

# Systemes de numération

De nombreuses visions du nombre

---

Didier Lesesvre

# Petit aperçu

- le concept de nombre
- représentations du nombre
- systèmes de numération
- systèmes historiques
- notre système
- les grands nombres
- didactique de la numération
- quelques autres systèmes

# Le concept de nombre

---

# Le nombre... ?



Qu'est-ce qu'un nombre ?

# Le nombre : un concept abstrait

Un concept **abstrait**

# Le nombre : un concept abstrait

Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)

## Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)
- ordre dans une progression (ordinal)

## Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)
- ordre dans une progression (ordinal)
- abstraction d'autres données (classe d'équivalence)

## Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)
- ordre dans une progression (ordinal)
- abstraction d'autres données (classe d'équivalence)
- très longue histoire

# Le concept selon Vergnaud

# Le concept selon Vergnaud

## Composante "Techniques"

Ensemble des résultats connus et des techniques (savoir-faire), des procédures qui permettent de travailler avec ce concept.

## Composante "Problèmes"

Ensemble des problèmes qu'il permet de résoudre efficacement.



## Composante "Langages"

Ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de le représenter : mots, symboles, représentations schématiques...

## Composante "Propriétés"

Ensemble de définitions, propriétés, théorèmes qui permettent de justifier les techniques utilisées.

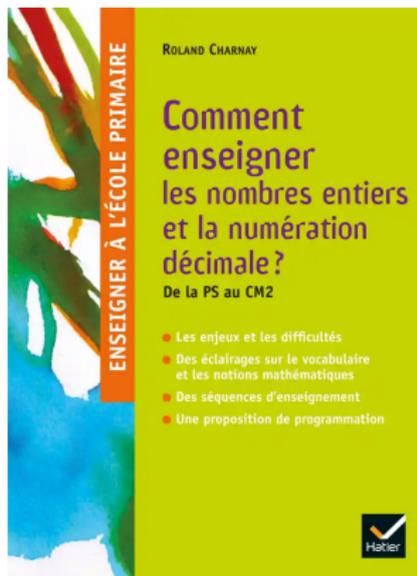
## Dans l'enseignement

- Les **problèmes** nécessitent une **classification**, prenant en compte les structures mathématiques sous-jacentes
- Les **propriétés** permettent une meilleure **connaissance** du concept et des justifications
- Les **techniques** rendent le concept **opérateur**, peuvent être routinisées ou réfléchies
- Le **langages** a un objectif de **communication**, mais aussi opératoire et de support intermédiaire

## Le cas des **nombre**s entiers naturels

- **Problèmes** : exprimer des quantités, repérer un point sur une droite, anticiper le résultat d'action...
- **Propriétés** : zéro plus petit nombre, successeur/prédécesseur, transitivité de  $<$ , ...
- **Techniques** : dénombrement, opérations posées
- **Langages** : verbal, analogique, chiffré

# Le nombre : une référence didactique



# Le nombre : une référence historique

GEORGES IFRAH

## HISTOIRE UNIVERSELLE DES CHIFFRES

L'INTELLIGENCE DES HOMMES  
RACONTÉE PAR LES NOMBRES ET LE CALCUL



BOUQUINS

ROBERT LAFFONT

# Représentations du nombre

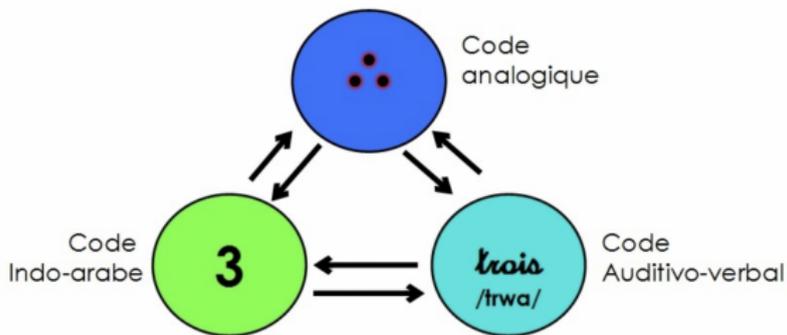
---

## Des représentations du nombre

Nos représentations du nombre cachent déjà un **triple code** :

