

TD 1

Numération en maternelle

Didier Lesesvre
Nathalie Delhaye

Le nombre

Nombre mathématique

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Qu'est-ce qu'un nombre ?

- une entité abstraite

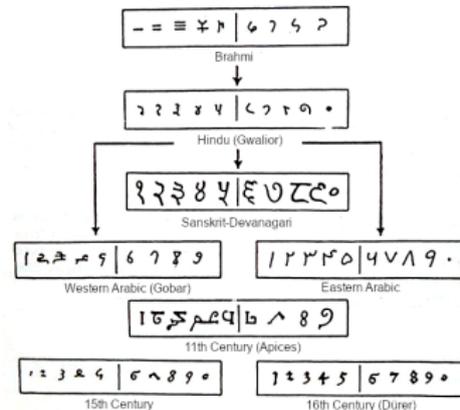
Qu'est-ce qu'un nombre ?

- une entité abstraite
- manipulée à travers des représentations

Nombre mathématique

Qu'est-ce qu'un nombre ?

- une entité abstraite
- manipulée à travers des représentations



À quoi servent les nombres ?

À quoi servent les nombres ?

- Exprimer les quantités (communiquer, mémoriser)

À quoi servent les nombres ?

- Exprimer les quantités (communiquer, mémoriser)
- Repérer et exprimer des positions

À quoi servent les nombres ?

- Exprimer les quantités (communiquer, mémoriser)
- Repérer et exprimer des positions
- Traiter des problèmes : comparer, construire, compléter...

Représentations du nombre

Analogique

- doigts
- constellations
- bâtons...

Analogique

- doigts
- constellations
- bâtons...

Symbolique

- nombres arabes
- hiéroglyphes, sinogrammes...

Représentations du nombre

Analogique

- doigts
- constellations
- bâtons...

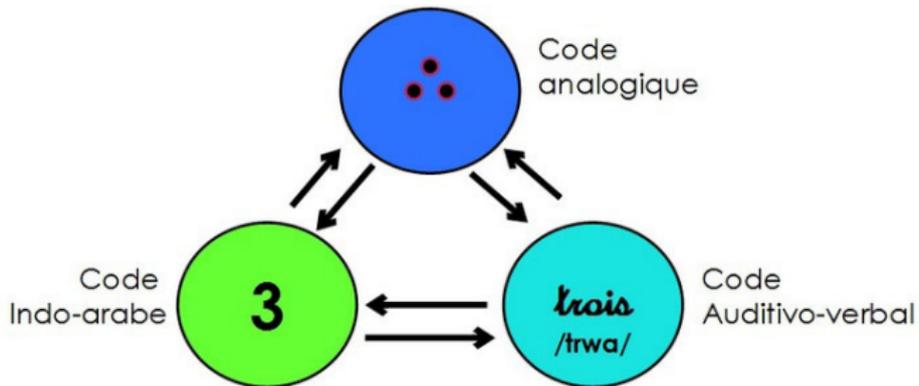
Symbolique

- nombres arabes
- hiéroglyphes, sinogrammes...

Verbale

- mots-nombres

Représentations du nombre : le triple code



Rien n'est spontané lorsqu'il s'agit de mathématiques !

- un élève peut savoir compter jusqu'à 50 (verbale) sans pouvoir constituer une collection de 12 objets (analogique)
- un élève peut reproduire une collection de 12 objets (analogique) sans savoir nommer le nombre (verbale)
- un élève peut savoir compter jusqu'à 30 (verbale) sans savoir lire 30 (symbolique)
- etc.

Des équivalences difficiles

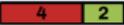
Rien n'est spontané lorsqu'il s'agit de mathématiques !

- un élève peut savoir compter jusqu'à 50 (verbale) sans pouvoir constituer une collection de 12 objets (analogique)
- un élève peut reproduire une collection de 12 objets (analogique) sans savoir nommer le nombre (verbale)
- un élève peut savoir compter jusqu'à 30 (verbale) sans savoir lire 30 (symbolique)
- etc.

