Résolution de problèmes

Les mathématiques comme une exploration

Didier Lesesvre

Aperçu

Objectif

- comprendre ce qu'est un **problème**
- la richesse de la **mise en oeuvre**
- constituer un **catalogue** de problèmes

Aperçu

Objectif

- comprendre ce qu'est un **problème**
- la richesse de la **mise en oeuvre**
- constituer un **catalogue** de problèmes

Plan

- Quelques exemples
- Qu'est-ce qu'un problème ?
- Compétences travaillées
- Cadre institutionnel
- Problèmes en une étape
- Problèmes atypiques
- Démarche de résolution de problème

Mise en jambe

Wooclap

Allez sur `www.wooclap.com/MQSLRX`

Un petit problème pour commencer

Une raquette et une balle de tennis coûtent 1€10

La raquette coûte 1€ de plus que la balle

Combien coûte la raquette ?

Un petit problème pour commencer

Une raquette et une balle de tennis coûtent 1€10

La raquette coûte 1€ de plus que la balle

Combien coûte la raquette ?

La raquette coûte **1€05** et la balle coûte **5cts** (et pas 1€ et 10cts !)

Et les élèves ?

Exemple de l'enquête internationale TIMSS

Et les élèves ?

Exemple de l'enquête internationale TIMSS

Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zeds.

Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.

Julien a 4 zeds.

Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?

Et les élèves ?

Exemple de l'enquête internationale TIMSS

Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zeds.

Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.

Julien a 4 zeds.

Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?

(A. 1,06 zeds (B). 1,16 zeds C. 5,06 zeds D. 5,16 zeds)

Et les élèves ?

Taux de réussite à TIMSS CM1

- France : 42%
- Union européenne : 62%
- Singapour : 79%

Encore un problème

Le problème qui déchire

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.

Imaginons : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Puis-je arriver à 2022 morceaux de papiers ? en combien de fois ?

Quelles procédures et quels résultats ?

Une petite expérience

Une petite expérience

Trois questions… reliées ?

Une petite expérience

Trois questions… reliées ?

Il y a une grande **réflexion sur le moins** à avoir !

Qu'est-ce qu'un problème ?

Qu'est-ce qu'un problème ?

"Il y a problème dès qu'il y a réellement **quelque chose à chercher**, que ce soit au niveau des données ou du traitement et qu'il n'est pas possible de mettre en jeu la mémoire seule." (ERMEL)

Qu'est-ce qu'un problème ?

"Il y a problème dès qu'il y a réellement **quelque chose à chercher**, que ce soit au niveau des données ou du traitement et qu'il n'est pas possible de mettre en jeu la mémoire seule." (ERMEL)

"Est un problème, pour un élève donné, toute situation (réelle ou imaginaire) dans laquelle des questions sont posées, ces questions étant telles que l'élève ne peut y répondre **de manière immédiate**." (Pernoud)

Qu'est-ce qu'un problème ?

"Il y a problème dès qu'il y a réellement **quelque chose à chercher**, que ce soit au niveau des données ou du traitement et qu'il n'est pas possible de mettre en jeu la mémoire seule." (ERMEL)

"Est un problème, pour un élève donné, toute situation (réelle ou imaginaire) dans laquelle des questions sont posées, ces questions étant telles que l'élève ne peut y répondre **de manière immédiate**." (Pernoud)

"Il y a problème lorsqu'on peut apporter des réponses par des **raisonnements**. Il faut qu'il y ait quelque chose à chercher et qu'il ne soit pas possible d'utiliser la mémoire seule." (Brousseau)

Qu'est-ce qu'un problème ?

"Il y a problème dès qu'il y a réellement **quelque chose à chercher**, que ce soit au niveau des données ou du traitement et qu'il n'est pas possible de mettre en jeu la mémoire seule." (ERMEL)

"Est un problème, pour un élève donné, toute situation (réelle ou imaginaire) dans laquelle des questions sont posées, ces questions étant telles que l'élève ne peut y répondre **de manière immédiate**." (Pernoud)

"Il y a problème lorsqu'on peut apporter des réponses par des **raisonnements**. Il faut qu'il y ait quelque chose à chercher et qu'il ne soit pas possible d'utiliser la mémoire seule." (Brousseau)

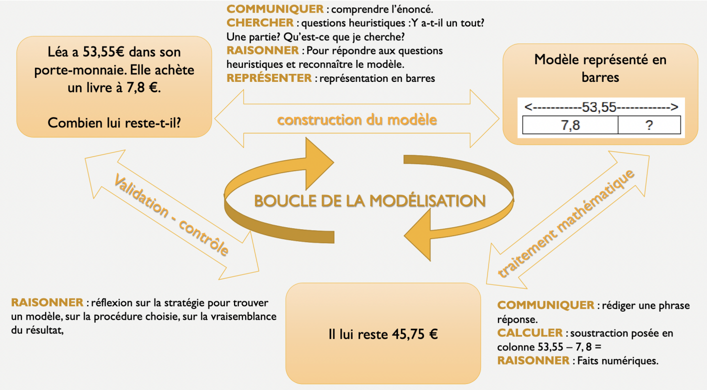
En un mot : la réponse n'est pas immédiate ou mécanique

Résolution d'un problème

Aspect fondamental des problèmes : la **modélisation**

Résolution d’un problème

Aspect fondamental des problèmes : la modélisation



Constructivisme de Brousseau

En fait, l'apprentissage par le biais de problème vient de la **théorie des situations didactiques** de Brousseau et illustre une conception **constructiviste** des apprentissages et de l'enseignement.

Constructivisme de Brousseau

En fait, l'apprentissage par le biais de problème vient de la **théorie des situations didactiques** de Brousseau et illustre une conception constructiviste des apprentissages et de l'enseignement.

Attention : pas de parole d'évangile ou de solution parfaite

Compétences travaillées

Intérêt des problèmes

Enrichir les notions/concepts/opérations : donner du sens, des références, de l'expérience

Dans le contexte sociétal actuel, les citoyens ont de plus en plus besoin de **compétences d'analyse et de raisonnement** pour la résolution de situations et de tâches complexes.

Intérêt des problèmes

Enrichir les notions/concepts/opérations : donner du sens, des références, de l'expérience

Dans le contexte sociétal actuel, les citoyens ont de plus en plus besoin de **compétences d'analyse et de raisonnement** pour la résolution de situations et de tâches complexes.