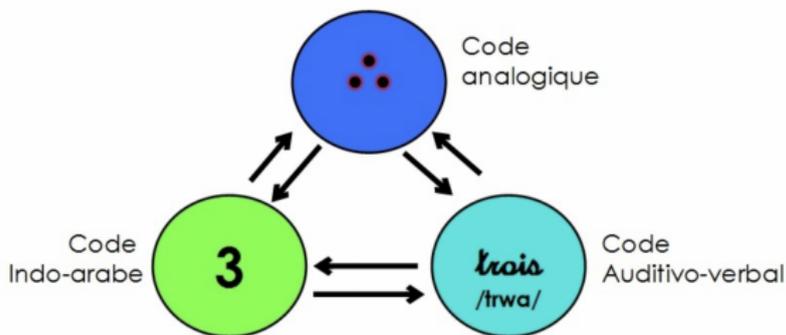
# Des représentations du nombre

Nos représentations du nombre cachent déjà un **triple code** :



# Des représentations du nombre

Nos représentations du nombre cachent déjà un **triple code** :



... et chacun de ces codes peut être déjà très riche ! (constellations variées, symboles différents des chiffres, autres langues, etc.)

Les traductions sont difficiles dans **toutes** les directions :

- connaître le chiffre sans le relier au nombre
- contrôler la taille d'une collection sans savoir l'énoncer
- connaître la comptine numérique sans savoir écrire en chiffre...

# Les difficultés de traduction

Les traductions sont difficiles dans **toutes** les directions :

- connaître le chiffre sans le relier au nombre
- contrôler la taille d'une collection sans savoir l'énoncer
- connaître la comptine numérique sans savoir écrire en chiffre...

Ce travail de traduction se fait **tout au long du primaire**

## La pertinence en fonction de la situation

Jongler entre différents aspects permet d'enrichir les **procédures** :

- pour dénombrer on *peut* préférer le code analogique

# La pertinence en fonction de la situation

Jongler entre différents aspects permet d'enrichir les **procédures** :

- pour dénombrer on *peut* préférer le code analogique
- pour calculer on *peut* préférer le code chiffré

# La pertinence en fonction de la situation

Jongler entre différents aspects permet d'enrichir les **procédures** :

- pour dénombrer on *peut* préférer le code analogique
- pour calculer on *peut* préférer le code chiffré
- pour communiquer on *peut* préférer le code auditivo-verbal...

# Systemes de numération

---

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

**Quel objectif ?**

- Représenter

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

**Quel objectif ?**

- Représenter
- Communiquer

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

**Quel objectif ?**

- Représenter
- Communiquer
- Calculer

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

**Quel objectif ?**

- Représenter
- Communiquer
- Calculer

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

**Quel objectif ?**

- Représenter
- Communiquer
- Calculer

... et le faire de manière univoque, compacte et efficace !

**Attention !**

## Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

## Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

## Remarques

- un nombre peut n'avoir qu'un seul chiffre

## Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

## Remarques

- un nombre peut n'avoir qu'un seul chiffre
- attention au langage courant, par exemple "chiffrer"

## Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

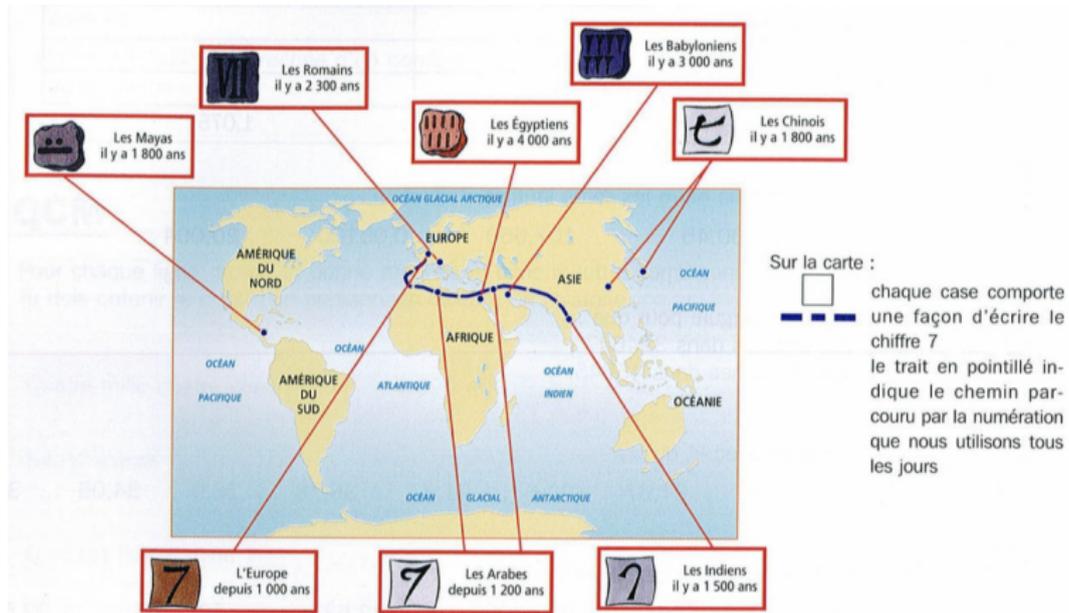
## Remarques

- un nombre peut n'avoir qu'un seul chiffre
- attention au langage courant, par exemple "chiffrer"
- un numéro fait partie d'une série (téléphone, INSEE, etc.)

# Systemes historiques

---

# Une longue histoire



# Mésopotamienne archaïque

Système sexagésimal (objets discrets)								
Symbole								
Valeur	36000	3600	600	60	10	1	1/2 ou 1/10	
Système SE de mesure de capacité de graines								
Symbole								
Valeur		1800	180	60	6	1	1/5	1/10
Système bisexagésimal (produits consommables)								
Symbole								
Valeur	7200	1200	120	60	10	1	1/2	

# Mésopotamienne cunéiforme



<b>Valeur</b>	<b>36000</b>	<b>3600</b>	<b>600</b>	<b>60</b>	<b>10</b>	<b>1</b>
<b>Symbole</b>						

# Mésopotamienne cunéiforme

Valeur	36000	3600	600	60	10	1
Symbole						

		unités									
		...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
dizaines	0...		┆	┆┆	┆┆┆	┆┆┆┆	┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	1... <	<	<┆	<┆┆	<┆┆┆	<┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	2... <<	<<	<<┆	<<┆┆	<<┆┆┆	<<┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	3... <<<	<<<	<<<┆	<<<┆┆	<<<┆┆┆	<<<┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	4... <<<<	<<<<	<<<<┆	<<<<┆┆	<<<<┆┆┆	<<<<┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	5... <<<<<	<<<<<	<<<<<┆	<<<<<┆┆	<<<<<┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆

# Mésopotamienne cunéiforme

Valeur	36000	3600	600	60	10	1
Symbole						

Quelques exemples : à vous de jouer

Valeur décimale	Écriture babylonienne cunéiforme	Décomposition en base 60
1		$1 \times 1$
17		<input type="text"/>
44	<input type="text"/>	$44 \times 1$
60	<input type="text"/>	$60 = 1 \times 60 + 0 \times 1$
85		<input type="text"/>
3600	<input type="text"/>	$3600 = 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 0 \times 1$
11327		<input type="text"/>
7000,2525	<input type="text"/>	$1 \times 60^2 + 56 \times 60 + 40 \times 1 + 15/60 + 9/60^2$

## Quelques remarques

- système essentiellement additif

## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60

## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60
- lecture difficile, imbrication des caractères

## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60
- lecture difficile, imbrication des caractères
- grands nombres inaccessibles

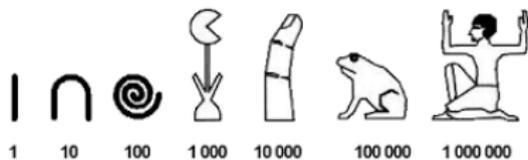
## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60
- lecture difficile, imbrication des caractères
- grands nombres inaccessibles
- impossibilité de différencier 1 et 60