Les équivalences entre représentations sont difficiles !

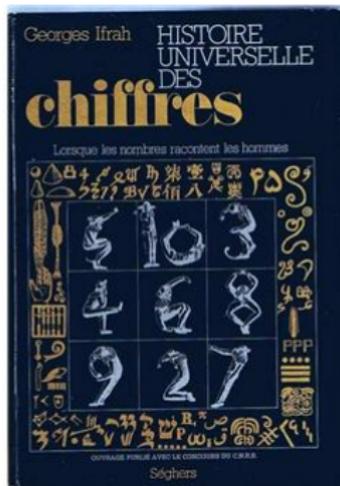
Vers l'abstraction, de la maternelle au CP

« Au supermarché, j'ai acheté 4 pommes rouges et 2 pommes vertes. Combien ai-je de pommes dans mon panier ? »

MODE SENSORI-MOTEUR^{3D}	<p>Manipulation d'objets tangibles proches de la réalité :</p> 	<p>Manipulation d'objets tangibles figuratifs :</p> 
MODE IMAGÉ	<p>Représentations imagées des objets tangibles proches de la réalité :</p> 	<ul style="list-style-type: none">• Représentation avec un schéma : • Représentation présymbolique (schéma en barres + écriture symbolique) : 
MODE SYMBOLIQUE	<p>Écriture en langage mathématique : $4 + 2 = 6$</p>	

Une construction multimillénaire !

Pour un peu d'histoire (passionnante) :



Georges Ifrah, *Histoire Universelle des chiffres*, 1987

Discussions de quelques aspects

Cardinal et ordinal

Cardinal : taille (classer)

- il y a 7 carottes dans le paquet
- il y a 36 étudiants sur la liste
- il y a 4 voeux à faire

Cardinal : taille (classer)

- il y a 7 carottes dans le paquet
- il y a 36 étudiants sur la liste
- il y a 4 voeux à faire

Ordinal : ordre (ranger)

- la première carotte du paquet
- le 12e étudiant sur la liste
- le troisième voeu

Spécificités à la numération en français :

- mots-nombres de base (0, 1, 2, ..., 9)
- mots exceptionnels (11, ..., 16, 20, 30...)
- mots d'ordre de grandeur (10, 100, 1000, million, ...)
- irrégularités (70, 71, 80...)

Procédures pré-numériques

Procédures non-numériques

Procédures non-numériques

- la perception/comparaison directe
- la correspondance terme-à-terme
- le subitizing

Perception directe

Estimation **globale** (plus, moins, pareil, beaucoup, pas beaucoup)

Perception directe

Estimation **globale** (plus, moins, pareil, beaucoup, pas beaucoup)



Perception directe

Estimation **globale** (plus, moins, pareil, beaucoup, pas beaucoup)



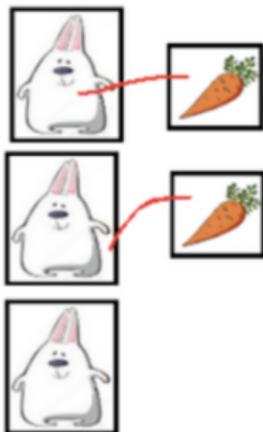
Efficace lorsque les collections sont très différentes (e.g. double)

Correspondance terme-à-terme

Comparer des collections en **appariant**, sans avoir à compter

Correspondance terme-à-terme

Comparer des collections en **appariant**, sans avoir à compter



Subitizing

L'enfant **identifie** la quantité sans avoir à la compter

Subitizing

L'enfant **identifie** la quantité sans avoir à la compter



Subitizing

L'enfant **identifie** la quantité sans avoir à la compter



→ limité à de très petites quantités (jusqu'à 3 ou 4)

Il faut varier les **dispositions spatiales** !

Il faut construire des situations pour **dépasser** ces procédures !

