Aires et volumes

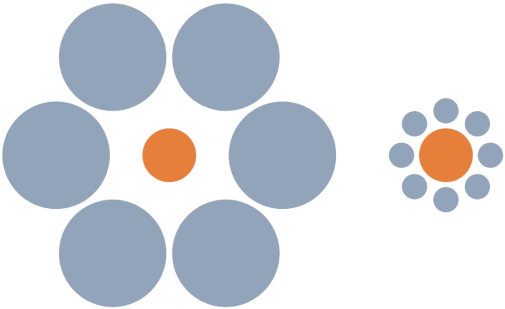
Construire, enseigner, manipuler

Didier Lesesvre

Aire et volume : qu’est-ce ?

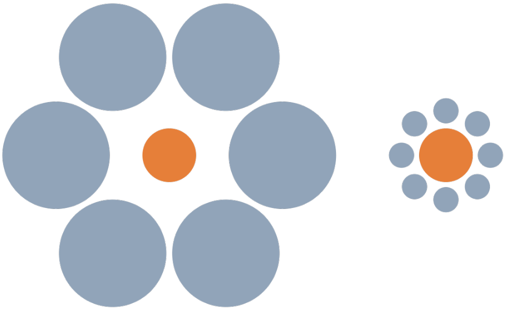
Comparons des aires (1)

Quel disque orange a la plus grande aire ?



Comparons des aires (1)

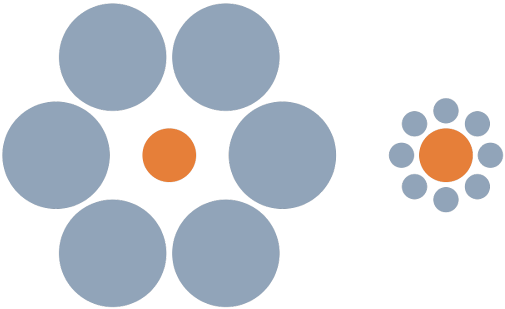
Quel disque orange a la plus grande aire ?



Les deux ont la même aire ! (illusion de Ebbinghaus)

Comparons des aires (1)

Quel disque orange a la plus grande aire ?

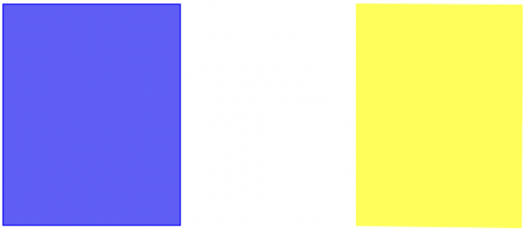


Les deux ont la même aire ! (illusion de Ebbinghaus)

Problème : comment le vérifier ? qu'est-ce qu'une aire ?

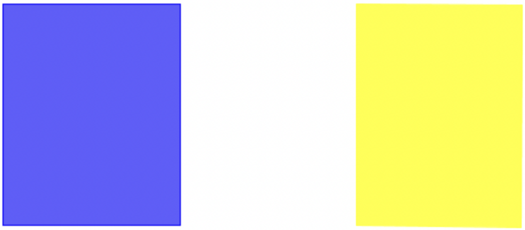
Comparons des aires (2)

Quel rectangle a la plus grande aire ?



Comparons des aires (2)

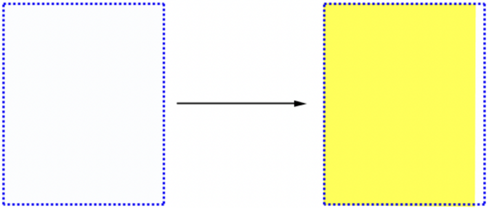
Quel rectangle a la plus grande aire ?



L'aire du rectangle bleu est la plus grande

Comparons des aires (2)

Quel rectangle a la plus grande aire ?

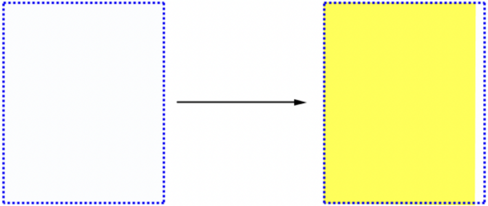


L'aire du rectangle bleu est la plus grande

Méthode : superposition

Comparons des aires (2)

Quel rectangle a la plus grande aire ?



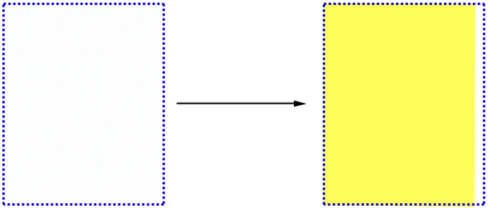
L'aire du rectangle bleu est la plus grande

Méthode : superposition

Propriétés sous-jacentes ?

Comparons des aires (2)

Quel rectangle a la plus grande aire ?



L'aire du rectangle bleu est la plus grande

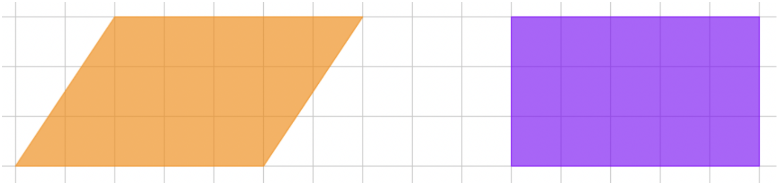
Méthode : superposition

Propriétés sous-jacentes ?

- invariance par déplacement
- croissance

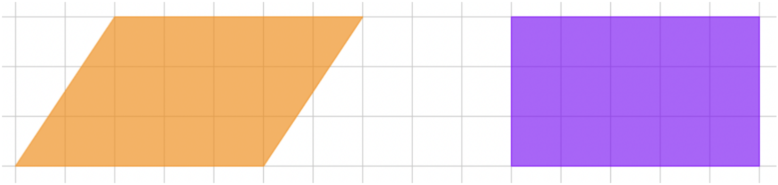
Comparons des aires (3)

Quelle surface a la plus grande aire ?



Comparons des aires (3)

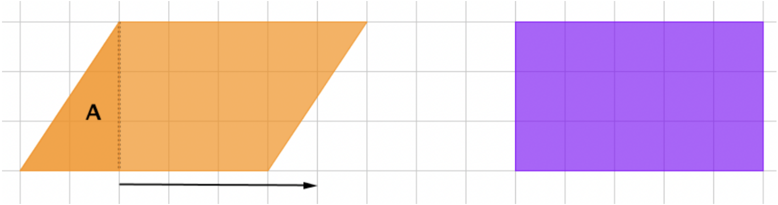
Quelle surface a la plus grande aire ?



Les aires sont les mêmes

Comparons des aires (3)

Quelle surface a la plus grande aire ?