Les grandes compétences des programmes

- Communiquer
- Chercher
- Représenter
- Moséliser
- Calculer
- Raisonner

Communiquer

Communiquer

- Travailler sur la langue, **énoncés** complexes
- **Verbaliser** l'oral, les représentations, les calculs
- Avancer vers des **explications** de phénomènes (pré-algébriques)

Communiquer

- Travailler sur la langue, **énoncés** complexes
- **Verbaliser** l'oral, les représentations, les calculs
- Avancer vers des **explications** de phénomènes (pré-algébriques)

Points de vigilance

- Difficultés linguistiques
- Varier les présentations de l'énoncé (isomorphismes)
- Différentes présentation du problème
- Mots inducteurs : plus que, moins que, gagner, etc.
- Perturbations liées aux dessins

Communiquer

Lexique de mots inducteurs

Contexte	Transformation positive	Transformation négative
Collection	gagner, ajouter, mettre, recevoir, ramasser	perdre, enlever, prendre, donner, distribuer
Achat, cadeau	gagner, recevoir, acheter	dépenser, offrir, vendre
Prix, mesures, croissance	augmenter, allonger, agrandir, grandir, grossir	diminuer, raccourcir, réduire, rapetisser, maigrir
Piste de jeu, bande numérique	avancer	reculer
Bus, train, parking	monter, entrer	descendre, sortir

Comparaison positive	Comparaison négative
de plus que, en plus	de moins que, en moins

Combinaison
partie/ tout

Des énoncés… très différents ?

- *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*
- *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*
- *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

- Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?

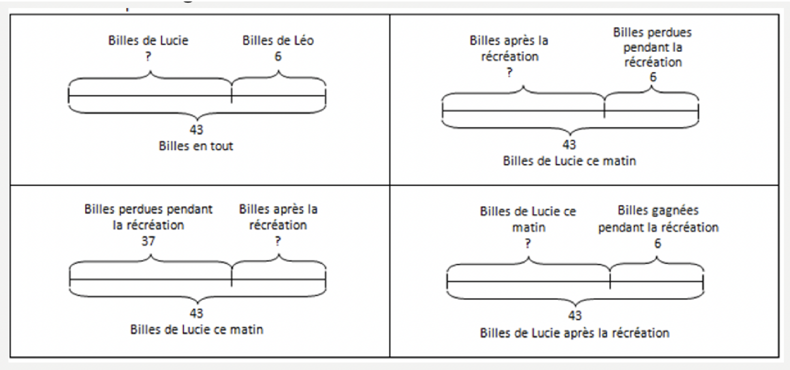
Des énoncés... très différents ?

- *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*
- *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*
- *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

- Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?

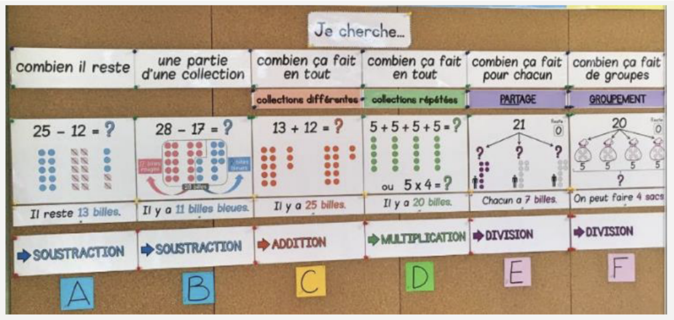
Rappelez-vous de la classification des problèmes additifs de **Vergnaud**

Des modèles généraux à dégager



Ce sont des représentations par **diagrammes de longueurs**

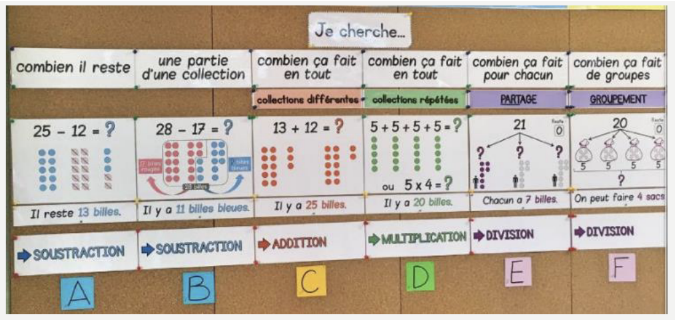
Institutionaliser (schémas, modèles, analogies, etc.)



Les **procédures de résolution** se systématisent

Traces communes

Institutionaliser (schémas, modèles, analogies, etc.)



Les **procédures de résolution** se systématisent

Les **structures mathématiques** sous-jacentes se dégagent

Multiprésentations (Nguala, 2005)

Proposer simultanément 3 problèmes ayant les mêmes caractéristiques, la même structure mathématique, les mêmes nombres, la même syntaxe, la même organisation énonciative, seuls les contextes varient... "mêmes" problèmes ?

Multiprésentations (Nguala, 2005)

Proposer simultanément 3 problèmes ayant les mêmes caractéristiques, la même structure mathématique, les mêmes nombres, la même syntaxe, la même organisation énonciative, seuls les contextes varient... "mêmes" problèmes ?

Mêler trois grands cadres

- univers de l'élève
- vie de la classe
- vie courante

Multiprésentations (Nguala, 2005)

On pèse ensemble **un paquet de riz et 3 boîtes de raviolis** identiques : la balance indique **2785 g**. Le paquet de riz pèse **520 g**.
Combien pèse une boîte de raviolis ?

On met bout à bout **une baguette bleue et 3 baguettes rouges** identiques : la longueur totale des quatre baguettes est **2785 mm**. La baguette bleue mesure **520 mm**.
Quelle est la longueur d'une baguette rouge ?

La mairie a acheté **une bibliothèque et 3 armoires** identiques pour l'école : le prix total des quatre meubles est de **2785 €**. La bibliothèque coûte **520 €**.
Quel est le prix d'une armoire ?

Chercher

Chercher

- Reconnaître un **modèle**, choisir une représentation
- Donner du **sens** aux opérations
- Essayer, **manipuler**, utiliser sa liberté
- Rester conscient de l'**objectif**, de la question

Représenter

Représenter

- Préciser quelques représentations **attendues** des élèves
- **Argumentation** pour inciter à ces représentations

Représenter

- Préciser quelques représentations **attendues** des élèves
- **Argumentation** pour inciter à ces représentations

Progressivité dans les représentations

- verbale (mots)
- concrète (objets réels, représentatifs)
- imagée (schémas, dessins)
- abstraite (chiffres, symboles)

Modéliser

- Reconnaître les **relations** entre les données de l'énoncé
- demander les **justifications** de la modélisation
- **Confronter** au réel

Calculer

- **Traitement mathématique** du modèle
- "On pose son cerveau"
- Le problème motive le calcul, lui donne du sens
- Le calcul permet de résoudre le "problème" (modélisé)

Calculer

- **Traitement mathématique** du modèle
- "On pose son cerveau"
- Le problème motive le calcul, lui donne du sens
- Le calcul permet de résoudre le "problème" (modélisé)

Points de vigilance

- Le calcul peut déjà être un problème, un obstacle
- Variables didactiques importantes
- Différentes procédures possibles

Raisonner

Raisonner

- Retour **réflexif** : valider, contrôler, confronter à la réalité
- Rédiger une réponse, **conclure**, revenir au sens initial
- Situation de mise en commun : argumenter en faveur de son résultat (confrontation), intuition, pertinence, etc.

Démarche aussi **essentielle** en physique, en biologie, en sciences !

