TD 3 – Systèmes de numérations

Le codage du nombre

Didier Lesesvre
Nathalie Delhaye

Plan du TD

- programmes et attendus
- rappels sur la numération
- quelques autres systèmes
- activités de numérations
- exercices

Qu'est-ce que...

1392 ?

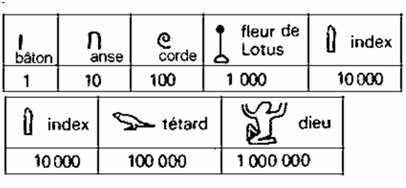
Qu'est-ce que...

1392 ?

Cette représentation du nombre est *conventionnelle*

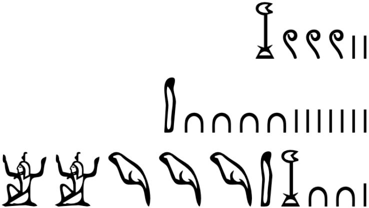
Systèmes de numération additifs

Numération égyptienne



bâton	anse	corde	fleur de Lotus	index
1	10	100	1 000	10 000

index	têtard	dieu
10 000	100 000	1 000 000



= 1 302

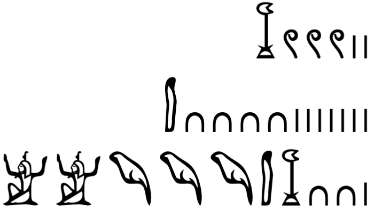
= 10 047

= 2 311 021

Numération égyptienne

bâton	anse	corde	fleur de Lotus	index
1	10	100	1 000	10 000

index	têtard	dieu
10 000	100 000	1 000 000



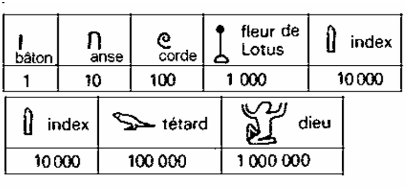
= 1 302

= 10 047

= 2 311 021

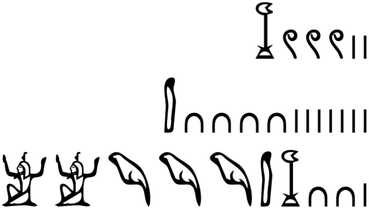
FAIRE PRATIQUER

Numération égyptienne



bâton	anse	corde	fleur de Lotus	index
1	10	100	1 000	10 000

index	têtard	dieu
10 000	100 000	1 000 000



= 1 302

= 10 047

= 2 311 021

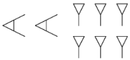
FAIRE PRATIQUER

Système additif, les groupements étant des hiéroglyphes

Numération babylonienne

Un clou pour l'unité 

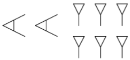
Un chevron pour la dizaine 

Par exemple, le nombre 26 s'écrivait : 

Numération babylonienne

Un clou pour l'unité 

Un chevron pour la dizaine 

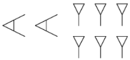
Par exemple, le nombre 26 s'écrivait : 

FAIRE PRATIQUER

Numération babylonienne

Un clou pour l'unité 

Un chevron pour la dizaine 

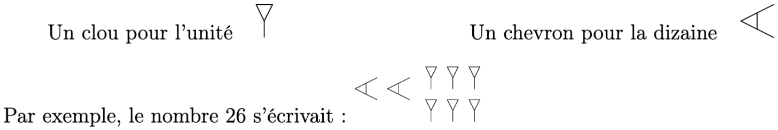
Par exemple, le nombre 26 s'écrivait : 

FAIRE PRATIQUER

RAJOUTER PHOTO FROM CM

Pour les grands nombres, système de base 60 !

Numération babylonienne



FAIRE PRATIQUER

RAJOUTER PHOTO FROM CM

Pour les grands nombres, système de base 60 !

Système additif, les groupements étant des symboles (ATTENTION : début de système chiffré également, plus tardivement, cf. exercice tyd)

Numération romaine

Les nombres romains s'écrivent avec les symboles suivants.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Règles

- On peut ajouter au maximum trois fois les nombres I, X, C et M.
  Exemples
  III = I + I + I = 1 + 1 + 1 = 3
  XX = X + X = 10 + 10 = 20
  CCC = C + C + C = 100 + 100 + 100 = 300

- On peut soustraire les nombres I, X et C en les plaçant avant un nombre plus grand.
  Exemples
  IV = V − I = 5 − 1 = 4
  XL = L − X = 50 − 10 = 40
  CM = M − C = 1 000 − 100 = 900

- On écrit toujours un nombre romain en commençant par les plus grands symboles :
  M puis D puis C puis L puis X puis V puis I.