# Hiéroglyphes égyptiens



# Hiéroglyphes égyptiens



	Unités	Dizaines	Centaines	Milliers	Dizaines de mille	Centaines de mille
1	∣	∩	☉	⋈	∣	⋈
2	∣∣	∩∩	☉☉	⋈⋈	∣∣	⋈⋈
3	∣∣∣	∩∩∩	☉☉☉	⋈⋈⋈	∣∣∣	⋈⋈⋈
4	∣∣∣∣	∩∩∩∩	☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈	∣∣∣∣	⋈⋈⋈⋈
5	∣∣∣∣∣	∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈	∣∣∣∣	⋈⋈⋈⋈
6	∣∣∣∣∣∣	∩∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈⋈	∣∣∣∣∣	⋈⋈⋈⋈⋈
7	∣∣∣∣∣∣∣	∩∩∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈	∣∣∣∣∣∣	⋈⋈⋈⋈⋈⋈
8	∣∣∣∣∣∣∣∣	∩∩∩∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈	∣∣∣∣∣∣∣	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈
9	∣∣∣∣∣∣∣∣∣	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈	∣∣∣∣∣∣∣∣	⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈⋈



## Quelques remarques

- système essentiellement additif

## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10

## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10
- lecture plus explicite, mais très longue

## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10
- lecture plus explicite, mais très longue
- plusieurs écritures possibles de 12 (IUI, UII, IIU)

## Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10
- lecture plus explicite, mais très longue
- plusieurs écritures possibles de 12 (IUI, UII, IIU)
- grands nombres inaccessibles

# Numération romaine

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1'000

$$XVI = 10 + 5 + 1 = 16$$

$$XIV = 10 + (5 - 1) = 14, \text{ car I est inférieur à V}$$

$$DIX = 500 + (10 - 1) = 509, \text{ car I est inférieur à X}$$

$$MMMMCMXCIX = 4\,999$$

MMMMDCCCLXXXVIII = 4888, nombre romain le plus long en quantité de symboles.

# Numération romaine

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1'000

Quelques exemples : à vous de jouer

MMCIX = ?

CDIXV = ?

126 = ?

999 = ?

## Quelques remarques

- système additif et soustractif

## Quelques remarques

- système additif et soustractif
- notion de paquets, de 5 et de 10

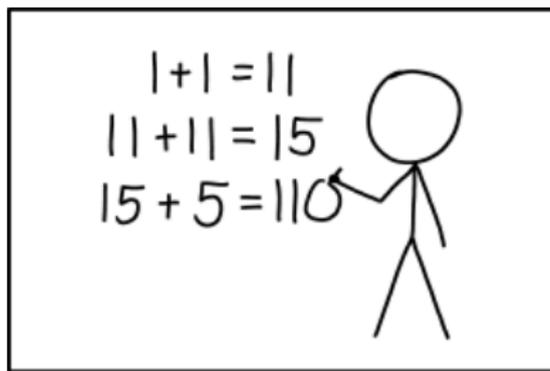
## Quelques remarques

- système additif et soustractif
- notion de paquets, de 5 et de 10
- lectures très longues

## Quelques remarques

- système additif et soustractif
- notion de paquets, de 5 et de 10
- lectures très longues
- grands nombres inaccessibles

## Numération romaine



REMEMBER, ROMAN NUMERALS ARE ARCHAIC, SO ALWAYS REPLACE THEM WITH MODERN ONES WHEN DOING MATH.

On peut peut-être mieux faire...

# Numération chinoise en bâtons

Série	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A							┌	┌┌	┌┌┌	┌┌┌┌
B		—	==	===	====	=====	└	└└	└└└	└└└└

La série A est utilisée pour les unités et les centaines

La série B est utilisée pour les dizaines et les milliers

# Numération chinoise en bâtons

Série	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A							┌	┌┌	┌┌┌	┌┌┌┌
B		—	≡	≡≡	≡≡≡	≡≡≡≡	└	└└	└└└	└└└└

La série A est utilisée pour les unités et les centaines

La série B est utilisée pour les dizaines et les milliers

- 4 : ||||
- 72 : └ ||
- 256 : || ≡≡ ┌
- 308 : ||| ┌┌
- 1 007 : — ┌┌
- 81 753 : ┌┌┌ — ┌┌ ≡≡ |||
- 1,95 : | ≡≡ ||||

# Numération chinoise en bâtons

Série	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A							┌	┌┌	┌┌┌	┌┌┌┌
B		—	==	≡	≡≡	≡≡≡	└	└└	└└└	└└└└

