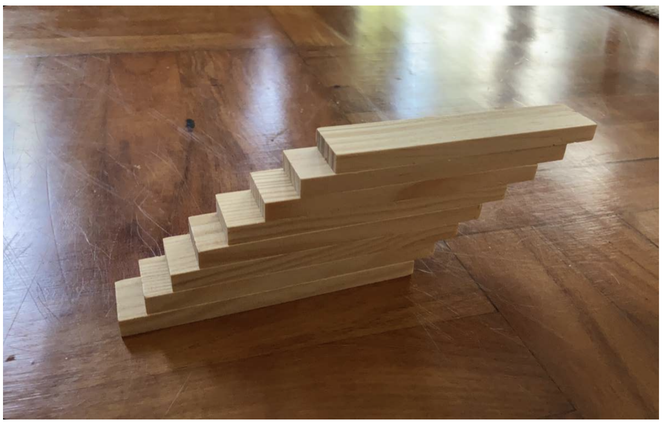
Concours d'escaliers

MATh.en.JEANS

De Roméo Pujol et Simon Henninot
2020-2021

Énoncé du problème :

Nous disposons de n kaplas et devons trouver la disposition de ceux-ci qui permettrait d'avoir l'escalier le plus long possible.

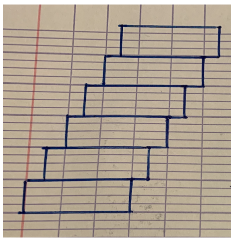


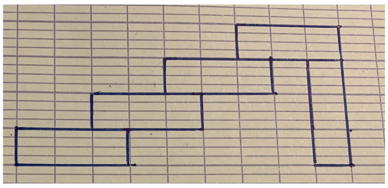
Précisions :

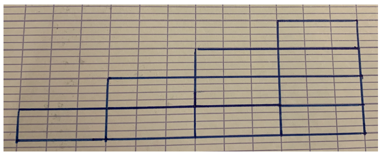
- Nos kaplas mesurent 12 cm de longueur et sont tous identiques
- Leur masse est répartie de manière uniforme : leur centre de gravité est donc placé à l'isobarycentre géométrique du kapla
- Le système des kaplas n'est soumis qu'à l'action du poids et à la réaction du support
- On numérotera les kaplas dans l'ordre du placement (pour les décalages réguliers, de bas en haut, pour les décalages non réguliers, de haut en bas)

Comment nous avons débuté :

Nous avons tout d'abord commencé par faire des schémas afin de visualiser différentes dispositions et ainsi émettre une conjecture sur le problème :

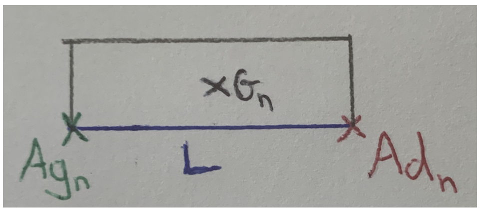

1


2

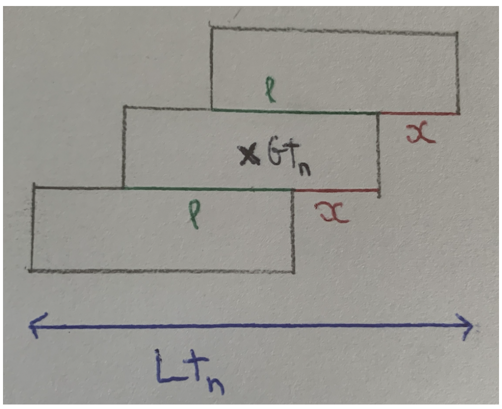

3

Notre conjecture à l'issue des schémas :

Le schéma 2 présente une disposition qui, après avoir fait des tests, est trop instable. En effet, en l'absence de frottements (ou de colle), les kaplas rajoutés ne tiennent pas toujours et rendent donc l'étude de la structure très difficile.
Le schéma 3 présente une disposition qui fonctionne mais nous avons laissé cette idée de côté puisque ce n'est pas très intéressant à étudier: il est évident qu'on pourrait aller à l'infini si on a une infinité de kaplas. De plus, cette disposition n'est pas une solution parfaite: ça prend beaucoup de place (on "remplit" toute la place sous l'escalier) et donc, ce n'est pas pratique du tout.