Mise en œuvre

Étapes de mise en œuvre

Mise en oeuvre

Points importants

- encourager la **mise en recherche** (s'y mettre)
- **relancer** le travail des élèves bloqués (s'y remettre)
- inviter des élèves à utiliser les **ressources** à leur disposition
- demander à des élèves ne trouvant pas la même chose de **comparer** leurs résultats et leurs procédures, discuter
- accompagner les élèves ayant des **besoins spécifiques**

Importance des problèmes

Renforcer la pratique des problèmes

- privilégier un contexte familier
- faire raconter l'histoire du problème
- faire créer des problèmes
- guider les élèves dans les étapes de résolution
- pratiquer en autonomie (**2 problèmes par jour**)
- faire verbaliser et structurer les connaissances et procédures

Le cadre institutionnel

Que veulent les programmes ?

Dans les programmes

La résolution de problèmes est devenue **centrale**

"La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens " (Programmes Cycle 3)

Pourquoi les problèmes ?

"Les éducateurs, les gouvernements, les employeurs et les chercheurs mettent systématiquement en avant la résolution de problèmes lorsqu'ils évoquent les compétences du XXIe e siècle.

En effet, dans le contexte sociétal actuel, les citoyens ont de plus en plus besoin de compétences d'analyse et de raisonnement pour la résolution de situations et de tâches complexes." (Guide violet)

Compétences à développer

- connaissances mathématiques
- mémoire de problèmes similaires
- compétences et aptitudes diverses
- raisonnement, communication, autonomie

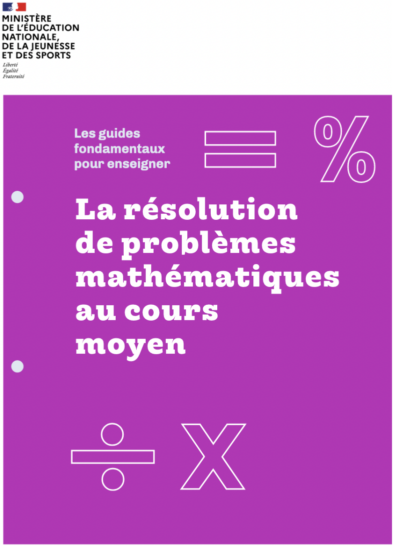
Situation-problème

Qu’est-ce qu’une situation de "problème" ?

Introduire une notion de **discontinuité** dans l’habitude de l’élève.

« Traiter un problème c’est élaborer une procédure, une stratégie, inventer » (J.-M. Hoc, *Psychologie cognitive*)

Le guide violet



Trois catégories du guide violet

Classification en **trois catégories**

- problèmes en **une étape**
- problèmes **complexes** (en plusieurs étapes)
- problèmes **atypiques** (sans procédure accessible)

Les trois domaines

Les problèmes sont pertinents dans **tous les domaines**

- nombres et calculs
- grandeurs et mesures
- espace et géométrie

Ils mobilisent également d'autres domaines transverses

- organisation de données
- numérique

Types de problèmes

Progression notionnelle

- situation-problème : introduction de nouvelles connaissances
- problème scolaire : application, réinvestissements
- problèmes complexes : plusieurs catégories de connaissances
- problèmes ouverts : pas de méthode systématique, exploration

Types de problèmes

Progression notionnelle

- situation-problème : introduction de nouvelles connaissances
- problème scolaire : application, réinvestissements
- problèmes complexes : plusieurs catégories de connaissances
- problèmes ouverts : pas de méthode systématique, exploration

Plus on résout de problèmes, plus on sait en résoudre

Problèmes et vie quotidienne

Problèmes et vie quotidienne

Les problèmes "ouverts" sont omniprésents

- faire des emplois du temps
- décider du parcours d'un livreur
- remplir optimalement un sac à dos
- séquence des tâches d'une chaîne de production
- jeux (Sudoku, Tetris, Mastermind, Démineur, etc.)

Différenciation

On peut utiliser des variations du problème (consignes, matériel, domaine numérique, etc.), en gardant la même structure mathématique (problèmes **isomorphes**)

Différenciation

On peut utiliser des variations du problème (consignes, matériel, domaine numérique, etc.), en gardant la même structure mathématique (problèmes **isomorphes**)

Il faut s'interroger pour savoir si les variations proposées sont :

- vraiment **nécessaires** : l'élève échouera-t-il forcément lors de la résolution du problème sans ces variations ?
- vraiment **utiles** : les variations permettent-elles d'aider l'élève à traiter le problème ?
- vraiment **pertinentes** : ces variations ne nuisent-elles pas au développement des apprentissages visés par le problème initial ?

Institutionalisation

Doit-on avoir des **leçons sur la résolution de problèmes** dans le cahier de référence (cahier de leçons) de mathématiques ?

Institutionalisation

Doit-on avoir des **leçons sur la résolution de problèmes** dans le cahier de référence (cahier de leçons) de mathématiques ?

Oui. Les temps d'institutionnalisation en classe permettent de faire le point sur ce qui a été appris au cours de la séance, mais aussi pendant la séquence. Ce savoir devient alors un savoir de référence qui pourra être réutilisé ultérieurement.

Progressions

"Les apprentissages relatifs à la résolution de problèmes ne se construisent pas en une année ni même en un cycle, mais **tout au long de la scolarité** obligatoire. Les stratégies d'enseignement mises en œuvre doivent donc être collectives afin que les élèves puissent s'appuyer chaque année sur ce qui a été appris les années précédentes. Ceci est particulièrement vrai pour les schémas enseignés pour soutenir la modélisation.

Les séances d'enseignement de résolution de problèmes doivent être inscrites dans des séquences aux objectifs clairement définis et explicités aux élèves. Pendant ces séances, les élèves doivent disposer de temps suffisants pour résoudre eux-mêmes les problèmes qui leur sont proposés. Il faut veiller à soutenir, de façon appropriée et au moment opportun, chaque élève rencontrant une difficulté qu'il ne peut pas surmonter lui-même." (Guide violet)

Évaluations

"L'évaluation doit être utilisée pour soutenir les apprentissages. Elle permet à l'enseignant de renforcer sa connaissance de ce que sait faire chacun des élèves à un instant donné et aide les élèves à structurer et renforcer leurs apprentissages comme le montrent les sciences cognitives." (Guide violet)

Problèmes en une étape

Problèmes partie-tout

Deux parties distinctes (parfois plus) forment ensemble un tout

Les parties peuvent être

- statiques (billes rouges/billes bleues)
- dynamiques dans le cadre d'une transformation (billes gagnées ou perdues/billes restantes)

Problèmes partie-tout

Deux parties distinctes (parfois plus) forment ensemble un tout

Les parties peuvent être

- statiques (billes rouges/billes bleues)
- dynamiques dans le cadre d'une transformation (billes gagnées ou perdues/billes restantes)

Exemples

1. « Une pastèque et un ananas pèsent ensemble 3,350 kg. La pastèque pèse 2,850 kg. Quelle est la masse de l'ananas ? »