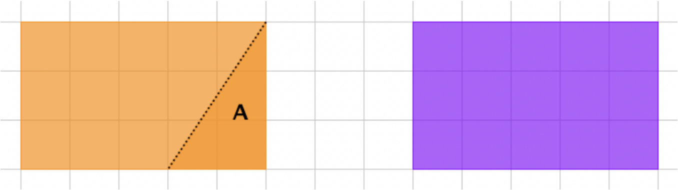


Les aires sont les mêmes

Méthode : découpage, pavage

Comparons des aires (3)

Quelle surface a la plus grande aire ?



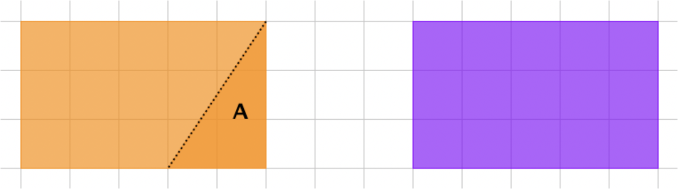
Les aires sont les mêmes

Méthode : découpage, pavage

Propriétés sous-jacentes ?

Comparons des aires (3)

Quelle surface a la plus grande aire ?



Les aires sont les mêmes

Méthode : découpage, pavage

Propriétés sous-jacentes ?

- invariance par découpage (additivité)

Conclusion ?

- la notion d'aire n'est pas évidente à définir

Conclusion ?

- la notion d'aire n'est pas évidente à définir
- les techniques utilisées ne sont pas triviales

Conclusion ?

- la notion d'aire n'est pas évidente à définir
- les techniques utilisées ne sont pas triviales
- les propriétés ne sont pas toujours naturelles

Conclusion ?

- la notion d'aire n'est pas évidente à définir
- les techniques utilisées ne sont pas triviales
- les propriétés ne sont pas toujours naturelles
- l'intuition est trompeuse

Conclusion ?

- la notion d'aire n'est pas évidente à définir
- les techniques utilisées ne sont pas triviales
- les propriétés ne sont pas toujours naturelles
- l'intuition est trompeuse

Conclusion ?

- la notion d'aire n'est pas évidente à définir
- les techniques utilisées ne sont pas triviales
- les propriétés ne sont pas toujours naturelles
- l'intuition est trompeuse

Ojectif : comprendre ce qu'est une aire et comment l'enseigner

Points de vue de didacticiens

Douady & Perrin-Glorian

« Soient deux surfaces S1 et S2 qu'un même **déplacement** amène en coïncidence, elles occupent autant de place dans le plan. **Nous dirons** que S1 et S2 ont même aire.

Douady & Perrin-Glorian

« Soient deux surfaces S1 et S2 qu'un même **déplacement** amène en coïncidence, elles occupent autant de place dans le plan. **Nous dirons** que S1 et S2 ont même aire.

Soient S une surface, S' une surface obtenue en **découpant** S en pièces et en recollant les pièces sans perte ni chevauchement. **Nous dirons** encore que S et S' ont même aire. » (Douady & Perrin-Glorian)

Douady & Perrin-Glorian

« Soient deux surfaces S1 et S2 qu'un même **déplacement** amène en coïncidence, elles occupent autant de place dans le plan. **Nous dirons** que S1 et S2 ont même aire.

Soient S une surface, S' une surface obtenue en **découpant** S en pièces et en recollant les pièces sans perte ni chevauchement. **Nous dirons** encore que S et S' ont même aire. » (Douady & Perrin-Glorian)

Ici, l'aire est une **classe d'équivalence** géométrique : les aires sont "égales" lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par

- découpage
- déplacement
- superposition

Mesurer les aires ?

Mesurer les aires ?

« On peut donner un sens à l'expression "deux surfaces ont même aire" **sans passer par la mesure** dans des contextes, limités certes, mais suffisamment significatifs, comme le **découpage et recollement** sans chevauchement. »

Mesurer les aires ?

« On peut donner un sens à l'expression "deux surfaces ont même aire" **sans passer par la mesure** dans des contextes, limités certes, mais suffisamment significatifs, comme le **découpage et recollement** sans chevauchement. »

Rappel : les grandeurs sont introduites **avant** les mesures pour

- donner du sens
- comprendre les propriétés géométriques
- ne pas dépendre des outils ou des nombres

Déjà des difficultés

Difficultés ?

Déjà des difficultés

Difficultés ?

- les découpages et les pavages ne sont **pas forcément faciles** (e.g. puzzle, tangrams, etc.)

Déjà des difficultés

Difficultés ?

- les découpages et les pavages ne sont **pas forcément faciles** (e.g. puzzle, tangrams, etc.)
- **aucun outil** ne permet de comparer les aires de manière élémentaire, primitive, autre que le découpage/pavage

Déjà des difficultés

Difficultés ?

- les découpages et les pavages ne sont **pas forcément faciles** (e.g. puzzle, tangrams, etc.)
- **aucun outil** ne permet de comparer les aires de manière élémentaire, primitive, autre que le découpage/pavage
- la grandeur "aire" est **moins naturelle** dans la vie courante que d'autres (longueur, masse, ...)

Approches théoriques

Mathématiquement : notions de mesure

Une **mesure** sur un espace E est une fonction

$$\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$$

Mathématiquement : notions de mesure

Une **mesure** sur un espace E est une fonction

$$\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$$

telle que

- pour toute partie A de E, on a $\mu(A) \geq 0$ (**positivité**)
- $\mu(\varnothing) = 0$ i.e. l'ensemble vide est de mesure nulle
- si A et B sont disjoints, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité)

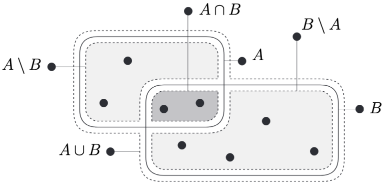
Mathématiquement : notions de mesure

Une **mesure** sur un espace E est une fonction

$$\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$$

telle que

- pour toute partie A de E, on a $\mu(A) \geq 0$ (**positivité**)
- $\mu(\varnothing) = 0$ i.e. l'ensemble vide est de mesure nulle
- si A et B sont disjoints, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité)



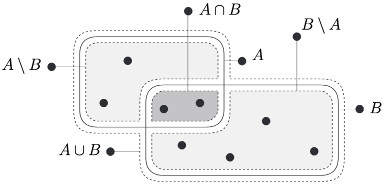
Mathématiquement : notions de mesure

Une **mesure** sur un espace E est une fonction

$$\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$$

telle que

- pour toute partie A de E, on a $\mu(A) \geq 0$ (**positivité**)
- $\mu(\varnothing) = 0$ i.e. l'ensemble vide est de mesure nulle
- si A et B sont disjoints, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité)



NB : La probabilité $\mathbb{P}$... est une mesure !

Une propriété fondamentale

L'**additivité** des mesures : si A et B sont disjoints,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Une propriété fondamentale

L'**additivité** des mesures : si A et B sont disjoints,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

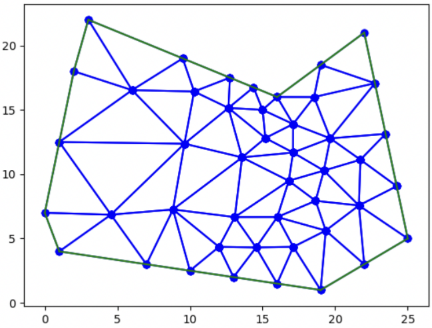
C'est le fondement des **découpages et recollements**

L'approche d'Hadamard

La méthode que propose Hadamard dans son cours de géométrie élémentaire (1898) consiste à traiter d'abord le cas des polygones en se servant de l'additivité et à n'utiliser les **encadrements** que dans le cas de surfaces plus complexes.