L = Longueur d'un kapla
Ag_n = Abscisse gauche du kapla n
Ad_n = Abscisse droite du kapla n
G_n = Centre de gravité du kapla n



Lt_n = Longueur totale de l'escalier
l = Longueur commune à deux kaplas successifs
x = Décalage
Gt_n = Centre de gravité de la structure avec n kaplas

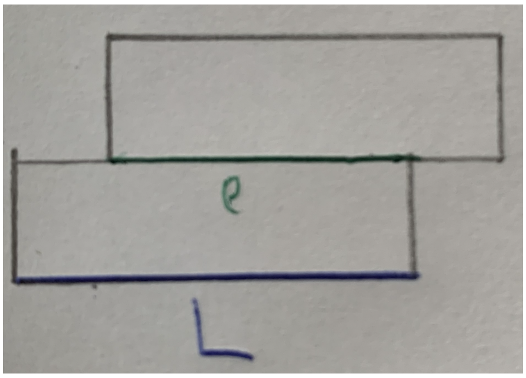
Premier principe :

Suite à une expérience qui consistait à mettre un kapla au dessus d'un autre et de le déplacer sans qu'il tombe, nous avons remarqué que:

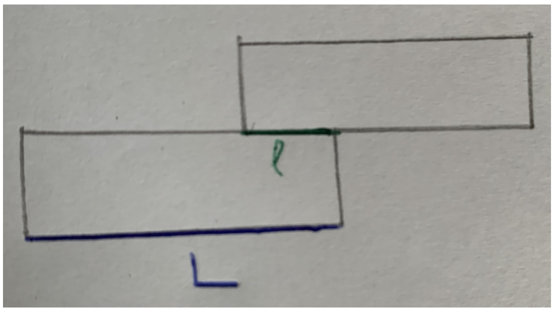
Si l $\leq \frac{L}{2}$, alors le kapla placé au-dessus de l'autre tombe forcément car son centre de gravité dépasse l'extrémité droite du premier kapla.

Ainsi nous pouvons identifier différentes positions entre deux kaplas successifs :

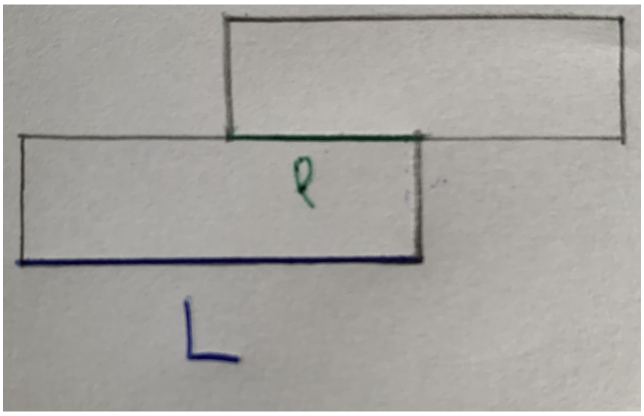
- position stable : l $> \frac{L}{2}$



- position instable : l $< \frac{L}{2}$



- position limite : l $= \frac{L}{2}$



Première conclusion et son raisonnement :

Par logique géométrique, on peut affirmer que:
Si le décalage est constant pour chaque étage, alors les centres de gravité des marches sont alignés.

Ainsi, en sachant que L = 12 cm, Gt_n ne peut dépasser 12 cm (en prenant compte que l'extrémité gauche du premier kapla est 0 cm).
En effet, à décalage régulier, les centres de gravité sont alignés.
Or, si le centre de gravité de la structure (Gt_n) dépasse l'extrémité droite du premier kapla (12 cm), la structure s'effondre.
Donc, Gt_n ne peut dépasser l'extrémité droite du premier kapla.
Ainsi, on a

$$Gt_n \leq 12 \text{ cm}$$

De plus, lorsque le décalage est régulier (en mettant deux kaplas successifs à la position limite), $Gt_n = \frac{Ltn}{2}$

Ainsi, en reprenant ces deux équations, on a

$$\frac{Ltn}{2} \leq 12 \text{ cm} \Leftrightarrow Lt_n \leq 24 \text{ cm}$$

Conclusion :

Lorsque x est constant, la longueur totale ne peut dépasser 24 cm :
à marches régulières, l'escalier le plus long possible à une limite de 24 cm.