Problèmes partie-tout

Deux parties distinctes (parfois plus) forment ensemble un tout

Les parties peuvent être

- statiques (billes rouges/billes bleues)
- dynamiques dans le cadre d'une transformation (billes gagnées ou perdues/billes restantes)

Exemples

1. « Une pastèque et un ananas pèsent ensemble 3,350 kg. La pastèque pèse 2,850 kg. Quelle est la masse de l'ananas ? »

2. « Une bouteille contient 0,5 L d'eau. On ajoute un quart de litre d'eau dans la bouteille. Quel volume d'eau la bouteille contient-elle maintenant ? »

Problèmes partie-tout

Deux parties distinctes (parfois plus) forment ensemble un tout

Les parties peuvent être

- statiques (billes rouges/billes bleues)
- dynamiques dans le cadre d'une transformation (billes gagnées ou perdues/billes restantes)

Exemples

1. « Une pastèque et un ananas pèsent ensemble 3,350 kg. La pastèque pèse 2,850 kg. Quelle est la masse de l'ananas ? »

2. « Une bouteille contient 0,5 L d'eau. On ajoute un quart de litre d'eau dans la bouteille. Quel volume d'eau la bouteille contient-elle maintenant ? »

Particulièrement adaptés aux diagrammes en barre

Problèmes de comparaison

« Une bouteille contient 0,75L d'eau. Un verre contient un demi-litre d'eau de moins que la bouteille. Quel volume d'eau le verre contient-il ? »

Problèmes multiplicatifs

Mise en jeu de **trois données numériques**, deux étant connues

- le **nombre de parts**, le nombre de fois où la grandeur apparaît
- la **valeur d'une part**, la mesure de la grandeur qui apparaît (quantité, longueur, masse, volume, etc.) et qui est répétée
- la **valeur totale**

Problèmes multiplicatifs

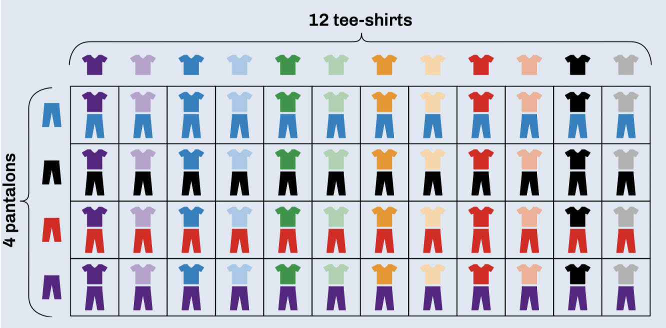
Mise en jeu de **trois données numériques**, deux étant connues

- le **nombre de parts**, le nombre de fois où la grandeur apparaît
- la **valeur d'une part**, la mesure de la grandeur qui apparaît (quantité, longueur, masse, volume, etc.) et qui est répétée
- la **valeur totale**

Il est important de travailler à la fois des problèmes

- **division-partition**, recherche de la valeur d'une part
- **division-quotition**, recherche du nombre de parts

Produits cartésiens



Combien de tenues possibles ?

Problème en plusieurs étapes

"Les problèmes en plusieurs étapes sont les problèmes verbaux à données numériques nécessitant plusieurs calculs successifs (chaque calcul correspondant à une étape) pour obtenir le résultat cherché."

Problème en plusieurs étapes

"Les problèmes en plusieurs étapes sont les problèmes verbaux à données numériques nécessitant plusieurs calculs successifs (chaque calcul correspondant à une étape) pour obtenir le résultat cherché."

Compétences nécessaires

- bien comprendre les relations entre les données de l'énoncé et ce qui est recherché
- organiser les différents calculs à mener
- réaliser les calculs retenus
- interpréter le résultat

Problème en plusieurs étapes

"Les problèmes en plusieurs étapes sont les problèmes verbaux à données numériques nécessitant plusieurs calculs successifs (chaque calcul correspondant à une étape) pour obtenir le résultat cherché."

Compétences nécessaires

- bien comprendre les relations entre les données de l'énoncé et ce qui est recherché
- organiser les différents calculs à mener
- réaliser les calculs retenus
- interpréter le résultat

"Les problèmes en plusieurs étapes sont un **objectif majeur** de l'enseignement de la résolution de problèmes verbaux à données numériques au cours moyen. Ils permettent de mieux s'assurer d'une compréhension satisfaisante par les élèves du sens des quatre opérations rencontrées à l'école élémentaire." (Guide violet)

Problèmes atypiques

Problèmes atypiques

"Outre les notions mathématiques en jeu, la résolution des problèmes atypiques doit permettre aux élèves de développer des compétences transversales, comme

- l'autonomie
- la prise de décisions
- la créativité

qui leur seront utiles pour la suite de la scolarité et dans leur vie."

Problèmes atypiques

Quatre familles de problèmes atypiques

- problèmes **algébriques**
- problèmes de **dénombrement**
- problèmes **algorithmiques**
- problèmes **d'optimisation**

Problèmes algébriques

Un problème mathématique de cours moyen est considéré comme **algébrique** s'il peut être traité au cycle 4 par l'écriture et la résolution d'une ou de plusieurs équations

Problèmes algébriques

Un problème mathématique de cours moyen est considéré comme **algébrique** s'il peut être traité au cycle 4 par l'écriture et la résolution d'une ou de plusieurs équations

Exemple

« Dans un paquet de billes rouges, vertes ou bleues, il y a 162 billes. Il y a trois fois plus de billes rouges que de billes vertes et il y a 7 billes vertes de moins que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes rouges ? »

Problèmes algébriques

Un problème mathématique de cours moyen est considéré comme **algébrique** s'il peut être traité au cycle 4 par l'écriture et la résolution d'une ou de plusieurs équations

Exemple

« Dans un paquet de billes rouges, vertes ou bleues, il y a 162 billes. Il y a trois fois plus de billes rouges que de billes vertes et il y a 7 billes vertes de moins que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes rouges ? »

Résolution algébrique

Au cycle 4, ce problème peut être traité en désignant par v le nombre de billes vertes. On en déduit qu'il y a $3v$ billes rouges et $v + 7$ billes bleues et on obtient l'équation à résoudre :

$$v + 3v + (v + 7) = 162$$

Quelles procédures ?

Procédures pour les problèmes algébriques

- essais et erreurs
- représentations (pré-algébrisation)
- raisonnement

Problèmes de dénombrement

Objectif : déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble

Résolution non immédiate par l'une des quatre opérations et qui, dans le second degré, pourront être résolus en mobilisant de nouvelles notions mathématiques (**combinaisons, arrangements, etc.**).

Pour résoudre ces problèmes à l'école élémentaire, il va falloir trouver un moyen d'**organiser les éléments** de l'ensemble

Problèmes de dénombrement

Objectif : déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble

Résolution non immédiate par l'une des quatre opérations et qui, dans le second degré, pourront être résolus en mobilisant de nouvelles notions mathématiques (**combinaisons, arrangements, etc.**).