Quelques exemples : à vous de jouer

$$126 = ?$$

$$999 = ?$$

$$10008 = ?$$

## Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification

## Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification
- paquets de 10

## Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification
- paquets de 10
- entrelacement de deux séries

## Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification
- paquets de 10
- entrelacement de deux séries
- absence de caractères signifiante

# Numération chinoise

一 二 三 四 五

1 2 3 4 5

六 七 八 九 十

6 7 8 9 10

十 百 千 万

10 100 1,000 10,000

Quelques exemples : à vous de jouer

$$126 = ?$$

$$999 = ?$$

$$18030 = ?$$

## Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10

## Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10
- système quasi-positionnel, puissance de 10 indiquées

## Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10
- système quasi-positionnel, puissance de 10 indiquées
- très grands multiplicateurs

## Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10
- système quasi-positionnel, puissance de 10 indiquées
- très grands multiplicateurs
- lecture orale transparente, sans irrégularité

# Notre système de numération

---

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

## Notre numération

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

## Notre numération

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

Et 99999999 ?

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

Et 99999999 ?

**Deux grand principes**

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

Et 99999999 ?

**Deux grand principes**

- décimal
- positionnel

# Principe décimal

Les nombres sont organisés en **paquets de 10** :

- dix unités font une dizaine
- dix dizaines font une centaine
- dix centaines font un millier...

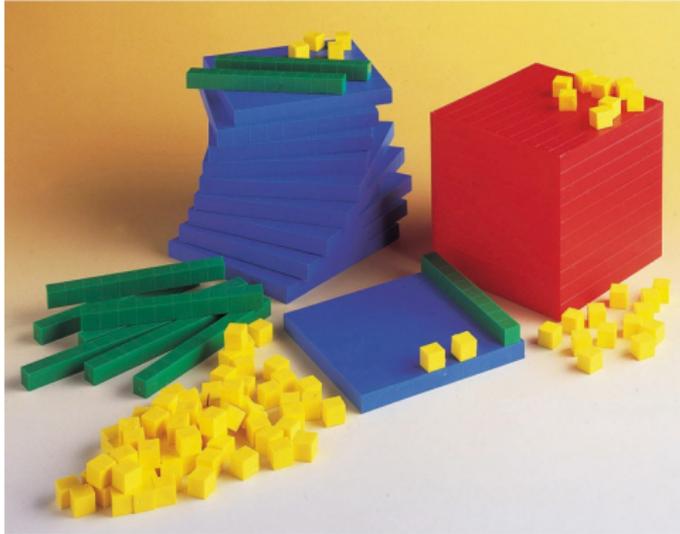
# Principe décimal

Les nombres sont organisés en **paquets de 10** :

- dix unités font une dizaine
- dix dizaines font une centaine
- dix centaines font un millier...

Les grands nombres sont organisés par **paquets de 1000**

# Principe décimal



# Principe positionnel

La place du chiffre dans le nombre change sa valeur !

Pour les égyptiens, IU = UI

Pour nous, 10 n'est pas 01

Photo de boulier

## Numération décimale de position

$$324 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

The diagram illustrates the decomposition of the number 324 into its place values. The number 324 is written in red. Below it, the equation  $324 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$  is shown. The powers of 10 are written in black above the equation, with red arrows pointing down to the corresponding terms:  $10^2$  above  $100$ ,  $10^1$  above  $10$ , and  $10^0$  above  $1$ . The terms  $3 \times 100$ ,  $2 \times 10$ , and  $4 \times 1$  are written in green, orange, and blue respectively. Below the equation, a diagram shows the place values: 'centaines' (hundreds) in green, 'dizaines' (tens) in orange, and 'unités' (units) in blue. Brackets connect the terms of the equation to their respective place value labels: a green bracket connects  $3 \times 100$  to 'centaines', an orange bracket connects  $2 \times 10$  to 'dizaines', and a blue bracket connects  $4 \times 1$  to 'unités'.

# Grands nombres

---

# Numération des grands nombres

Comment lire 8736846068308764868036806 ?

