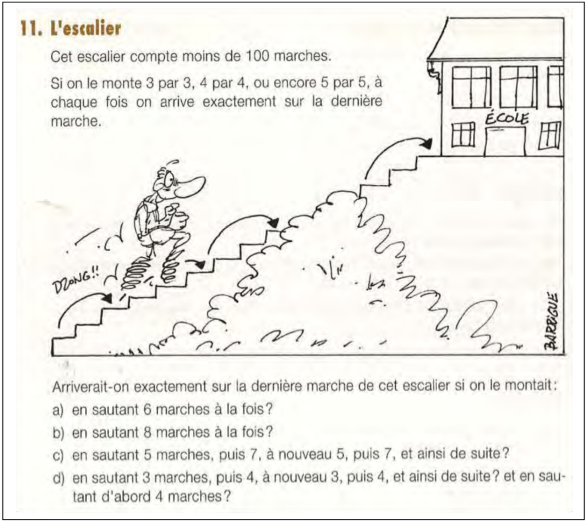
TD 10 – Arithmétique

Dissection multiplicative des nombres

Nathalie Delhaye
Didier Lesesvre

Un problème



11. L'escalier

Cet escalier compte moins de 100 marches.

Si on le monte 3 par 3, 4 par 4, ou encore 5 par 5, à chaque fois on arrive exactement sur la dernière marche.

Arriverait-on exactement sur la dernière marche de cet escalier si on le montait :

a) en sautant 6 marches à la fois ?

b) en sautant 8 marches à la fois ?

c) en sautant 5 marches, puis 7, à nouveau 5, puis 7, et ainsi de suite ?

d) en sautant 3 marches, puis 4, à nouveau 3, puis 4, et ainsi de suite ? et en sautant d'abord 4 marches ?

Figure 1 *– Enoncé extrait du livre de l'élève*

Définitions élémentaires

Multiples

Multiples

Définition

Un nombre n est **multiple** d'un nombre d s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = k \times d$$

Multiples

Définition

Un nombre n est **multiple** d'un nombre d s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = k \times d$$

Ce sont des **paquets** de taille d

Multiples

Définition

Un nombre n est **multiple** d'un nombre d s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = k \times d$$

Ce sont des **paquets** de taille d

Exemples : vrai ou faux ?

- 14 est multiple de 2
- 13 est multiple de 3
- 27 est multiple de 9

Diviseurs

Diviseurs

Définition

Un nombre d est **diviseur** d'un nombre n s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = k \times d$$

Diviseurs

Définition

Un nombre d est **diviseur** d'un nombre n s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = k \times d$$

Ce sont les **découpages** (équitables) possibles de n

Diviseurs

Définition

Un nombre d est **diviseur** d'un nombre n s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = k \times d$$

Ce sont les **découpages** (équitables) possibles de n

Exemples : vrai ou faux ?

- 2 est diviseur de 14
- 5 est diviseur de 31
- 7 est diviseur de 28

Diviseurs

Définition

Un nombre d est **diviseur** d'un nombre n s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = k \times d$$

Ce sont les **découpages** (équitables) possibles de n

Exemples : vrai ou faux ?

- 2 est diviseur de 14
- 5 est diviseur de 31
- 7 est diviseur de 28

Équivalent : la division de n par d **tombe juste**, i.e. $\frac{n}{d} \in \mathbb{Z}$

Une équivalence

$$n \text{ est un multiple de } d \iff d \text{ est un diviseur de } n$$

Et zéro alors ?

Attention au zéro !

Et zéro alors ?

Attention au zéro !

- Zéro est multiple de tout nombre

Et zéro alors ?

Attention au zéro !

- Zéro est multiple de tout nombre :

$$0 = 0 \times n$$

Et zéro alors ?

Attention au zéro !

- Zéro est multiple de tout nombre :

$$0 = 0 \times n$$

- Zéro n'est diviseur d'aucun nombre $n \neq 0$

Et zéro alors ?

Attention au zéro !

- Zéro est multiple de tout nombre :

$$0 = 0 \times n$$

- Zéro n'est diviseur d'aucun nombre $n \neq 0$:

$$n \neq k \times 0$$

Division euclidienne

Division euclidienne

Division euclidienne

Définition

La **division euclidienne** de n par q est l'écriture

$$n = k \times q + r$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < q$

Division euclidienne

Définition

La **division euclidienne** de n par q est l'écriture

$$n = k \times q + r$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < q$

Découpage équitable (de n en paquets de q) **avec reste**

Division euclidienne

Définition

La **division euclidienne** de n par q est l'écriture

$$n = k \times q + r$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < q$

Découpage équitable (de n en paquets de q) **avec reste**

Exemples

- division euclidienne de 27 par 4 ?
- division euclidienne de 21 par 3 ?