Pour résoudre ces problèmes à l'école élémentaire, il va falloir trouver un moyen d'**organiser les éléments** de l'ensemble

Exemple

« Combien peux-tu écrire de nombres à deux chiffres en utilisant uniquement les chiffres 2, 3, 4 et 5 ? Le même chiffre ne peut être utilisé qu'une fois. »

Quelles procédures ?

Procédures pour les problèmes de dénombrement

- arbres
- tableaux
- raisonnement

Objectif : rechercher des cas vérifiant certaines conditions

Il faut ainsi **balayer tous les cas possibles** (force brute) et tester, pour chacun de ces cas, s'il vérifie ou non les conditions attendues. Un raisonnement en amont ou en parallèle des calculs peut parfois permettre de restreindre les cas à tester.

Dans le second degré, on pourrait coder un programme

Problèmes pré-algorithmiques

Objectif : rechercher des cas vérifiant certaines conditions

Il faut ainsi **balayer tous les cas possibles** (force brute) et tester, pour chacun de ces cas, s'il vérifie ou non les conditions attendues. Un raisonnement en amont ou en parallèle des calculs peut parfois permettre de restreindre les cas à tester.

Dans le second degré, on pourrait coder un programme

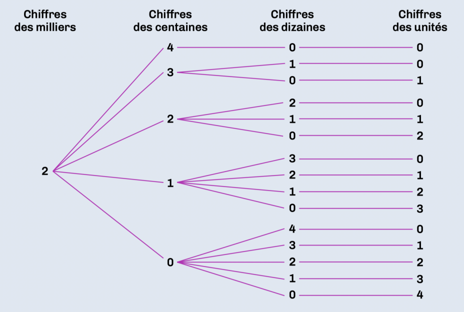
Exemple

« Un rectangle a ses côtés qui ont pour longueur des nombres entiers de centimètres. Son aire est de 100cm^2. Trouve toutes les dimensions possibles pour ce rectangle. »

Quelles procédures ?

« La somme des chiffres de l'année 2022 est 6.

Trouve toutes les années entre l'an 2000 et l'an 3000 qui ont une somme de leurs chiffres égale à 6. »



Problème d'optimisation

Objectif : trouver la **meilleure solution** sous certaines contraintes

Dans le second degré, de telles questions pourraient se traiter en étudiant des suites ou des fonctions

Problème d'optimisation

Objectif : trouver la **meilleure solution** sous certaines contraintes

Dans le second degré, de telles questions pourraient se traiter en étudiant des suites ou des fonctions

Exemple

« Parmi les rectangles qui ont leurs côtés mesurant un nombre entier de centimètres et dont le périmètre est 20 cm, détermine celui qui a la plus grande aire. »

Consignes

Le choix de formulation, de présentation, d’appréhension du problème peut rendre quelque chose de simple problématique

Consignes

Le choix de formulation, de présentation, d'appréhension du problème peut rendre quelque chose de simple problématique

Exemple

1. « Paul a 7 billes dans sa poche. Il en donne 3 à Jean. Combien lui reste-t-il de billes ? »

2. « Paul a 7 billes, Jean a 3 billes. Combien Jean a t-il de billes de moins que Paul ? »

Consignes

Le choix de formulation, de présentation, d'appréhension du problème peut rendre quelque chose de simple problématique

Exemple

1. « Paul a 7 billes dans sa poche. Il en donne 3 à Jean. Combien lui reste-t-il de billes ? »
2. « Paul a 7 billes, Jean a 3 billes. Combien Jean a t-il de billes de moins que Paul ? »

Résultats

- La majorité des élèves de CP savent résoudre le premier problème (transformation avec recherche de l'état final)
- La majorité des élèves devra attendre le CE2 pour résoudre le second problème qui relève de la comparaison négative

Des méthodes de représentations

Diagrammes et schémas

Les schémas sont souvent indispensables aux élèves pour pouvoir modéliser correctement les problèmes qui leur sont soumis.

Des méthodes de représentations

Diagrammes et schémas

Les schémas sont souvent indispensables aux élèves pour pouvoir modéliser correctement les problèmes qui leur sont soumis.

Quatre types de schémas

- schémas en barres
- déplacements sur une droite
- tableaux
- arbres

Diagrammes et schémas

Les schémas sont souvent indispensables aux élèves pour pouvoir modéliser correctement les problèmes qui leur sont soumis.

Quatre types de schémas

- schémas en barres
- déplacements sur une droite
- tableaux
- arbres

Important : conserver une certaine **cohérence** d'utilisation d'année en année, tout au long de la scolarité obligatoire, afin de permettre aux élèves de garder les mêmes repères et de devenir de plus en plus efficaces en résolution de problèmes.

Problèmes de référence (répertoire de problèmes basiques)

Ils permettront de conduire les activités de catégorisation, de structurer les schématisations, et de construire des traces écrites.

Problèmes et activités de référence

Problèmes de référence (répertoire de problèmes basiques)

Ils permettront de conduire les activités de catégorisation, de structurer les schématisations, et de construire des traces écrites.

Activités spécifiques

Elles seront constituées de problèmes isomorphes, d'activités de manipulations des données, d'activités de création d'énoncés dans l'objectif de structurer la conceptualisation de procédures.

Problèmes et activités de référence

Problèmes de référence (répertoire de problèmes basiques)

Ils permettront de conduire les activités de catégorisation, de structurer les schématisations, et de construire des traces écrites.

Activités spécifiques

Elles seront constituées de problèmes isomorphes, d'activités de manipulations des données, d'activités de création d'énoncés dans l'objectif de structurer la conceptualisation de procédures.

Activités ritualisées (calcul mental, problèmes flash, etc.)

L'objectif est de développer des automatismes afin de faciliter l'accès aux procédures de résolution. Le calcul mental est le domaine privilégié pour permettre aux élèves de s'approprier le sens et les propriétés des opérations.

Résoudre un problème

Résolution de problèmes

Quatre phases fondamentales

- comprendre
- modéliser
- calculer
- répondre

Résolution de problèmes

Quatre phases fondamentales

- comprendre
- modéliser
- calculer
- répondre

(d'après le mathématicien George Pólya)

Quatre phrases fondamentales

Comprendre : l'élève doit comprendre le texte du problème, c'est-à-dire comprendre la situation que raconte le problème

Quatre phrases fondamentales

Comprendre : l'élève doit comprendre le texte du problème, c'est-à-dire comprendre la situation que raconte le problème

Modéliser : l'élève doit traduire la situation comprise, l'histoire qui se situe dans le monde réel, dans un format pertinent sur le plan mathématique, le réduisant à des opérations

Quatre phrases fondamentales

Comprendre : l'élève doit comprendre le texte du problème, c'est-à-dire comprendre la situation que raconte le problème

Modéliser : l'élève doit traduire la situation comprise, l'histoire qui se situe dans le monde réel, dans un format pertinent sur le plan mathématique, le réduisant à des opérations