# Numération des grands nombres

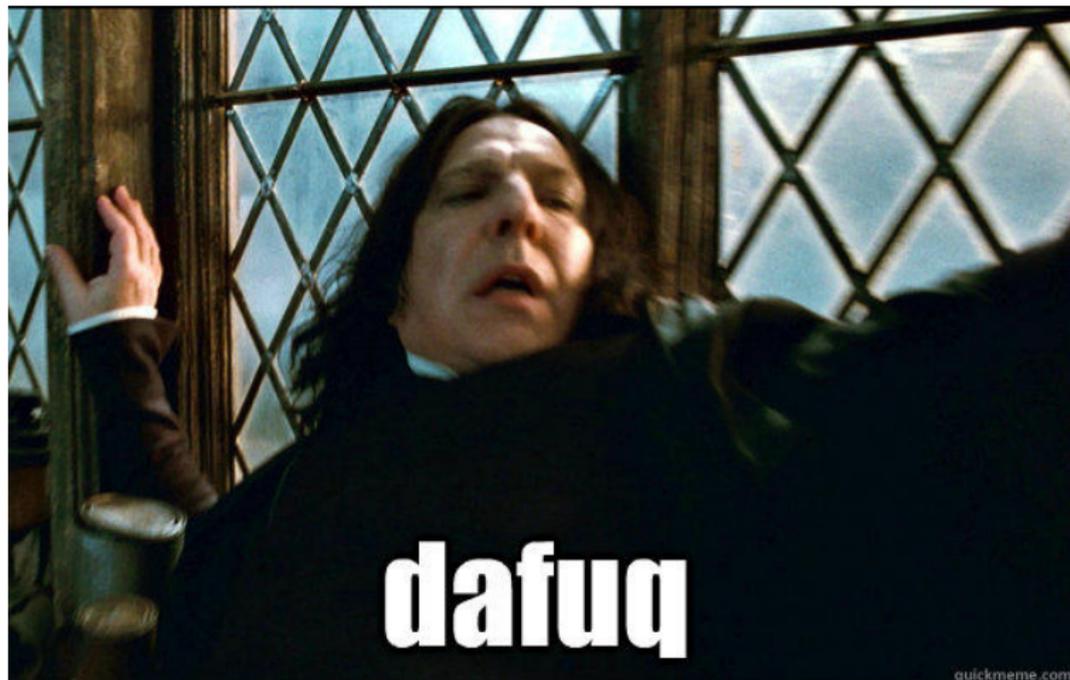
Comment lire 8736846068308764868036806 ?

Les grands nombres sont dénommés à chaque facteur **1000**

Il y a en français une **double échelle** :

- mille milliers font un million
- mille millions font un milliard
- mille milliard font un billion
- mille billions font un billiard...

## Numération des grands nombres



## Échelle des -ions

- un million de millions font un billion
- un million de billions font un trillion
- un million de trillions font un quadrillions...

## Échelle des -iards

- un million de milliards font un billion
- un million de billiards font un trillion
- un million de trilliards font un quadrilliard...

Les paquets se font par 10... mais pourraient se faire par 2, 3, 16...

## Autres bases

Les paquets se font par 10... mais pourraient se faire par 2, 3, 16...

**En base  $b$** , un nombre s'écrit

$$\overline{a_n \cdots a_0} = [a_n \cdots a_0]_b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

Les paquets se font par 10... mais pourraient se faire par 2, 3, 16...

**En base  $b$** , un nombre s'écrit

$$\overline{a_n \cdots a_0} = [a_n \cdots a_0]_b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

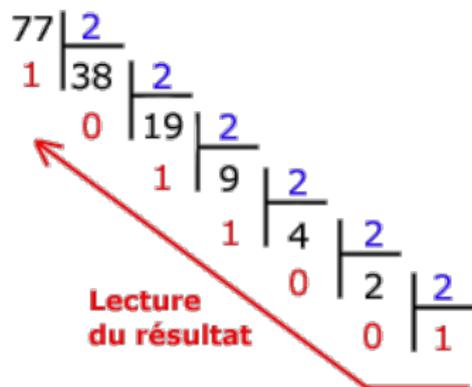
**À vous de jouer !**

Écrivez 77 en base 2

Écrivez 367 en base 5

Écrivez 2022 en base 2022

# Bases et divisions euclidiennes



$$[77]_2 = [1001101]_2$$

*Avantages du système positionnel*

## Avantages du système positionnel

- compact
- opératoire
- peu de symboles

## Avantages du système positionnel

- compact
- opératoire
- peu de symboles

## Inconvénients du système positionnel

## Avantages du système positionnel

- compact
- opératoire
- peu de symboles

## Inconvénients du système positionnel

- abstrait
- lecture non transparente
- problème du zéro

**Définition :**  $10^n = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$

**Multiplication :**  $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$

**Puissances :**  $(10^n)^m = 10^{mn}$

# Le cœur de nos algorithmes de calcul

Les algorithmes de calcul reposent fondamentalement sur les propriétés du système positionnel !