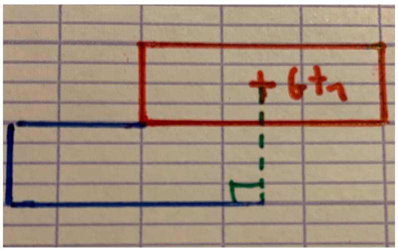
Ce résultat est surprenant : même avec une infinité de kaplas, on ne peut que faire un "escalier normal" (avec un décalage régulier) de petite longueur. Cependant, ce résultat est aussi étrange. En effet, les escaliers que l'on voit quotidiennement vont beaucoup plus loin, c'est certainement parce qu'il sont "collés" d'une certaine manière ou qu'ils prennent la disposition du schéma 3. Ici, ce qui rend le problème difficile, c'est qu'on n'a pas de colle (et en plus, on néglige les frottements).

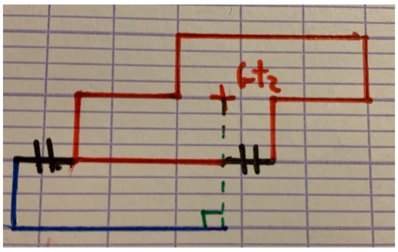
Mais l’aventure ne s'arrête pas là :

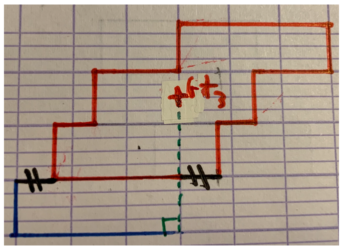
Déçus de cette réponse, nous avons décidé de prendre le sujet sous un nouvel angle : peut-on atteindre un escalier plus long avec des décalages non réguliers ?

En effet, comme vu précédemment, si on rajoute un kapla en haut de l’escalier, le centre de gravité de la structure est modifié. Ainsi, le décalage x entre chaque kapla doit être adapté de telle sorte que l’escalier ne s’effondre pas et donc, essentiellement, tous les calculs sont à refaire et la position optimale trouvée précédemment doit être recalculée.

Nous nous sommes donc dit que ce problème pouvait être réglé en plaçant les kaplas par le bas de la structure, en plaçant l'extrémité droite de ce dernier en dessous du centre de gravité Gt_{n-1} de l’escalier.







Les centres de gravité des kaplas précédents ne dépassant pas l’abscisse droite du kapla ajouté en dessous, la structure rouge étant déjà stable (et donc peut être considéré comme un seul bloc), l’escalier complet ne tombe pas.

Pour faciliter la réflexion, nous avons décidé de faire un tableur de la situation avec :

- $Ad_1 = 0$
- Ad_n (pour $n > 1$) $= Gt_{n-1}$
- $Ag_n = Ad_n - 12$
- $G_n = (Ag_n + Ad_n) / 2$
- $Gt_1 = G_1$
- Gt_n (pour $n > 1$) $= [G_{t-1} * (n-1) + G_n] / n$
- $Lt_n =$ I Ag_n I
- $Lajout_1 = 12$
- $Lajout_n$ (pour $n > 1$) $= Lt_n - Lt_{n-1}$