Calculer : l'élève doit effectuer les calculs ainsi identifiés

Quatre phrases fondamentales

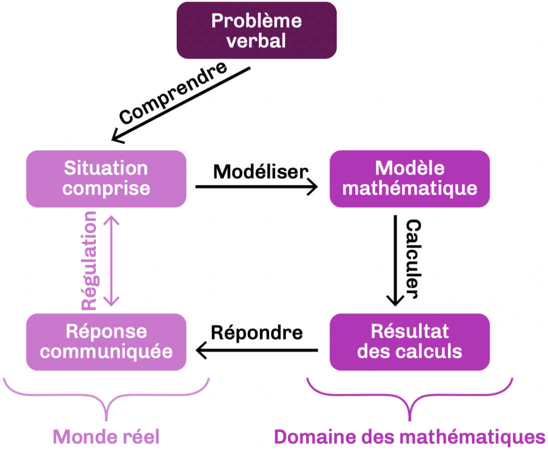
Comprendre : l'élève doit comprendre le texte du problème, c'est-à-dire comprendre la situation que raconte le problème

Modéliser : l'élève doit traduire la situation comprise, l'histoire qui se situe dans le monde réel, dans un format pertinent sur le plan mathématique, le réduisant à des opérations

Calculer : l'élève doit effectuer les calculs ainsi identifiés

Répondre : l'élève doit interpréter les résultats des opérations mathématiques dans le contexte du problème, contrôler la pertinence, formuler une réponse

Quatre phrases fondamentales



Diagrammes en barres

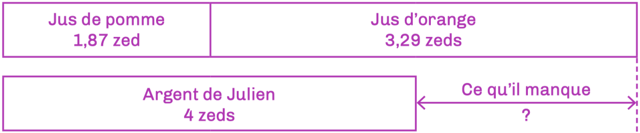
« Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed. Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds. Julien a 4 zeds.

Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ? »

Diagrammes en barres

« Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed. Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds. Julien a 4 zeds.

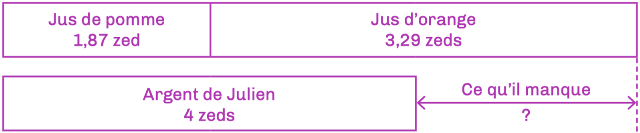
Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ? »



Diagrammes en barres

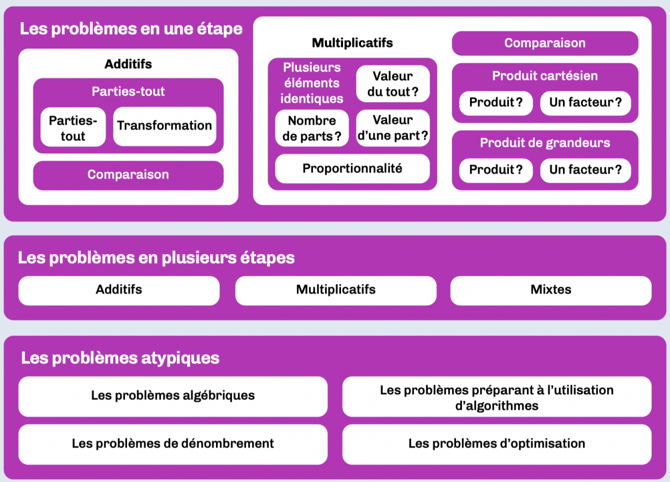
« Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed. Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds. Julien a 4 zeds.

Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ? »



Pertinent pour des problèmes de type **additif**

Classification



Problèmes

Exemples et ressources

Quelques ressources

Des banques de problèmes

- Maths en 3B
- Maths en Jeans
- DreaMaths

Poignées de mains

« Il y a 28 élèves dans votre classe. Pour se dire bonjour, chacun salue son camarade par une poignée de main. À combien d'élèves chacun serre-t-il la main ? Combien de poignées de mains sont données en tout ? »

Savez-vous le faire ? procédures ?

Poignées de mains

« Il y a 28 élèves dans votre classe. Pour se dire bonjour, chacun salue son camarade par une poignée de main. À combien d'élèves chacun serre-t-il la main ? Combien de poignées de mains sont données en tout ? »

Savez-vous le faire ? procédures ?

Erreur typique : modélisation multiplicative 28×27

Poignées de mains

« Il y a 28 élèves dans votre classe. Pour se dire bonjour, chacun salue son camarade par une poignée de main. À combien d'élèves chacun serre-t-il la main ? Combien de poignées de mains sont données en tout ? »

Savez-vous le faire ? procédures ?

Erreur typique : modélisation multiplicative 28×27

Contrainte implicite : ne pas saluer deux fois un même camarade

Poignées de mains

Expérience, contrôle : simuler la situation en classe entière ou en groupe afin de favoriser l'explicitation collective de cette contrainte et la dévolution de la situation didactique

Cela permet aux élèves d'arriver assez aisément à des calculs de sommes du type

$$1 + ... + 27 = 378 \qquad \text{ou} \qquad 27 + ... + 1 = 378$$

Poignées de mains

Expérience, contrôle : simuler la situation en classe entière ou en groupe afin de favoriser l'explicitation collective de cette contrainte et la dévolution de la situation didactique

Cela permet aux élèves d'arriver assez aisément à des calculs de sommes du type

$$1 + \ldots + 27 = 378 \qquad \text{ou} \qquad 27 + \ldots + 1 = 378$$

Avec 146 personnes, plus difficile à simuler... c'est la recherche d'une **économie** dans les calculs à effectuer qui va favoriser l'émergence d'un procédé général de calcul (**obstacles, variables didactiques**)

Poignées de mains

Carnets de recherche (traces écrites)

On a remarqué qu'on enlève 1 chaque fois.

Pour 5 élèves : On part de 4, car le premier ne se serre pas la main, soit 4+3+2+1=10

Pour 28 élèves : 27+26+25..+1=378

Dans notre école, on est 146 élèves. Avec notre méthode, c'était beaucoup trop long.

145+144+143 .... Pfff

On a cherché une méthode moins longue. On a réécrit les différents résultats :

5 élèves ----------------------------> 10

28 ---> 378

8 ---> 28

On a cherché comment on passait du nombre d'élèves au nombre de poignées de main.

5x2 ------> 10 Vrai

28x2 ----------> 378 Faux

On ne part pas du nombre donné dans l'énoncé, mais plutôt de ce nombre -1.