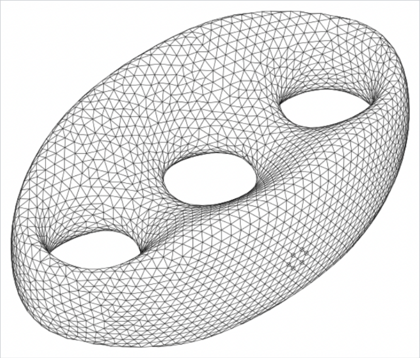
L’approche d’Hadamard

La méthode que propose Hadamard dans son cours de géométrie élémentaire (1898) consiste à traiter d’abord le cas des polygones en se servant de l’additivité et à n’utiliser les **encadrements** que dans le cas de surfaces plus complexes.



L’approche d’Hadamard

La méthode que propose Hadamard dans son cours de géométrie élémentaire (1898) consiste à traiter d’abord le cas des polygones en se servant de l’additivité et à n’utiliser les **encadrements** que dans le cas de surfaces plus complexes.



L'approche d'Hadamard

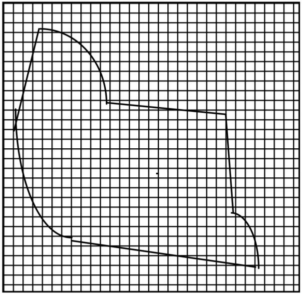
La méthode que propose Hadamard dans son cours de géométrie élémentaire (1898) consiste à traiter d'abord le cas des polygones en se servant de l'additivité et à n'utiliser les **encadrements** que dans le cas de surfaces plus complexes.

Problèmes

- peut être fastidieux
- toutes les surfaces ne sont pas triangulables

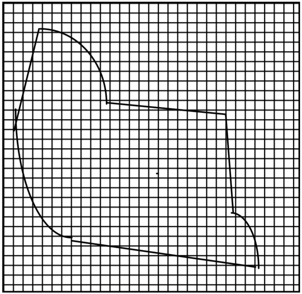
L'approche de Lebesgue

Comme **limite** de l'approximation par les carrés



L'approche de Lebesgue

Comme **limite** de l'approximation par les carrés



Problèmes

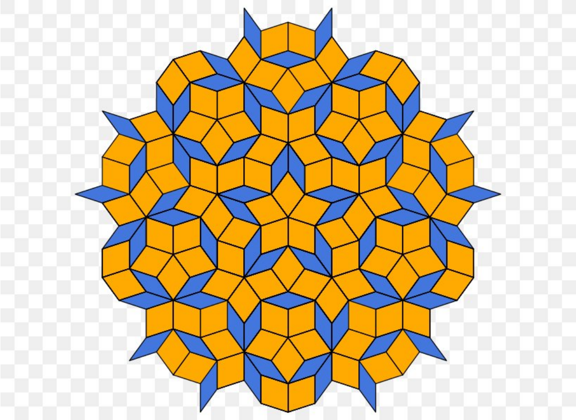
- peut être fastidieux
- toutes les surfaces ne sont pas ainsi pavables
- procédé asymptotique (limite) : approximation

Vers les pavages

Une mesure idéale repose sur un **pavage** : recouvrir une surface par des surfaces "élémentaires" (dont on connait l'aire) disjointes

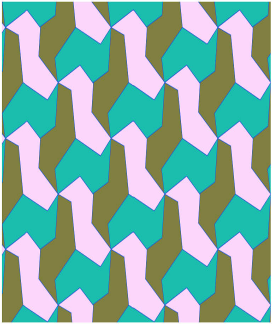
Vers les pavages

Une mesure idéale repose sur un **pavage** : recouvrir une surface par des surfaces "élémentaires" (dont on connait l'aire) disjointes



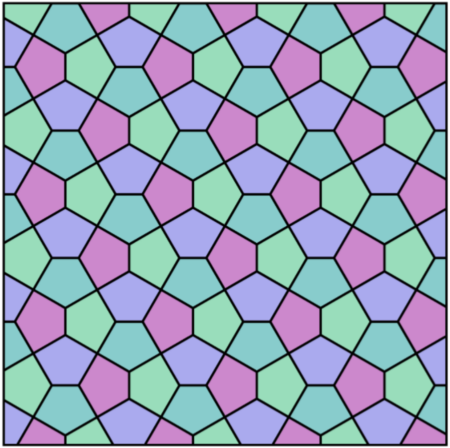
Vers les pavages

Une mesure idéale repose sur un **pavage** : recouvrir une surface par des surfaces "élémentaires" (dont on connait l'aire) disjointes



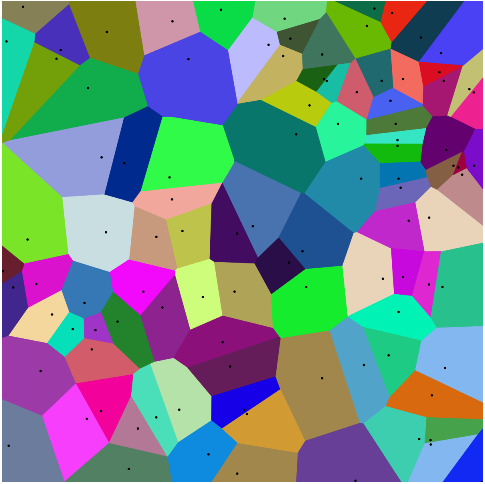
Vers les pavages

Une mesure idéale repose sur un **pavage** : recouvrir une surface par des surfaces "élémentaires" (dont on connait l'aire) disjointes



Vers les pavages

Une mesure idéale repose sur un **pavage** : recouvrir une surface par des surfaces "élémentaires" (dont on connait l'aire) disjointes



Activités de pavages

- Tangram
- Pentaminos
- Puzzles
- Frises
- Tetris...