Deux concepts fondamentaux

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

- $4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3$

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

- $4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3$
- $4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

- $4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3$
- $4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$
- $4 = 2 \times 2$

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

- $4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3$
- $4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$
- $4 = 2 \times 2$
- $4 \times 2 = 8, 4 \times 3 = 12, \text{ etc.}$

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

- $4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3$
- $4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$
- $4 = 2 \times 2$
- $4 \times 2 = 8, 4 \times 3 = 12, \text{ etc.}$
- $4 + 4 = 8, 4 \times 25 = 100, \text{ etc.}$

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

- $4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3$
- $4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$
- $4 = 2 \times 2$
- $4 \times 2 = 8, 4 \times 3 = 12, \text{ etc.}$
- $4 + 4 = 8, 4 \times 25 = 100, \text{ etc.}$

Décomposition-recomposition

« [Connaître un nombre] c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté » (Buisson, 1880)

Connaître 4 c'est notamment...

- $4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3$
- $4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$
- $4 = 2 \times 2$
- $4 \times 2 = 8, 4 \times 3 = 12, \text{ etc.}$
- $4 + 4 = 8, 4 \times 25 = 100, \text{ etc.}$

explorer le "monde" 4 de toutes les manières !

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un
- deux camions, c'est un camion et encore un

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un
- deux camions, c'est un camion et encore un
- deux, c'est un et encore un

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un
- deux camions, c'est un camion et encore un
- deux, c'est un et encore un
- trois cubes, c'est deux cubes et encore un

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un
- deux camions, c'est un camion et encore un
- deux, c'est un et encore un
- trois cubes, c'est deux cubes et encore un
- etc.

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un
- deux camions, c'est un camion et encore un
- deux, c'est un et encore un
- trois cubes, c'est deux cubes et encore un
- etc.

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un
- deux camions, c'est un camion et encore un
- deux, c'est un et encore un
- trois cubes, c'est deux cubes et encore un
- etc.

Une des constructions des entiers par von Neumann

Construction itérative

- deux cubes, c'est un cube et encore un
- deux camions, c'est un camion et encore un
- deux, c'est un et encore un
- trois cubes, c'est deux cubes et encore un
- etc.

Une des constructions des entiers par von Neumann

Intérêts

- idée de décomposition (particulière)
- relation avec l'ordre
- méthode permettant de parcourir tous les entiers

Vers le comptage

Énumération

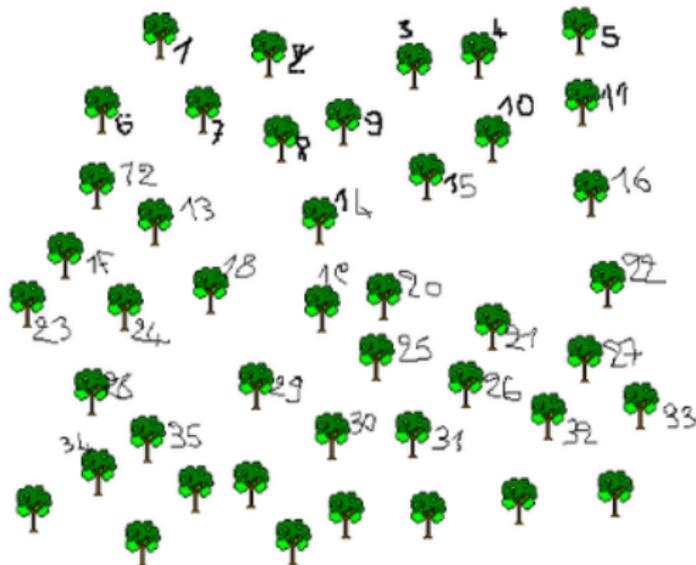
Preliminaire au comptage : l'**énumération**

Inventaire/passage en revue des éléments

Énumération

Préliminaire au comptage : l'**énumération**

Inventaire/passage en revue des éléments



Comptage-numérotage

Numéroter : associer un nombre

Comptage-numérotage

Numéroter : associer un nombre

Le **comptage-numérotage** est une énumération (on passe en revue les objets de la collection) en récitant la **comptine**

Le dernier mot-nombre prononcé correspond alors au nombre d'éléments dans la collection