On a vu qu'il fallait diviser le nombre par 2 et le multiplier par le nombre -1, puisqu'on enlève 1 chaque fois. On a trouvé : (N:2) x (N-1)

5 --> (5:2) x (5-1)

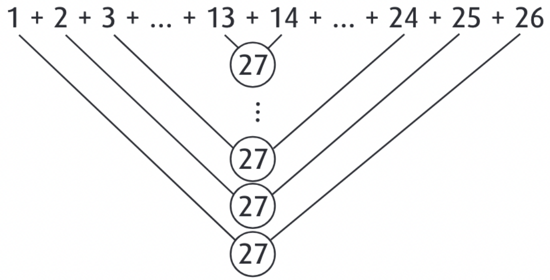
28 --> (28:2)x(28-1) Vrai

8 --> (8:2)x(8-1) Vrai

Connaissances sous-jacentes

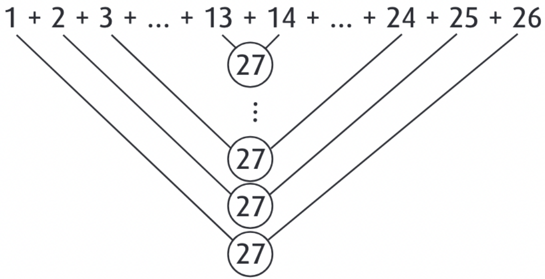
- connaissances sur la proportionnalité et la multiplication : obstacles, premières approches, confrontation à l'expérience
- les élèves présupposent une relation
- connaissances pré-algébriques à mettre en place pouer le comprendre, le formuler (cf. $\frac{1}{2}n(n+1)$)
- notion de fonction, de paramètre

Les sommations « de Gauss »



Poignées

Les sommations « de Gauss »

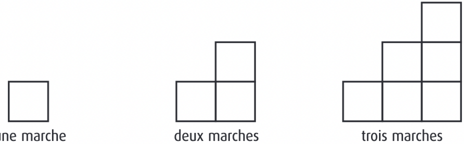


La généralisation et la formalisation sont difficiles

Repérer ces **relations** entre nombres, ces procédures, est déjà important (enrichir les méthodes, les procédures, apprendre à penser autrement)

Escaliers

Problème des escaliers
Voici des escaliers à :



Combien de « briques » faudrait-il pour construire un escalier à *n* marches?

Escaliers

Facile sur les petits nombres en dénombrant, plus difficile pour les plus grands nombres : variables didactiques importantes

Escaliers

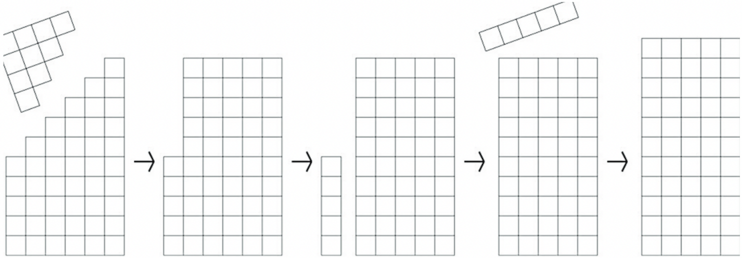
Facile sur les petits nombres en dénombrant, plus difficile pour les plus grands nombres : variables didactiques importantes

Susceptible de faire émerger des procédures erronées qui tentent de se ramener à un problème de proportionnalité : « pour un escalier de 200 marches, je multiplie par 20 le résultat trouvé pour un escalier de 10 marches »

Contrôle : petites valeurs, e.g. 3 et 6

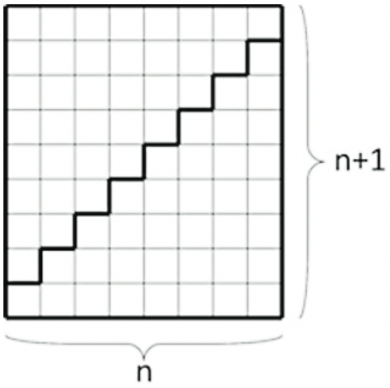
Escaliers

Manipulations (mentales)



Méthode géométrique : phénomène géométrico-numérique

Raisonnement géométrique



Couper, déplacer, dupliquer, reformuler... explorer, **manipuler** !

Calculatrice cassée

J'ai à la maison une vieille calculatrice qui ne fonctionne plus très bien. Les seules choses que je peux encore lui faire faire sont

$$+ \qquad - \qquad 5 \qquad 12$$

Calculatrice cassée

J'ai à la maison une vieille calculatrice qui ne fonctionne plus très bien. Les seules choses que je peux encore lui faire faire sont

$$+ \qquad - \qquad 5 \qquad 12$$

Quand je l'allume, l'écran indique 2007. Pouvez-vous m'aider à faire en sorte qu'il indique 2008 ? Si oui, comment ?

Calculatrice cassée

Procédure experte

Théorème de Bézout. Soient a, b et c, des entiers relatifs. Il existe des solutions entières à l'équation $ax + by = c$ si et seulement si c est un multiple de pgcd (a, b).

Que dire sur ce problème ?... à vous de jouer !

Faites des problèmes !

Pratiquez, pratiquez, pratiquez !

- introduire **modèles de base**, **schémas** assez tôt (CP)
- problèmes basiques pour construire des références, enrichir le sens des opérations et des concepts : **2 par jour**
- problèmes complexes, en plusieurs étapes : **chaque semaine**
- problèmes pour chercher : **chaque semaine**
- constituez un **catalogue riche** de problèmes

Des problèmes numériques

Problème

Une ressource avec des dizaines de problèmes :

`http://zoutils.ek.la`

Voir aussi les situations problèmes de ERMEL

Problème 1

6 enfants sont assis autour d'une table ronde. Il y a Kader, Benoît, Myriam, Laetitia, Fatima et Paul.
Myriam n'est pas assise à côté d'un garçon.
Fatima n'est pas assise en face de Benoît.
Benoît est assis juste à gauche de Kader.
Placez les 6 enfants autour de la table.

Problème

Problème 2

Trouve comment faire 66 € en utilisant le moins de pièces possibles avec des pièces ou des billets de :
1 € 2€ 5 € 10 €

Problème 3

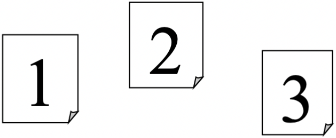
Solène a un drapeau vide avec 3 rectangles :

Elle veut le colorier avec 3 couleurs : rouge, bleu, vert.
Combien de drapeaux différents peut-elle colorier ?

Problème

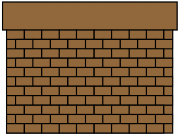
Problème 4

Cherche tous les nombres à 2 chiffres que tu peux écrire avec les chiffres : 1,2 et 3



Problème 8

Le dimanche matin, un escargot escalade un mur de 4 mètres de haut. Chaque jour, il grimpe de 2 mètres. Chaque nuit, il redescend d'un mètre. Quel jour atteint-il le sommet du mur ?



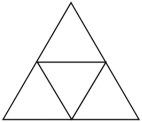
Problème 10

Marius vient de cueillir 12 tulipes rouges et 8 iris bleus. Il veut faire des bouquets et les offrir à ses amis.
Mais Marius doit respecter trois consignes :
- Faire le plus de bouquets possibles. Il a beaucoup d'amis !
- Faire des bouquets tous semblables. Il a des amis jaloux !
- Distribuer toutes les fleurs.

Combien de bouquets fera Marius ?
Comment seront les bouquets ?

Problème 16

Combien trouves-tu de triangles dans cette figure ?



Problème 40

Un jardinier veut arroser 5 petits arbres.
Il faut 2 litres d'eau par arbre.
Il met, à chaque fois, 3 litres dans son arrosoir.
Il doit faire le moins de voyages possible.
Combien en fera-t-il ?