Didactique des aires

Types de questions et procédures

Classification (Moreira-Baltar & Perrin-Glorian)

Types de questions et procédures

Classification (Moreira-Baltar & Perrin-Glorian)

- Comparaison statique (inclusion, décompositions)

Types de questions et procédures

Classification (Moreira-Baltar & Perrin-Glorian)

- Comparaison statique (inclusion, décompositions)
- Comparaison dynamique (déformations, transformations)

Types de questions et procédures

Classification (Moreira-Baltar & Perrin-Glorian)

- Comparaison statique (inclusion, décompositions)
- Comparaison dynamique (déformations, transformations)
- Mesure avec unité fixée (mesurage, encadrement, formules)

Types de questions et procédures

Classification (Moreira-Baltar & Perrin-Glorian)

- Comparaison statique (inclusion, décompositions)
- Comparaison dynamique (déformations, transformations)
- Mesure avec unité fixée (mesurage, encadrement, formules)
- Changement d'unité (pavage, relation entre unités)

Types de questions et procédures

Classification (Moreira-Baltar & Perrin-Glorian)

- Comparaison statique (inclusion, décompositions)
- Comparaison dynamique (déformations, transformations)
- Mesure avec unité fixée (mesurage, encadrement, formules)
- Changement d'unité (pavage, relation entre unités)
- Production de surfaces ou de solides (même/plus/moins)

Types de questions et procédures

Classification (Moreira-Baltar & Perrin-Glorian)

- Comparaison statique (inclusion, décompositions)
- Comparaison dynamique (déformations, transformations)
- Mesure avec unité fixée (mesurage, encadrement, formules)
- Changement d'unité (pavage, relation entre unités)
- Production de surfaces ou de solides (même/plus/moins)
- Rapports d'aires et de volumes (agrandissements, réductions)

Conception de l'aire

Deux conceptions de l'aire

- l'une est liée au cadre **numérique** : un nombre qui se calcule
- l'autre est liée au cadre **géométrique** : invariant géométrique

Cadre numérique

Difficultés numériques

- Ne pas distinguer les différentes grandeurs en jeu
- Confondre les unités
- Étendre l'usage des formules à des cas où elles ne sont pas valables (par exemple faire le produit des longueurs des côtés pour calculer l'aire du parallélogramme)
- Penser que les aires sont proportionnelles (agrandissements)

Cadre numérique

Difficultés numériques

- Ne pas distinguer les différentes grandeurs en jeu
- Confondre les unités
- Étendre l'usage des formules à des cas où elles ne sont pas valables (par exemple faire le produit des longueurs des côtés pour calculer l'aire du parallélogramme)
- Penser que les aires sont proportionnelles (agrandissements)

Il est fondamental de travailler le **sens**

Cadre géométrique

Difficultés géométriques

- Sensibilité à la forme des surfaces
- Amalgamer les différentes caractéristiques de la surface
- Penser que aire et périmètre varient toujours ensemble

Hypothèses de Perrin-Glorian

Hypothèses de Perrin-Glorian

- Le développement dans l'enseignement du concept d'aire **en tant que grandeur** aide les élèves à établir les relations nécessaires entre les cadres géométrique et numérique

Hypothèses de Perrin-Glorian

- Le développement dans l'enseignement du concept d'aire **en tant que grandeur** aide les élèves à établir les relations nécessaires entre les cadres géométrique et numérique
- Une identification **trop précoce** entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici aires et longueurs)

Hypothèses de Perrin-Glorian

- Le développement dans l'enseignement du concept d'aire **en tant que grandeur** aide les élèves à établir les relations nécessaires entre les cadres géométrique et numérique
- Une identification **trop précoce** entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici aires et longueurs)
- Dans le cadre géométrique, une interaction entre les points de vue **statique** et **dynamique** est nécessaire dans la conceptualisation de l'aire et sa dissociation de la longueur

Interactions avec d'autres domaines

Des interations entre domaines

Interactions avec d'autres domaines

- des nombres et de la géométrie

Des interations entre domaines

Interactions avec d'autres domaines

- des nombres et de la géométrie
- proportionnalité (grandeurs/mesures)

Des interations entre domaines

Interactions avec d'autres domaines

- des nombres et de la géométrie
- proportionnalité (grandeurs/mesures)
- rudiments de calcul algébrique (formules)

Des interations entre domaines

Interactions avec d'autres domaines

- des nombres et de la géométrie
- proportionnalité (grandeurs/mesures)
- rudiments de calcul algébrique (formules)
- résolution de problèmes

Des interations entre domaines

Interactions avec d'autres domaines

- des nombres et de la géométrie
- proportionnalité (grandeurs/mesures)
- rudiments de calcul algébrique (formules)
- résolution de problèmes
- arts plastiques, géographie, EPS

Les programmes

Bulletin officiel

Contenus et compétences

- **Comparaison** de surfaces selon leurs aires
- **Unités** usuelles, **conversions**
- Utiliser les **instruments** de mesure
- **Formules** de l'aire d'un rectangle et d'un triangle

Contenus et compétences

- **Comparaison** de surfaces selon leurs aires
- **Unités** usuelles, **conversions**
- Utiliser les **instruments** de mesure
- **Formules** de l'aire d'un rectangle et d'un triangle

Ainsi, les aires sont **au confluent des trois domaines**

- **Géométrie** (l'aire étant une quantité géométrique)
- **Grandeurs et mesures** (l'aire étant la "mesure" d'une surface)
- **Nombres et calculs** (formules pour les aires, multiplication)

Progressivité

CM1

- Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé
- Classer et ranger des surfaces selon leur aire

CM2

- Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle en utilisant la formule appropriée
- Connaître et utiliser les unités d'aire (cm^2, m^2 et km^2)

Compétences

Comparer les aires

- soit directement par **superposition**
- soit par **découpage et recollement**
- soit en utilisant une **unité** de mesure (aspect unidimensionnel)

Compétences

Comparer les aires

- soit directement par **superposition**
- soit par **découpage et recollement**
- soit en utilisant une **unité** de mesure (aspect unidimensionnel)

Déterminer l'aire à partir des dimensions

- soit en appliquant une **formule** (aspect bidimensionnel)
- soit en **décomposant** la figure en figures simples

Compétences

Comparer les aires

- soit directement par **superposition**
- soit par **découpage et recollement**
- soit en utilisant une **unité** de mesure (aspect unidimensionnel)

Déterminer l'aire à partir des dimensions

- soit en appliquant une **formule** (aspect bidimensionnel)
- soit en **décomposant** la figure en figures simples

Exprimer l'aire en unité

- L'élève doit savoir effectuer des **conversions**
- L'élève doit savoir **estimer** la mesure de l'aire d'une surface

Vocabulaire

Attention : objet $\neq$ grandeur $\neq$ mesure

Vocabulaire

Attention : objet $\neq$ grandeur $\neq$ mesure

En dimension 1, nous parlons de **segment** pour l'objet géométrique et de **longueur** pour la grandeur

Vocabulaire

Attention : objet $\neq$ grandeur $\neq$ mesure

En dimension 1, nous parlons de **segment** pour l'objet géométrique et de **longueur** pour la grandeur

En dimension 2, nous parlons de **surface** pour l'objet géométrique et d'**aire** pour la grandeur

Vocabulaire

Attention : objet $\neq$ grandeur $\neq$ mesure

En dimension 1, nous parlons de **segment** pour l'objet géométrique et de **longueur** pour la grandeur

En dimension 2, nous parlons de **surface** pour l'objet géométrique et d'**aire** pour la grandeur

En dimension 3, nous essayons de réserver le mot **volume** pour la grandeur et de parler de **solide** pour l'objet géométrique

Attention aux mots

Le mot **aire** est utilisé de préférence à celui de surface

Homonymie dangereuse

- l'air que l'on respire
- l'air que l'on fredonne
- l'aire de repos, géographique...
- l'ère historique
- l'aire d'une surface