Comptage-numérotage

Numéroter : associer un nombre

Le **comptage-numérotage** est une énumération (on passe en revue les objets de la collection) en récitant la **comptine**

Le dernier mot-nombre prononcé correspond alors au nombre d'éléments dans la collection



Comptage-numérotage

Numéroter : associer un nombre

Le **comptage-numérotage** est une énumération (on passe en revue les objets de la collection) en récitant la **comptine**

Le dernier mot-nombre prononcé correspond alors au nombre d'éléments dans la collection



Le comptage-numérotage insiste sur l'aspect **ordinal** du nombre

Comptage-dénombrément

Quel **problème** avec le comptage-numération ?

Comptage-dénombrément

Quel **problème** avec le comptage-numération ?

« C'est en posant la 2e assiette sur la 1re que je dis 2, non en la prenant en mains (la 2e n'est pas 2, elle est 1) » (Brandicourt)

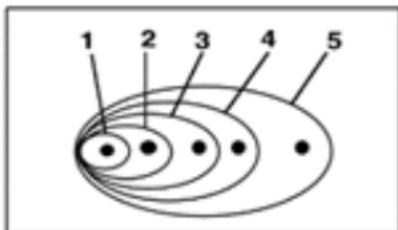
Comptage-dénombrément

Quel **problème** avec le comptage-numération ?

« C'est en posant la 2e assiette sur la 1re que je dis 2, non en la prenant en mains (la 2e n'est pas 2, elle est 1) » (Brandicourt)

Comptage-dénombrément

Le nombre : ensemble de classes emboîtées et ordonnées



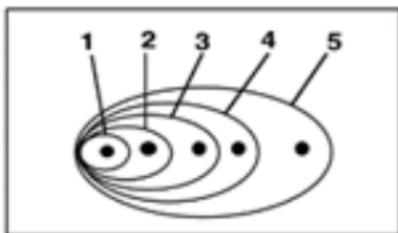
Comptage-dénombrément

Quel **problème** avec le comptage-numération ?

« C'est en posant la 2e assiette sur la 1re que je dis 2, non en la prenant en mains (la 2e n'est pas 2, elle est 1) » (Brandicourt)

Comptage-dénombrément

Le nombre : ensemble de classes emboîtées et ordonnées



Le comptage-dénombrément insiste sur l'aspect **cardinal** du nombre

Programme de maternelle

Les programmes : quelques repères

PS

- idée de quantité
- descriptions (un peu, beaucoup)
- compter jusqu'à 5-6

MS

- comparaisons de collections (proches, éloignées ; plus, moins)
- procédures intermédiaires (estimations, collections, supports)
- compter jusqu'à 12-15

GS

- nombre cardinal, relation mot-nombre/symbole
- compter jusqu'à 30

Construire le nombre...

- stabiliser la connaissance des petits nombres
- exprimer des quantités, construire des collections
- désigner une position, un rang
- premiers savoirs et savoir-faire
 - Acquérir la suite orale des mots-nombres
 - Écrire les nombres avec les chiffres
 - Dénombrer

Stabiliser la connaissance des petits nombres

Stabiliser la connaissance des petits nombres



Stabiliser la connaissance des petits nombres



Attention : considérer des positions **non prototypiques**

Stabiliser la connaissance des petits nombres

Beaucoup d'activités de décompositions et recompositions

Greli-grelot



Stabiliser la connaissance des petits nombres

Beaucoup d'activités de **décompositions et recompositions**

 <p>Les 5 grenouilles</p>	 <p>Les 5 grenouilles</p>	 <p>Les 5 grenouilles</p>
<p>« Dans l'image, il y a 5 grenouilles sur 5 nénuphars disposés comme les points du dé. 2 en haut, 2 en bas et 1 au milieu. »</p>	<p>« Les grenouilles sous le rabat sont dans l'eau. Combien de grenouilles sont dans l'eau ? »</p>	<p>« Les grenouilles sous le rabat sont sur les nénuphars. Combien de grenouilles sont sur les nénuphars ? »</p>



Effets de ces modifications ?

