalité, Grand N, n°90, 2012.
- Simard ., Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique, Petit x, n°89, 2012.
- Simard A, Proportionnalité en CM2 – 6°, Petit x, n°90, 2012