Progression sur les aires

Mise en oeuvre, activités, productions

Progression

Progression

- Comparaisons par **superposition et découpage**
  - surfaces très différentes
  - surfaces superposables
  - surfaces à découper et recomposer
  - construction de surfaces d'aire donnée

Progression

- Comparaisons par **superposition et découpage**
  - surfaces très différentes
  - surfaces superposables
  - surfaces à découper et recomposer
  - construction de surfaces d'aire donnée
- Surfaces dessinées sur **papier quadrillé**
  - surfaces à découper et recomposer
  - procédure de comptage des carreaux
  - sens de la multiplication
  - distinction aire-périmètre, constructions sous contraintes

Progression

- Comparaisons par **superposition et découpage**
    - surfaces très différentes
    - surfaces superposables
    - surfaces à découper et recomposer
    - construction de surfaces d'aire donnée
- Surfaces dessinées sur **papier quadrillé**
    - surfaces à découper et recomposer
    - procédure de comptage des carreaux
    - sens de la multiplication
    - distinction aire-périmètre, constructions sous contraintes
- **Mesurage**
    - unité d'aire, e.g. carreau de quadrillage
    - formule de l'aire du rectangle
    - retour aux découpages et recompositions
    - varier les étalons définissant l'unité d'aire

Proposition de progression

Proposition de progression

- Aire sans mesure, découpage et recollement sur papier blanc

Proposition de progression

- Aire sans mesure, découpage et recollement sur papier blanc
- Papier quadrillé et déplacements : changements de points de vue entre le quadrillage et le papier blanc

Proposition de progression

- Aire sans mesure, découpage et recollement sur papier blanc
- Papier quadrillé et déplacements : changements de points de vue entre le quadrillage et le papier blanc
- Pavages variés, papier non uniquement quadrillé

Proposition de progression

- Aire sans mesure, découpage et recollement sur papier blanc
- Papier quadrillé et déplacements : changements de points de vue entre le quadrillage et le papier blanc
- Pavages variés, papier non uniquement quadrillé
- Dissociation de l'aire et du périmètre sans mesure de l'aire, avec ou sans mesure du périmètre

Proposition de progression

- Aire sans mesure, découpage et recollement sur papier blanc
- Papier quadrillé et déplacements : changements de points de vue entre le quadrillage et le papier blanc
- Pavages variés, papier non uniquement quadrillé
- Dissociation de l'aire et du périmètre sans mesure de l'aire, avec ou sans mesure du périmètre
- Établissement des formules en relation avec les invariants géométriques des figures

Proposition de progression

- Aire sans mesure, découpage et recollement sur papier blanc
- Papier quadrillé et déplacements : changements de points de vue entre le quadrillage et le papier blanc
- Pavages variés, papier non uniquement quadrillé
- Dissociation de l'aire et du périmètre sans mesure de l'aire, avec ou sans mesure du périmètre
- Établissement des formules en relation avec les invariants géométriques des figures
- Changements d'unités

Proposition de progression

- Aire sans mesure, découpage et recollement sur papier blanc
- Papier quadrillé et déplacements : changements de points de vue entre le quadrillage et le papier blanc
- Pavages variés, papier non uniquement quadrillé
- Dissociation de l'aire et du périmètre sans mesure de l'aire, avec ou sans mesure du périmètre
- Établissement des formules en relation avec les invariants géométriques des figures
- Changements d'unités
- Encadrement et approximations

Variables didactique

Comparaison

- nature des objets
- taille de ces objets
- possibilité de superposition directe ou non de ces objets
- présence de quadrillage ou non
- possibilité ou non de découper/décomposer un objet

Mesure des aires

- nature de la figure : simple ou composée
- possibilité ou non de décomposer la figure en éléments simples
- le fait que les dimensions utiles sont données ou non
- la mise à disposition ou non d'un formulaire

Difficultés d'ordre non mathématique

Difficultés d'ordre non mathématique

Psychologiques et cognitiques

- développement cognitif des élèves
- attitudes affectives et émotionnelles

Difficultés d'ordre non mathématique

Psychologiques et cognitiques

- développement cognitif des élèves
- attitudes affectives et émotionnelles

Epistémologiques

- complexité de l'objet mathématique
- raisonnement et pensée mathématique

Difficultés d'ordre non mathématique

Psychologiques et cognitiques

- développement cognitif des élèves
- attitudes affectives et émotionnelles

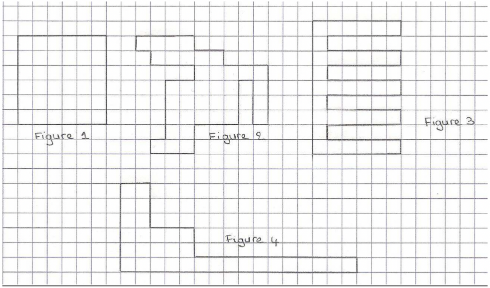
Epistémologiques

- complexité de l'objet mathématique
- raisonnement et pensée mathématique

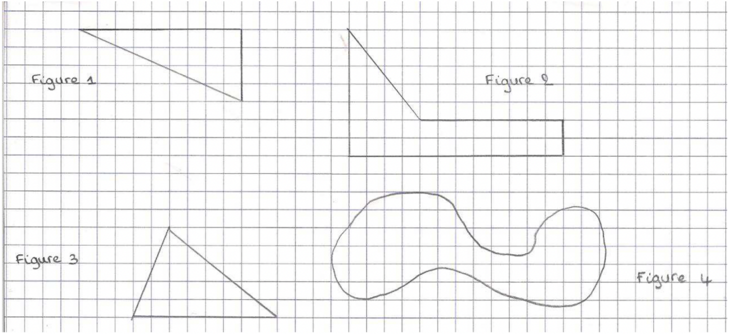
Didactiques

- processsus d'enseignement

Avec valeur exacte

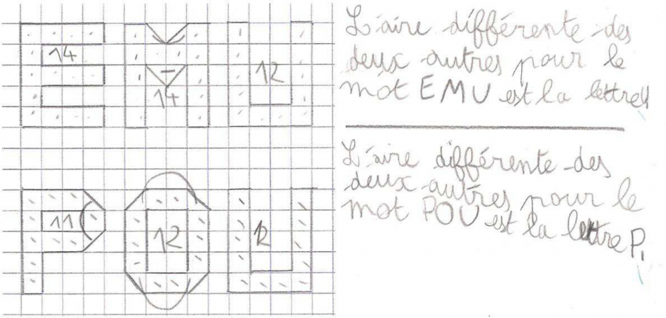


Activités de classements

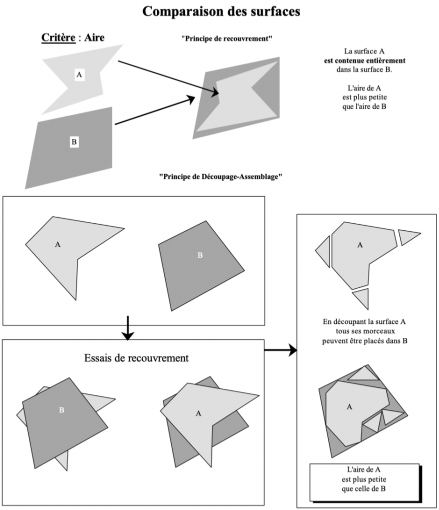


Difficultés du dénombrement

- Comptage-numérotage-marquage
- Difficultés des fractions de carrés (e.g. M)



Activité


Comparaison des surfaces
Critère : Aire
"Principe de recouvrement"
A
B
La surface A
est contenue entièrement
dans la surface B.
L'aire de A
est plus petite
que l'aire de B
"Principe de Découpage-Assemblage"
A
B
Essais de recouvrement
B
A
A
En découpant la surface A
tous ses morceaux
peuvent être placés dans B
A
L'aire de A
est plus petite
que celle de B

Confusion dimensionnelle

Avoir la même...