Numération romaine

Les nombres romains s'écrivent avec les symboles suivants.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Règles

- On peut ajouter au maximum trois fois les nombres I, X, C et M.
  Exemples
  III = I + I + I = 1 + 1 + 1 = 3
  XX = X + X = 10 + 10 = 20
  CCC = C + C + C = 100 + 100 + 100 = 300

- On peut soustraire les nombres I, X et C en les plaçant avant un nombre plus grand.
  Exemples
  IV = V − I = 5 − 1 = 4
  XL = L − X = 50 − 10 = 40
  CM = M − C = 1 000 − 100 = 900

- On écrit toujours un nombre romain en commençant par les plus grands symboles :
  M puis D puis C puis L puis X puis V puis I.

Système additif, aspect positionnel

Numération positionnelle

Numération décimale

Qu'est-ce que 1624 ?

Numération décimale

Qu'est-ce que 1624 ?

$$\begin{aligned} 1624 &= 1 \times 1000 + 6 \times 100 \times 2 \times 10 + 4 \times 1 \\ &= 1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 \end{aligned}$$

Numération décimale

Qu'est-ce que 1624 ?

$$\begin{aligned} 1624 &= 1 \times 1000 + 6 \times 100 \times 2 \times 10 + 4 \times 1 \\ &= 1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 \end{aligned}$$

Ce système positionnel vient d'Inde, arrive en Europe au 12ᵉ siècle

Principes

- la place du chiffre donne sa signification
- zéro (0) pour dénoter l'absence
- groupement par paquets réguliers (de 10)

Avantages & inconvénients ?

À vous de réfléchir

Avantages

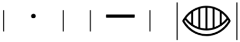
- peu de symboles nécessaires (0, ..., 9)
- pas de limitation de taille
- lecture systématique, quelle que soit la longueur
- algorithmes simples pour opérer

Inconvénients

- symboles abstraits
- décalage entre numérations orale et chiffrée

Autres systèmes positionnels

Numération maya



Un Cinq Zéro → Coquille vide (apparue au III$^{\text{ème}}$ siècle)

Voici comment avec les deux premiers signes, ils écrivaient les nombres entiers de 1 à 19.
Retrouver les écritures manquantes ci-dessous.

	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

Numération maya

Un	Cinq	 Zéro

→ Coquille vide (apparue au III$^{\text{ème}}$ siècle)

Voici comment avec les deux premiers signes, ils écrivaient les nombres entiers de 1 à 19. Retrouver les écritures manquantes ci-dessous.

	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

Numération de position, aspects additifs

Numération chinoise

一	二	三	四	五	六	七
1	2	3	4	5	6	7
八	九	十	百	千	万	
8	9	10	100	1000	10 000	

Numération chinoise

一	二	三	四	五	六	七
1	2	3	4	5	6	7
八	九	十	百	千	万	
8	9	10	100	1000	10 000	

Numération chiffrée, non positionnelle (même si en pratique...)

Bases

Un peu de théorie sur les bases

Système de numération en base b

Tout nombre s'écrit (se représente !) sous la forme

$$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Un peu de théorie sur les bases

Système de numération en base b

Tout nombre s'écrit (se représente !) sous la forme

$$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

On écrit aussi

$$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i$$

Un peu de théorie sur les bases

Système de numération en base b

Tout nombre s'écrit (se représente !) sous la forme

$$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

On écrit aussi

$$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i$$

Exercice : Écrivez ainsi 0, 7 et 138

Rappel sur les puissances

Par **définition**

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$$

Rappel sur les puissances

Par **définition**

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$$

Exercice : Quelle est la défintion de 7^1, 4^2, 2^6 ?

Rappel sur les puissances

Par **définition**

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$$

Exercice : Quelle est la défintion de 7^1, 4^2, 2^6 ?

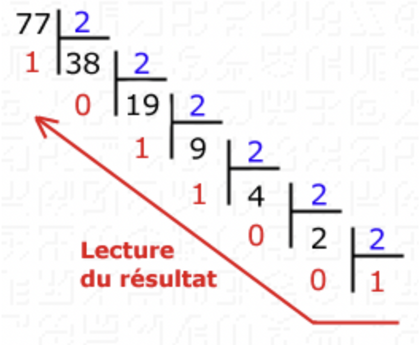
Convetion : Pour tout a, on pose $a^0 = 1$

Un algorithme

Activité : Comment obtenir 77 en base 2 ?

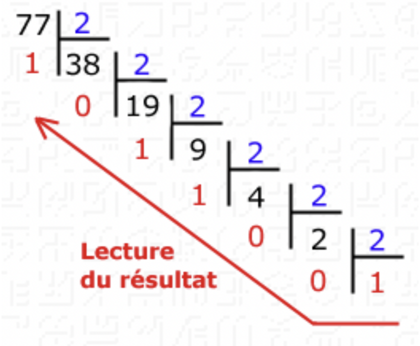
Un algorithme

Activité : Comment obtenir 77 en base 2 ?



Un algorithme

Activité : Comment obtenir 77 en base 2 ?



Exercice : pourquoi ?

Merci !

Des questions ?