n (numéro du kapla)	Ag_n (abscisse gauche du kapla n)	Ad_n (abscisse droite du kapla n)	G_n (centre de gravité du kapla n)	Gt_n (centre de gravité de la structure)	Ltn (Longueur de l'escalier pour n kaplas en cm)	$Lajout_n$ (Longueur ajouté à Ltn chaque étape)	$Lajout_n$ vu différemment
1	-12,00	0,00	-6,00	-6,00	12,00	12,00	12÷1
2	-18,00	-6,00	-12,00	-9,00	18,00	6,00	12÷2
3	-21,00	-9,00	-15,00	-11,00	21,00	3,00	12÷4
4	-23,00	-11,00	-17,00	-12,50	23,00	2,00	12÷6
5	-24,50	-12,50	-18,50	-13,70	24,50	1,50	12÷8
6	-25,70	-13,70	-19,70	-14,70	25,70	1,20	12÷10
7	-26,70	-14,70	-20,70	-15,56	26,70	1,00	12÷12
8	-27,56	-15,56	-21,56	-16,31	27,56	0,86	12÷14
9	-28,31	-16,31	-22,31	-16,97	28,31	0,75	12÷16
10	-28,97	-16,97	-22,97	-17,57	28,97	0,67	12÷18

Ainsi, on remarque que Lt_n possède une suite sur [1;+∞[sous la forme d'une relation de récurrence tel que :

$Lt_1 = 12$

$Lt_{n+1} = Lt_n + \frac{12}{2n}$ pour n > 1

⇔ $Lt_1 = 12$

$Lt_{n+1} = Lt_n + \frac{6}{n}$ pour n > 1

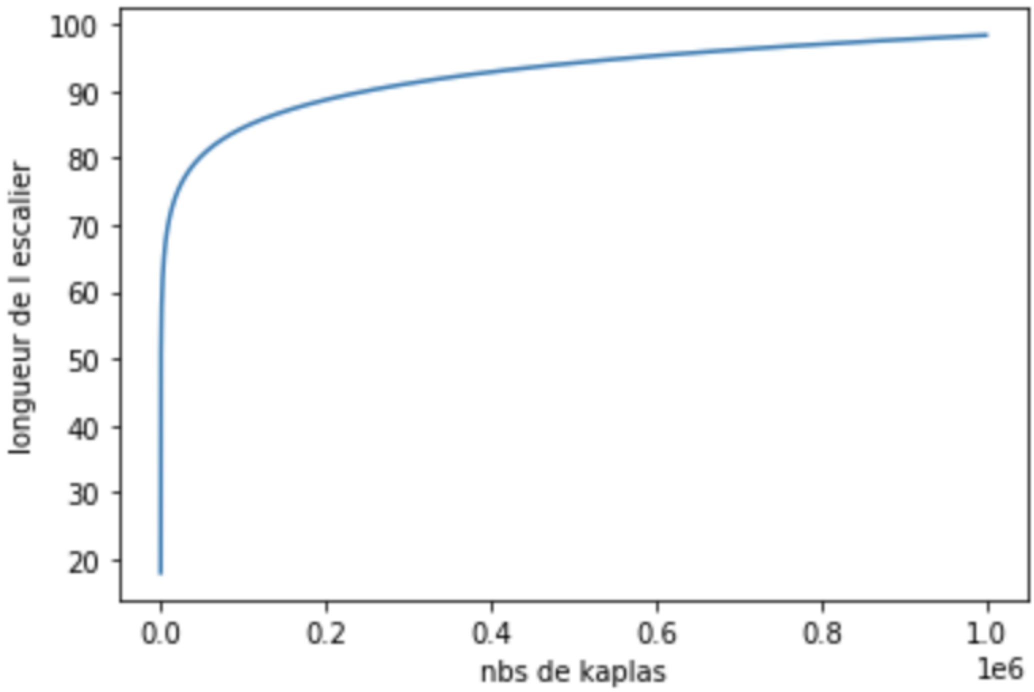
Plus généralement, pour un kapla de longueur L :

$Lt_1 = L$

$Lt_{n+1} = Lt_n + \frac{L}{2n}$ pour n > 1

<u>Cherchons la limite de Lt_n en + ∞ :</u>

Pour une première observation, nous avons tracé la courbe représentant la longueur de l'escalier en fonction du nombre de kaplas et avons pu remarquer que cette courbe se comporte comme le logarithme népérien.



Nous conjecturons que la suite tend vers +∞ en +∞ car elle a l'air de se comporter comme le logarithme népérien.

De plus, on sait que:

$Lt_{n+1} = Lt_n + \frac{6}{n}$

Or $n > 1 > 0$

D'où $\frac{6}{n} > 0$

Ainsi, $Lt_n + \frac{6}{n} > Lt_n$

$\Leftrightarrow Lt_{n+1} > Lt_n$

Donc la suite Lt_n est croissante.