Longueur

« Deux surfaces A et B ont même aire » signifie « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

Avoir la même...

Longueur

« Deux surfaces A et B ont même aire » signifie « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

Aire

« Deux surfaces A et B ont même aire » signifie « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

Avoir la même...

Longueur

« Deux surfaces A et B ont même aire » signifie « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

Aire

« Deux surfaces A et B ont même aire » signifie « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

Volume

« A a même contenance que B » signifie « A se transvase exactement dans B » ("sont superposables")

Avoir la même...

Longueur

« Deux surfaces A et B ont même aire » signifie « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

Aire

« Deux surfaces A et B ont même aire » signifie « A et B sont superposables » (éventuellement après découpage et recollement des morceaux)

Volume

« A a même contenance que B » signifie « A se transvase exactement dans B » ("sont superposables")

et cætera en dimension supérieure...

Distinction et rapprochement

S'il faut comprendre que ces notions sont proches, il est important de les **distinguer** !

Distinction et rapprochement

S'il faut comprendre que ces notions sont proches, il est important de les **distinguer** !

Constat : confusion profonde entre longueur et aires

Des facteurs de confusion

- Les unités d'aire (cm^2, m^2) rappellent celles du périmètre
- Les méthodes de changement d'unités sont souvent très proches (e.g. tableaux de conversion)
- Il n'existe pas d'instrument qui permettent de mesurer directement des aires contrairement au périmètre. On est obligé de déterminer des dimensions de type longueurs
- Une surface est caractérisée par son contour, une ligne

Des facteurs de confusion

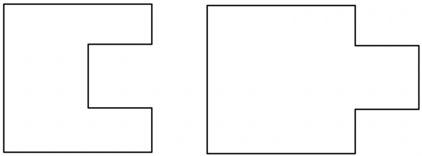
- Les unités d'aire (cm^2, m^2) rappellent celles du périmètre
- Les méthodes de changement d'unités sont souvent très proches (e.g. tableaux de conversion)
- Il n'existe pas d'instrument qui permettent de mesurer directement des aires contrairement au périmètre. On est obligé de déterminer des dimensions de type longueurs
- Une surface est caractérisée par son contour, une ligne

Deux aspects de l'aire

- l'aspect **unidimensionnel** : comparer des aires par pavage, par recoupage, recollement (comptage)
- L'aspect **bidimensionnel** : calculer des aires en effectuant des produits de **longueurs**

Question

Quelle figure a le plus grand périmètre ?



Face aux deux figures ci-contre, la plupart des personnes interrogées considèrent que celle de droite a un périmètre supérieur à celui de la figure de gauche.
Ce qui est faux (les deux périmètres sont égaux).

Question

La figure de gauche est perçue comme un grand carré **amputé** d'un petit carré, alors que celle de droite est perçue comme un grand carré **augmenté** d'un petit. Ce qui est exact en terme de décomposition et recomposition

Question

La figure de gauche est perçue comme un grand carré **amputé** d'un petit carré, alors que celle de droite est perçue comme un grand carré **augmenté** d'un petit. Ce qui est exact en terme de décomposition et recomposition

Ce qui est erroné, c'est le mouvement de pensée qui traduit cette **perception** en **opération** (soustraction ou addition) sur les deux grandeurs périmètre et aire. Car il est vrai qu'à l'addition perceptive des deux formes correspond l'addition des aires mais il n'en est **pas** de même au niveau des périmètres.

Ces logiques/intuitions sont à **déconstruire**

Fausses conceptions

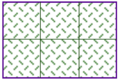
Deux figures peuvent avoir même périmètre mais aires différentes

Exemple ?

Fausses conceptions

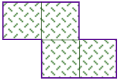
Deux figures peuvent avoir même périmètre mais aires différentes

Exemple ?



p = 10 (cm)

a = 6 (cm^2)



p = 10 (cm)

a = (4 cm^2)

Fausses conceptions

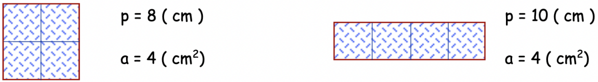
Deux figures peuvent avoir même aire mais périmètres différents

Exemple ?

Fausses conceptions

Deux figures peuvent avoir même aire mais périmètres différents

Exemple ?



Fausses conceptions

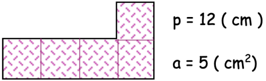
Des figures différentes peuvent avoir même périmètre et même aire

Exemple ?

Fausses conceptions

Des figures différentes peuvent avoir même périmètre et même aire

Exemple ?



Vers les formules

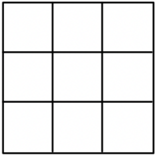
Formules "immédiate"

Rien n'est immédiat, c'est l'**illusion** de transparence (Chevallard)

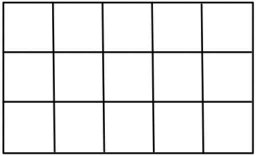
Formules "immédiate"

Rien n'est immédiat, c'est l'**illusion** de transparence (Chevallard)

Sens de la multiplication

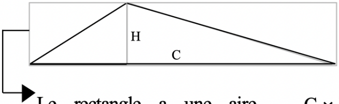


3 rangées de 3 carrés

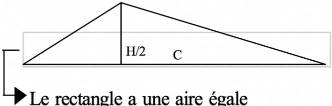


3 rangées de 5 carrés

Formules à construire, décomposer/recomposer



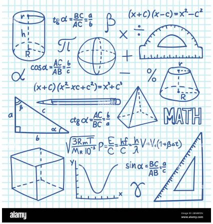
Le rectangle a une aire double de celle du triangle. d'où $\frac{C \times H}{2}$



Le rectangle a une aire égale à celle du triangle. d'o $C \times \frac{H}{2}$

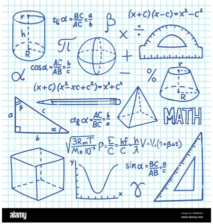
Sur les formules

Les connaissances scolaires sur les aires et les volume ont souvent été réduites à l'apprentissage et l'usage de **formules**