Des problèmes géométriques

Les problèmes en géométrie

"À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets [...] et leurs propriétés sont essentiellement contrôlés par la perception à une géométrie où le recours à des instruments devient déterminant, pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation s'appuie sur le raisonnement et l'argumentation. Différentes caractérisations d'un même objet [...] permettent aux élèves de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure." (BO 2018)

Les problèmes en géométrie

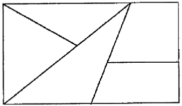
"Les situations faisant appel à différents types de tâches (reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques, sont privilégiées afin de faire émerger des concepts géométriques [...] et de les enrichir" (BO 2018)

Les problèmes en géométrie

"Les situations faisant appel à différents types de tâches (reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques, sont privilégiées afin de faire émerger des concepts géométriques [...] et de les enrichir" (BO 2018)

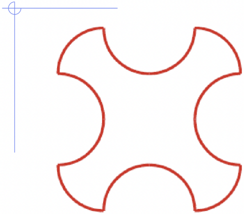
Les activités et concepts permettent de construire/comprendre

Problème – relations



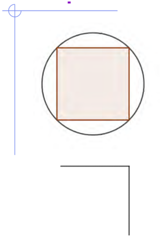
Vous devez terminer l'agrandissement de la figure sur la feuille distribuée. Vous disposez pour cela de tous vos instruments de géométrie et de papier calque (si nécessaire).
Vous n'êtes pas autorisés à calculer.

Problème – relations



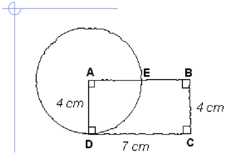
Reproduire à l'identique la figure suivante (figure 3)

Problème – relations



Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle.
Vous devez la reproduire, la figure est déjà commencée : deux côtés du carré sont déjà tracés.

Problème – relations



Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.

Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.

Trouve la longueur du segment [EB].

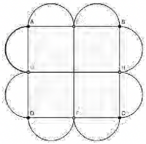
..

Explique ta réponse :........................

..

Problème – description

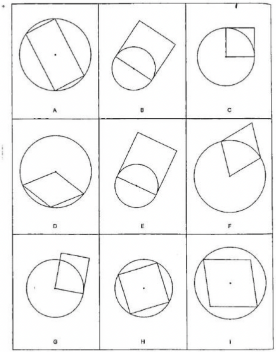
Décrire



Dictée à l'adulte géométrique :

- Les élèves sont tous en possession de la reproduction d'une figure
- Le maître est au tableau et fait comme s'il ne connaissait pas la figure
- Les élèves en donnant des indications précises doivent permettre au maître de réaliser la figure sous la dictée..

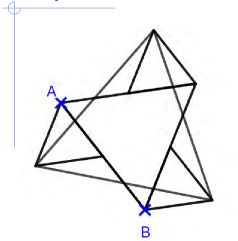
Problème – communication



CAP Maths CM1 fiche 110 matériels photocopiables
Les élèves (éventuellement par binômes) reçoivent une de ces figures (pas la même pour tous).
La consigne est donnée en deux temps :
1er temps : « Rédige un message pour permettre à un autre élève de reconnaître la figure.»
2è temps après échanges des messages : « Avec le message que tu as reçu, retrouve la figure parmi celles de la fiche.»

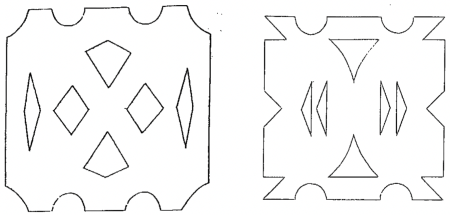
Problème – reproduction

Reproduire une figure

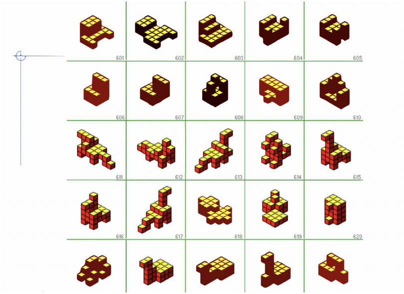


Reproduire cette figure sachant que le segment [AB] mesure 6 cm.
(figure 2)

Problème – napperons

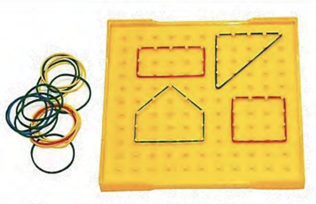


Problème – subes Soma



Problème – Tangram

Problème – Geoplan



Des problèmes plus ouverts

Problème

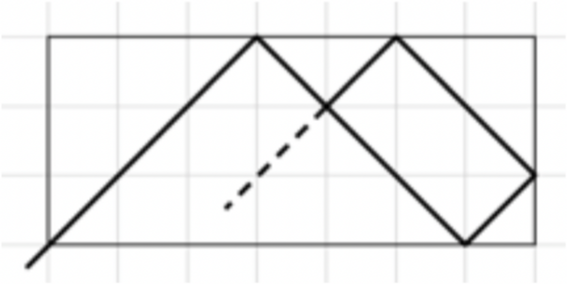
Le billard

L'énoncé de la situation :

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage.
Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple:



Question

Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensi

Problème

Les urnes de Polya

L'énoncé de la situation :

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire une boule au hasard et on replace dans l'urne la boule choisie et une autre boule de la même couleur.

On s'intéresse à la composition de l'urne lorsque l'on recommence le tirage n fois de suite.

Le nombre de 0 de factorielle n

L'énoncé de la situation :

Combien y a-t-il de 0 à la fin de n! ?

Voici une version de l'énoncé utilisable en collège.

En mathématique, la **factorielle** d'un nombre entier est le produit des nombres entiers (supérieurs à 1) qui le précèdent.

Par exemple :

- Factorielle 3 s'écrit 1 x 2 x 3 et est égale à 6
- Factorielle 4 s'écrit 1 x 2 x 3 x 4 et est égale à 24
- Factorielle 5 s'écrit 1 x 2 x 3 x 4 x 5 et est égale à 120

On remarque qu'il y a un « 0 » à la fin de Factorielle 5.

1. Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 7 ?
2. Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 17 ?
3. Et si on se posait la question pour n'importe quel nombre entier, comment pourrait-on faire pour trouver le nombre de « 0 » à la fin ?

Les pavages du plan

L'énoncé de la situation :

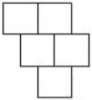
Problème : Globalement il s'agit de déterminer l'ensemble des pavages du plan avec des polygones réguliers. Pour une recherche en classe il peut être u
se restreindre aux pavages stricts.

Énoncé 1 : Comment paver le plan avec des polygones réguliers ?

Énoncé 2 : Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque somme
le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



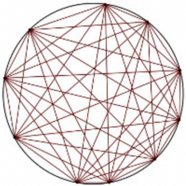
La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

Problème

Les régions du disque

L'énoncé de la situation :

Combien y a-t-il au maximum de régions déterminées dans un disque par toutes les cordes joignant des points deux à deux ?



Merci !

Des questions ?