Nécessité de faire des **activités variées**

- décomposition et recomposition
- reconnaissance et observation des constellations
- expression avec les doigts de la main
- correspondance terme à terme

Exprimer des quantités, construire des collections

Exprimer des quantités, construire des collections



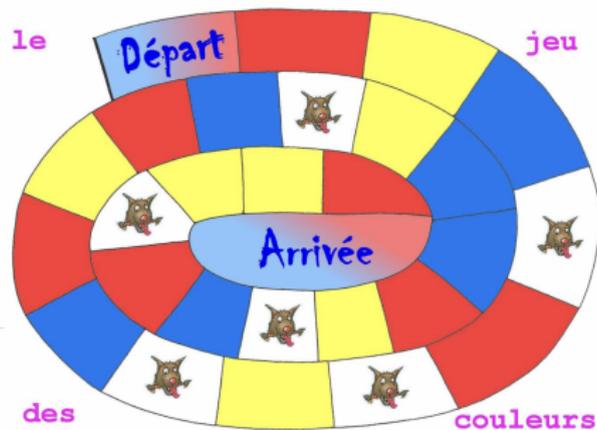
Exprimer des quantités, construire des collections



Désigner une position

Désigner une position

5^{ème} case du jeu



Désigner une position

4^{ème} perle du collier



Suite orale des mots-nombres

Objectifs minimum

- **PS** : 5 ou 6
- **MS** : 12 à 15
- **GS** : 30

Objectifs minimum

- **PS** : 5 ou 6
- **MS** : 12 à 15
- **GS** : 30

Écrire les nombres avec des chiffres

Jusque 10

Objectifs minimum

- **PS** : 5 ou 6
- **MS** : 12 à 15
- **GS** : 30

Écrire les nombres avec des chiffres

Jusque 10

Remarques

- ne pas éviter de quantifier les grandes collections quand les situations (de vie de classe) le demandent
- au Japon, seule une moitié des élèves ont compris les cinq premiers nombres à leur entrée en CP

Attention : éviter le comptage-numérotage !

Attention : éviter le comptage-numérotage !

Principes de Gelman

- **Correspondance terme-à-terme** : chaque élément d'une collection doit être associé à un mot-nombre et un seul

Attention : éviter le comptage-numérotage !

Principes de Gelman

- **Correspondance terme-à-terme** : chaque élément d'une collection doit être associé à un mot-nombre et un seul
- **Ordre stable** : les mots-nombres doivent être énoncés dans le même ordre

Attention : éviter le comptage-numérotage !

Principes de Gelman

- **Correspondance terme-à-terme** : chaque élément d'une collection doit être associé à un mot-nombre et un seul
- **Ordre stable** : les mots-nombres doivent être énoncés dans le même ordre
- **Principe cardinal** : le dernier mot-nombre énoncé lors du dénombrement représente le nombre total d'éléments

Attention : éviter le comptage-numérotage !

Principes de Gelman

- **Correspondance terme-à-terme** : chaque élément d'une collection doit être associé à un mot-nombre et un seul
- **Ordre stable** : les mots-nombres doivent être énoncés dans le même ordre
- **Principe cardinal** : le dernier mot-nombre énoncé lors du dénombrement représente le nombre total d'éléments
- **Non-pertinence de l'ordre** : le comptage des éléments peut s'effectuer dans n'importe quel ordre

Attention : éviter le comptage-numérotage !

Principes de Gelman

- **Correspondance terme-à-terme** : chaque élément d'une collection doit être associé à un mot-nombre et un seul
- **Ordre stable** : les mots-nombres doivent être énoncés dans le même ordre
- **Principe cardinal** : le dernier mot-nombre énoncé lors du dénombrement représente le nombre total d'éléments
- **Non-pertinence de l'ordre** : le comptage des éléments peut s'effectuer dans n'importe quel ordre
- **Abstraction** : le processus ne retient, des éléments comptés, que leur caractéristique d'entités distinctes

Merci !

Des questions ?

Merci !

Des questions ?

... et quelques vidéos !