

# TD 6 – Calcul algébrique et équations

Comment mécaniser la résolution de problèmes ?

---

**Didier Lesesvre**

**Idée :** Abstraire les problèmes pour les réduire aux calculs

Idée : Abstraire les problèmes pour les réduire aux calculs

## Exemple

### ■ Énoncé

Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

**Idée :** Abstraire les problèmes pour les réduire aux calculs

**Exemple**

■ **Énoncé**

Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

$$5x + 7 = 3$$

Le problème a été **mis en équation**

# Prérequis algébriques

---

# Expression algébrique

Une **expression algébrique** est construite avec

- nombres
- lettres (« inconnues »)
- opérations :  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$

# Expression algébrique

Une **expression algébrique** est construite avec

- nombres
- lettres (« inconnues »)
- opérations : +, -, ×, /

## Exemples

$$3x + 1$$

$$17,8a^2t + \frac{7\pi}{9}$$

$$xyz + 17\sqrt{x}$$

## Remplacer les variables

Que vaut  $3x + 7$  lorsque  $x = 4$  ?



## Remplacer les variables

Que vaut  $3x + 7$  lorsque  $x = 4$  ?

# Ordre sur les opérations

Par convention, on applique les opérations **dans l'ordre** :

- parenthèses
- puissances, racines
- multiplications, divisions
- additions, soustractions

# Ordre sur les opérations

Par convention, on applique les opérations **dans l'ordre** :

- parenthèses
- puissances, racines
- multiplications, divisions
- additions, soustractions

## Exemples

$$17 + 3 \times 2 = 23$$

$$3(7 + 2)^2 = 243$$

## Addition

- commutative :  $a + b = b + a$
- associative :  $(a + b) + c = a + (b + c)$

## Addition

- commutative :  $a + b = b + a$
- associative :  $(a + b) + c = a + (b + c)$

## Multiplication

- commutative :  $a \times b = b \times a$
- associative :  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- distributive sur l'addition :  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

## Identités remarquables

**Note** : ce ne sont que des **cas particuliers** de la distributivité !

# Identités remarquables

**Note** : ce ne sont que des **cas particuliers** de la distributivité !

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

# Équations

---



# Équation

Une **équation** est une égalité entre deux expressions algébriques

## Exemples

$$2x + 5 = 0$$

$$3x + 1 = 12x - 7$$

$$y^2 + 57y + 2 = 0$$

$$\sqrt{17y^3 + 3x} + xyz = 0$$

# Équation

Une **équation** est une égalité entre deux expressions algébriques

## Exemples

$$2x + 5 = 0$$

$$3x + 1 = 12x - 7$$

$$y^2 + 57y + 2 = 0$$

$$\sqrt{17y^3 + 3x} + xyz = 0$$

**Objectif** : trouver **les** valeurs des variables vérifiant l'égalité

# Opérations possibles

On peut opérer des deux côtés d'une équation :

- ajouter ou soustraire un nombre
- multiplier ou diviser par un nombre **non nul**

# Opérations possibles

On peut opérer des deux côtés d'une équation :

- ajouter ou soustraire un nombre
- multiplier ou diviser par un nombre **non nul**

Ces opérations ne modifient pas les solutions. On dit que les équations sont « **équivalentes** »

# Opérations possibles

On peut opérer des deux côtés d'une équation :

- ajouter ou soustraire un nombre
- multiplier ou diviser par un nombre **non nul**

Ces opérations ne modifient pas les solutions. On dit que les équations sont « **équivalentes** »

**Exemple** : l'équation  $3x + 1 = 0$  est équivalente à

$$3x + 5 = 4$$

$$6x + 1 = 3x$$

$$21x + 7 = 0$$

## Exemple de résolution – 1

$$3x + 2 = 7$$

## Exemple de résolution – 1

$$3x + 2 = 7$$

- on soustrait 2 à chaque membre :  $3x = 5$

## Exemple de résolution – 1

$$3x + 2 = 7$$

- on soustrait 2 à chaque membre :  $3x = 5$
- on divise chaque membre par 3 :  $x = \frac{5}{3}$



## Exemple de résolution – 1

$$3x + 2 = 7$$

- on soustrait 2 à chaque membre :  $3x = 5$
- on divise chaque membre par 3 :  $x = \frac{5}{3}$

## Exemple de résolution – 1

$$3x + 2 = 7$$

- on soustrait 2 à chaque membre :  $3x = 5$
- on divise chaque membre par 3 :  $x = \frac{5}{3}$

La solution de l'équation est donc  $x = \frac{5}{3}$

## Exemple de résolution – 2

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

## Exemple de résolution – 2

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

- équation **produit** :  $3x + 2 = 0$  ou  $x - 1 = 0$

## Exemple de résolution – 2

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

- équation **produit** :  $3x + 2 = 0$  ou  $x - 1 = 0$
- solution de  $3x + 2 = 0$  :  $x = -\frac{2}{3}$

## Exemple de résolution – 2

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

- équation **produit** :  $3x + 2 = 0$  ou  $x - 1 = 0$
- solution de  $3x + 2 = 0$  :  $x = -\frac{2}{3}$
- solution de  $x - 1 = 0$  :  $x = 1$

## Exemple de résolution – 2

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

- équation **produit** :  $3x + 2 = 0$  ou  $x - 1 = 0$
- solution de  $3x + 2 = 0$  :  $x = -\frac{2}{3}$
- solution de  $x - 1 = 0$  :  $x = 1$

## Exemple de résolution – 2

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

- équation **produit** :  $3x + 2 = 0$  ou  $x - 1 = 0$
- solution de  $3x + 2 = 0$  :  $x = -\frac{2}{3}$
- solution de  $x - 1 = 0$  :  $x = 1$

Les solutions de l'équation sont donc  $-\frac{2}{3}$  et 1



# Systemes d'equations

---

# Systemes d'equations

# Systemes d'equations

**Idée** : considerer plusieurs equations en même temps

# Systemes d'equations

**Idée** : considerer plusieurs equations en même temps

**Exemple**

$$\begin{cases} 3x + 7y = 12 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

**Idée** : considérer plusieurs équations en même temps

**Exemple**

$$\begin{cases} 3x + 7y = 12 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

**Deux approches**

- par **substitution** : exprimer  $x$  en fonction de  $y$ , puis remplacer. En déduire la valeur de  $y$ , puis la valeur de  $x$
- par **combinaison** : faire une combinaison linéaire des deux pour faire disparaître  $x$  ou  $y$ . En déduire la valeur de  $y$  (par exemple), puis la valeur de  $x$

### 40 Histoire d'âges

Mon père a 23 ans de plus que moi. Dans 15 ans, il aura le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui. Quel est mon âge ?

### 40 Histoire d'âges

Mon père a 23 ans de plus que moi. Dans 15 ans, il aura le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui. Quel est mon âge ?

$$\begin{cases} y = x + 23 \\ y + 15 = 3x \end{cases}$$

## 40 Histoire d'âges

Mon père a 23 ans de plus que moi. Dans 15 ans, il aura le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui. Quel est mon âge ?

$$\begin{cases} y = x + 23 \\ y + 15 = 3x \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} y = x + 23 \\ x + 38 = 3x \end{cases}$$



## 40 Histoire d'âges

Mon père a 23 ans de plus que moi. Dans 15 ans, il aura le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui. Quel est mon âge ?

$$\begin{cases} y = x + 23 \\ y + 15 = 3x \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} y = x + 23 \\ x + 38 = 3x \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} y = 42 \\ x = 19 \end{cases}$$

## Deux ressources

---





photomath

Merci !

---

Des questions ?