PGCD et PPCM

PGCD

Définition

Le PGCD de 2 nombres est leur **plus grand commun diviseur**

On note $\mathrm{pgcd}(a, b)$ le PGCD de a et b

PGCD

Définition

Le PGCD de 2 nombres est leur **plus grand commun diviseur**

On note $\mathrm{pgcd}(a, b)$ le PGCD de a et b

Exemples

- $\mathrm{pgcd}(21, 6) = ?$
- $\mathrm{pgcd}(48, 28) = ?$

PPCM

Définition

Le PPCM de 2 nombres est leur **plus petit commun multiple**

On note $\mathrm{ppcm}(a, b)$ le PPCM de a et b

PPCM

Définition

Le PPCM de 2 nombres est leur **plus petit commun multiple**

On note $\mathrm{ppcm}(a, b)$ le PPCM de a et b

Exemples

- $\mathrm{ppcm}(7, 3) = ?$
- $\mathrm{ppcm}(6, 8) = ?$

Nombres premiers

Nombre premier

Définition

Un nombre ($\geqslant 2$) est **premier** si ses diviseurs sont 1 et lui-même

Nombre premier

Définition

Un nombre ($\geqslant 2$) est **premier** si ses diviseurs sont 1 et lui-même

Autrement dit, s'il n'a pas de diviseurs non triviaux

Ce sont les « **atomes** » des nombres

Nombre premier

Définition

Un nombre ($\geqslant 2$) est **premier** si ses diviseurs sont 1 et lui-même

Autrement dit, s'il n'a pas de diviseurs non triviaux

Ce sont les « **atomes** » des nombres

Exemples

- 2 est premier
- 7 est premier
- $6 = 2 \times 3$ n'est pas premier

Liste jusqu'à 100 (crible d'Ératosthène)

Dressons-la tous ensemble !

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Théorème d'Euclide

Théorème

Il existe une **infinité** de nombres premiers

Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème

Tout nombre se décompose en produit unique de facteurs premiers

Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème

Tout nombre se décompose en produit unique de facteurs premiers

Exemples

- $2 = 2$
- $6 = 2 \times 3$
- $770 = 2 \times 5 \times 7 \times 11$

Nombres premiers entre eux

Définition

Deux nombres sont **premiers entre eux** s'ils n'ont pas de diviseurs communs non triviaux

Autrement dit, a et b sont premiers entre eux si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$

Nombres premiers entre eux

Définition

Deux nombres sont **premiers entre eux** s'ils n'ont pas de diviseurs communs non triviaux

Autrement dit, a et b sont premiers entre eux si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$

Exemples

- 2 et 3 sont premiers entre eux
- 12 et 9 ne sont pas premiers entre eux
- 27 et 57 ?

Critères de divisibilité

Critères de divisibilité

Ce sont des « raccourcis » pour voir la divisibilité

Critères de divisibilité

Ce sont des « raccourcis » pour voir la divisibilité

- **par 10** : le chiffre des unités est 0
- **par 5** : le chiffre des unités est 0 ou 5

Critères de divisibilité

Ce sont des « raccourcis » pour voir la divisibilité

- **par 10** : le chiffre des unités est 0
- **par 5** : le chiffre des unités est 0 ou 5
- **par 2** : le chiffre des unités est pair
- **par 4** : $\overline{du}$ est un nombre divisible par 4

Critères de divisibilité

Ce sont des « raccourcis » pour voir la divisibilité

- **par 10** : le chiffre des unités est 0
- **par 5** : le chiffre des unités est 0 ou 5
- **par 2** : le chiffre des unités est pair
- **par 4** : $\overline{du}$ est un nombre divisible par 4
- **par 3** : la somme des chiffres est divisible par 3
- **par 9** : la somme des chiffres est divisible par 9

Critères de divisibilité

Ce sont des « raccourcis » pour voir la divisibilité

- **par 10** : le chiffre des unités est 0
- **par 5** : le chiffre des unités est 0 ou 5
- **par 2** : le chiffre des unités est pair
- **par 4** : $\overline{du}$ est un nombre divisible par 4
- **par 3** : la somme des chiffres est divisible par 3
- **par 9** : la somme des chiffres est divisible par 9

Voir les justifications (et le rapport avec la numération) **en CM**

Le problème qui déchire

Le problème

- Coupons une feuille de papier en deux
- Puis prenons un des morceaux, et recoupons-le en deux
- etc.

Le problème qui déchire

Le problème

- Coupons une feuille de papier en deux
- Puis prenons un des morceaux, et recoupons-le en deux
- etc.

Peut-on atteindre 2022 morceaux ? en combien d'étapes ?

Le problème qui déchire

Le problème

- Coupons une feuille de papier en deux
- Puis prenons un des morceaux, et recoupons-le en deux
- etc.

Peut-on atteindre 2022 morceaux ? en combien d'étapes ?

Et en coupant en trois ? et en quatre ? etc.

Merci !

Des questions ?