Sur les formules

Les connaissances scolaires sur les aires et les volume ont souvent été réduites à l'apprentissage et l'usage de **formules**

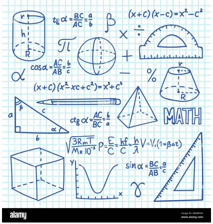


Problèmes

- donne une prépondérance au calcul et à la mesure
- priver l'intuition de moyens de preuve géométrique

Sur les formules

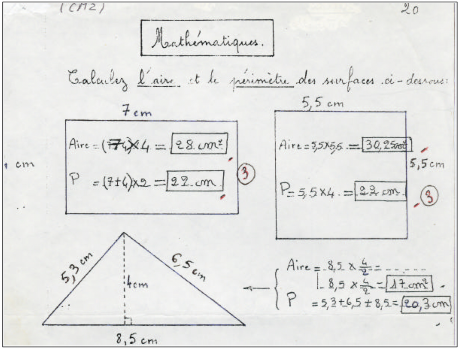
Les connaissances scolaires sur les aires et les volume ont souvent été réduites à l'apprentissage et l'usage de **formules**



Problèmes

- donne une prépondérance au calcul et à la mesure
- priver l'intuition de moyens de preuve géométrique

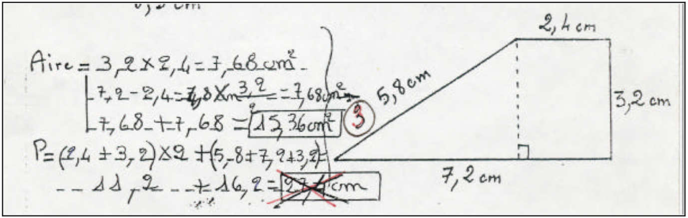
Fondamental : utiliser les grandeurs sans les réduire aux mesures



La maîtrise des formules semble bonne

Formules – production d'élèves

Suite de son travail :



Remarque :

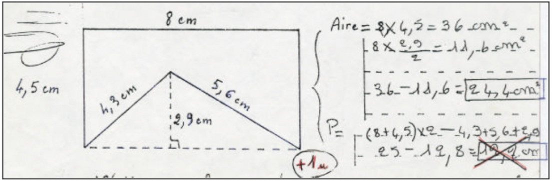
Face à une figure composée et pensée comme l'adjonction d'un rectangle et d'un triangle, le mode de calcul apparaît comme étant du type :

Aire totale = aire du rectangle + aire du triangle

Périmètre total = périmètre du rectangle + périmètre du triangle.

Formules – production d'élèves

La dernière partie de son travail est encore plus exemplaire :



Remarque :
Ici la figure est pensée comme étant celle d'un rectangle amputé d'un triangle.
Le mode de calcul du périmètre, que nous reproduisons, mérite d'être analysé.

Traduction opératoire de l'amputation perceptive

P = (8 + 4,5) x2 – 4,3 + 5,6 + 2,9

25 – 12,8 = 12,2 cm

Somme des éléments caractéristiques de l'amputation. (Il s'agit bien d'une somme ainsi que le prouve le 12,8 de la ligne suivante). Le 2,9 qui ne correspond pas au périmètre du triangle, représente la profondeur, l'importance de l'amputation.

On voit ici à nu **le mouvement de pensée qui traduit la perception en opération.**

Sur les formules

Utilité des formules

- calculer aires et volumes, **mais pas seulement**
- conceptualisation de l'aspect multidimensionnel (produit)
- compréhension des effets d'agrandissement et réduction
- questions de recherche : explorer, conjecturer, prouver ou infirmer
- vers le calcul formel

Raisonnements géométriques

Égalité d'aires

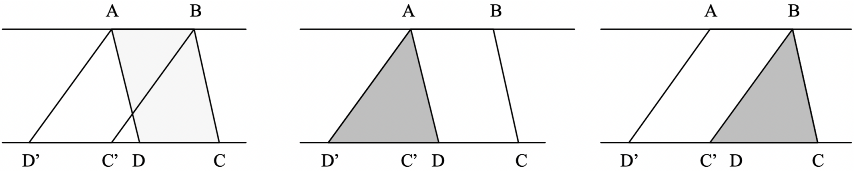
Euclide ne définit pas l'aire, mais l'**égalité d'aires**

Un premier théorème énonce : "des parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont d'aires égales

Égalité d'aires

Euclide ne définit pas l'aire, mais l'**égalité d'aires**

Un premier théorème énonce : “des parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont d'aires égales

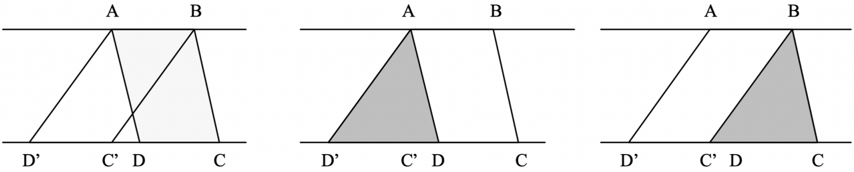


Il s'agit donc de montrer que les parallélogrammes ABCD et ABC'D' ont même aire

Égalité d'aires

Euclide ne définit pas l'aire, mais l'**égalité d'aires**

Un premier théorème énonce : "des parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont d'aires égales



Il s'agit donc de montrer que les parallélogrammes ABCD et ABC'D' ont même aire

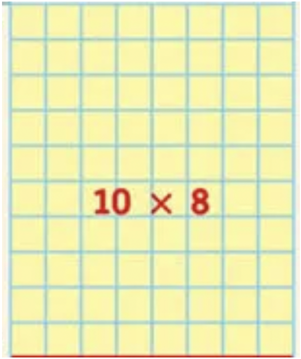
Preuves "mécaniques" : **découpages et déplacements**

Aire d'un rectangle

Sens même de la multiplication (géométrique)

Aire d'un rectangle

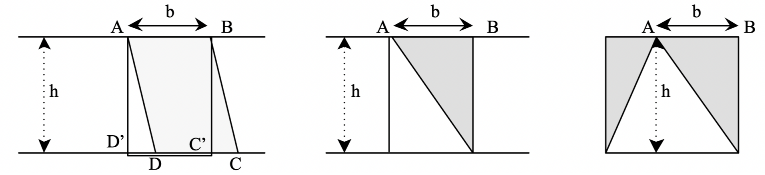
Sens même de la multiplication (géométrique)



C'est la **référence fondamentale** !

D'autres aires

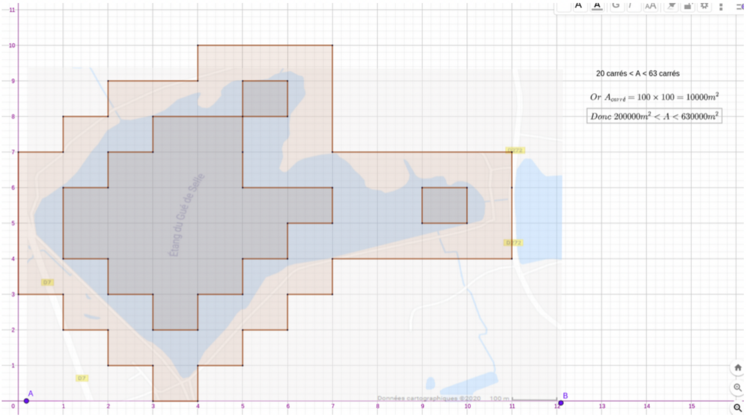
À partir de l'aire du rectangle, on peut en déduire celles du parallélogramme et des triangles rectangles ou quelconques



Et les surfaces de la vie courante ?