Par ailleurs, la suite (Lt_n) est définie par :

$Lt_n = 12 + \frac{6}{1} + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \ldots + \frac{6}{n}$

Or, la suite étant strictement croissante,

- Soit elle possède une limite $l \in \mathbb{R}^+$ en $+\infty$
- Soit elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$

Ainsi, raisonnons par l'absurde :

Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} Ltn = l$:

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} Lt_{2n} - \lim\limits_{n \to +\infty} Lt_n = l - l$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} Lt_{2n} - \lim\limits_{n \to +\infty} Lt_n = 0$

Or $Lt_{2n} - Lt_n = (12 + \frac{6}{1} + \frac{6}{2} + ... + \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} + ... + \frac{6}{2n}) - (12 + \frac{6}{1} + \frac{6}{2} + ... + \frac{6}{n})$

$\Rightarrow Lt_{2n} - Lt_n = \frac{6}{n+1} + ... + \frac{6}{2n}$

$\Rightarrow Lt_{2n} - Lt_n \geq \frac{6}{2n} + ... + \frac{6}{2n}$

$\Rightarrow Lt_{2n} - Lt_n \geq 6n \times \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow Lt_{2n} - Lt_n \geq 3$

Si la limite en $+\infty$ de cette suite ne tendrait pas vers l'infini, alors $Lt_{2n} - Lt_n$ devrait pouvoir être égale à 0. Or ce n'est pas le cas.

Conclusion : La suite L_n tend vers + l'infini en + l'infini.
Il est donc possible de construire un escalier de kapla d'une longueur infinie avec de tels paramètres.

Modélisons nos résultats :

Enfin, nous avons fait deux programmes Python résumant la situation :

1er programme :

Combien de kaplas de longueur L sont nécessaires pour faire un escalier de longueur Lt ?
Le programme ci-dessous permet donc de retourner le nombre de kaplas nécessaires pour un escalier d'une certaine longueur après avoir mis en paramètres la longueur d'un kapla (L) et la longueur totale recherchée de l'escalier (Lt).

```python
def combiendekapla(L,Lt):
 n = 1
 Ltinter = L
 while Ltinter < Lt:
   Ltinter += L/(2*n)
   n += 1
```

```
 return ('Pour faire un escalier plus long ou egale a '
+ str(Lt) + ' unité avec des kaplas de longueur ' +
str(L) + ', il vous faudra ' + str(n)  + ' kaplas.')
```

Par exemple :

- Pour atteindre une longueur d'escalier de 20 cm avec des kaplas de 12 cm, il faudrait 3 kaplas au minimum.
- Pour atteindre une longueur d'escalier de 50 cm avec des kaplas de 12 cm, il faudrait 137 kaplas au minimum.
- Pour atteindre une longueur d'escalier de 100 cm avec des kaplas de 12 cm, il faudrait 1315137 kaplas au minimum.

En effet, nous avons l'impression que l'on peut faire un escalier jusqu'à l'infini, mais cela nécessiterait une très grande quantité de kaplas.

<u>2ème programme :</u>

Avec n kaplas de longueur L, quelle est la longueur maximale de l'escalier pouvant être atteint ?
Le programme ci-dessous permet donc de retourner la longueur maximale de l'escalier après avoir mis en paramètres le nombre de kaplas (n) et la longueur d'un kapla.

```
def longueurmaximal(n,L):
 Lt = L
 if n <= 1:
   return (L*n)
 else:
   for i in range (1,n):
     Lt += L/(2*(i))
     n += 1
   return (Lt)
```

Par exemple, avec 10 kaplas de 12 cm de longueur, il est possible de faire un escalier de 28,973809523809525 cm de longueur.

- 100 kaplas → escalier de 43,06426510583773 cm.
- 1000 kaplas → escalier de 56,906825163302145 cm.
- 10^9 kaplas → escalier de 139,8028890082337 cm.

On remarque qu’il nécessite beaucoup de kaplas pour un escalier qui n’est pas très long au final.