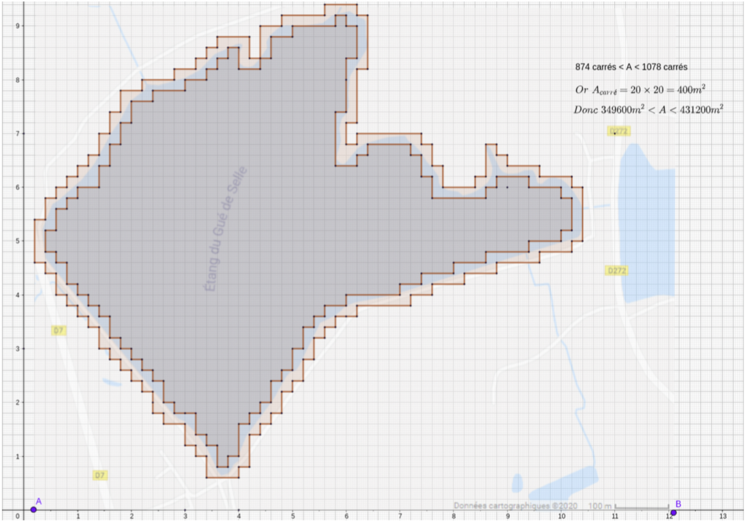
Aire d'un étang

Aire d'un étang



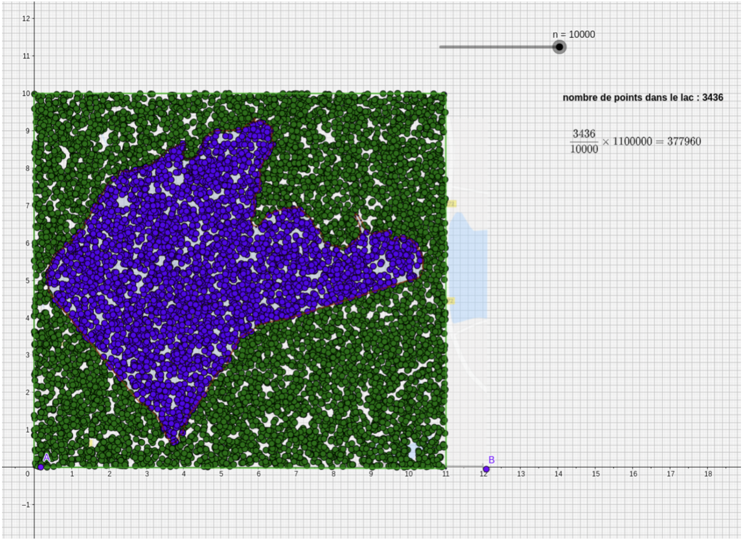
Et les surfaces de la vie courante ?

Aire d'un étang



Et les surfaces de la vie courante ?

Aire d'un étang



Changements d'échelle

Attention : changement d'échelle

Changements d’échelle

Attention : changement d’échelle

- les longueurs évoluent proportionnellement
- les **aires** par le **carré** (quadratiquement)
- les **volumes** par les **cubes** (cubiquement)

Preuve ?

Attention : changement d'échelle

- les longueurs évoluent proportionnellement
- les **aires** par le **carré** (quadratiquement)
- les **volumes** par les **cubes** (cubiquement)

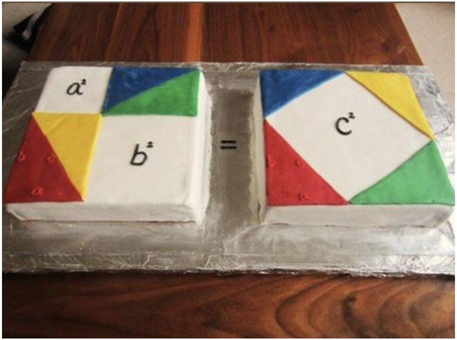
Preuve ?

Le comprendre sur un triangle, un rectangle, un cube...

... puis découper/approcher pour les autres

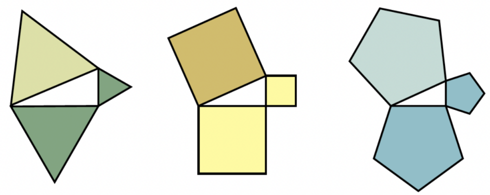
Pythagore et aires

Le rapport entre les carrés est... un rapport entre les aires !



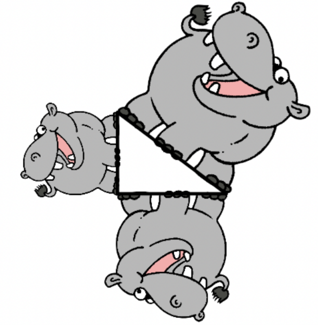
Pythagore et aires

Le rapport entre les carrés est... un rapport entre les aires !



Pythagore et aires

Le rapport entre les carrés est... un rapport entre les aires !



Aires comme outils de démonstration

Les aires sont un outil de démonstration puissant !

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

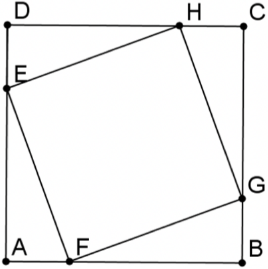
Preuve ?

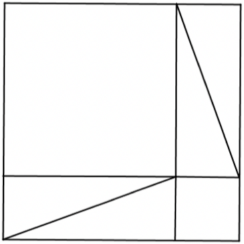
Aires comme outils de démonstration

Les aires sont un outil de démonstration puissant !

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Preuve ?





Deux exercices

Prouvez les propriétés suivantes :

- $(-1) \times (-1) = 1$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Deux exercices

Prouvez les propriétés suivantes :

- $(-1) \times (-1) = 1$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

... avec des aires !

Volume

Volumes

Au primaire : première approche seulement

Méthode : comparaison par **transvasement** de liquides

Volumes

Au primaire : première approche seulement

Méthode : comparaison par **transvasement** de liquides

Unités : litre, multiples et sous-multiples

Les unités "en cube" et les formules sont vues au collège

Volumes

Au primaire : première approche seulement

Méthode : comparaison par **transvasement** de liquides

Unités : litre, multiples et sous-multiples

Les unités "en cube" et les formules sont vues au collège

Toutefois les difficultés non résolues dans la compréhension de la grandeur "aire" et les lacunes dans la distinction aire/longueur se reproduiront naturellement avec les volumes !

Volumes

Transvasement

Merci !

Des questions ?