# Le cœur de nos algorithmes de calcul

Les algorithmes de calcul reposent fondamentalement sur les propriétés du système positionnel !

**Exercice** : pourquoi ?

**En informatique**

---

# Système binaire

Système **binaire** : système de numération en **base 2**

Les chiffres sont appelés **bits** (binary digits) : 0 et 1

# Système binaire

Système **binaire** : système de numération en **base 2**

Les chiffres sont appelés **bits** (binary digits) : 0 et 1

**Intérêt** : modélise très bien

- l'électronique numérique
- les valeurs de vérité

# Système binaire

Système **binaire** : système de numération en **base 2**

Les chiffres sont appelés **bits** (binary digits) : 0 et 1

**Intérêt** : modélise très bien

- l'électronique numérique
- les valeurs de vérité

Exemples :  $1 + 0 = 1$ ,  $1 + 1 = 10$ ,  $11 + 1 = 100$ , etc.

# Système hexadécimal

Système **hexadécimal** : en **base 16**

# Système hexadécimal

Système **hexadécimal** : en **base 16**

## Intérêts

- écritures bien plus compactes que le binaire
- traiter les bits par paquets de 4

# Système hexadécimal

Système **hexadécimal** : en base 16

## Intérêts

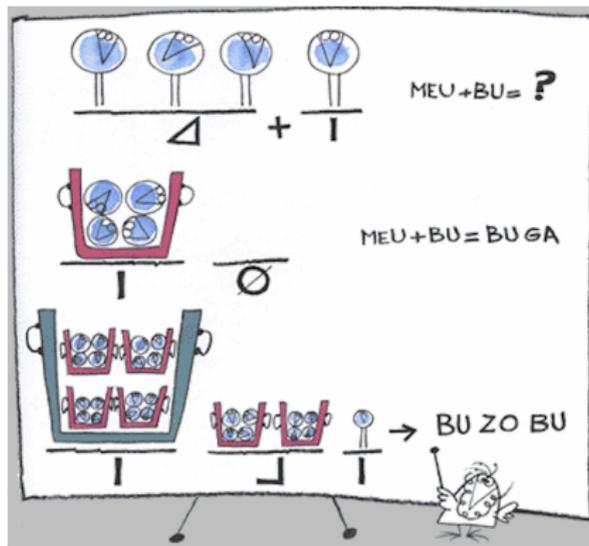
- écritures bien plus compactes que le binaire
- traiter les bits par paquets de 4

**Exemple** :  $\overline{15AACF7}^1_6 = \overline{1010110101010110011110111}^2$

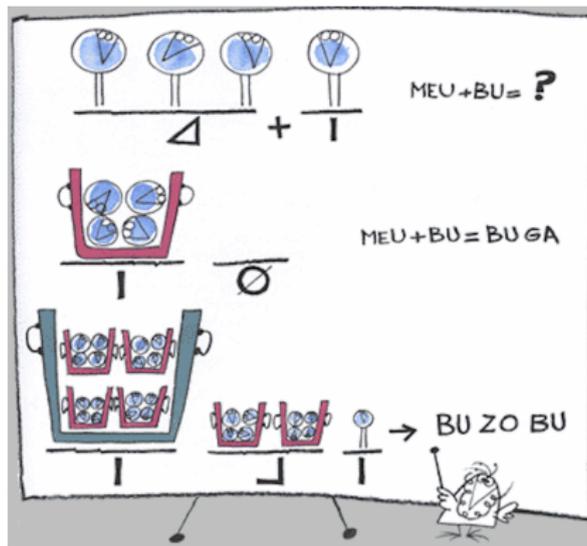
D'autres systèmes ?

---

# Numération Shadok



# Numération Shadok



Vous avez toutes les informations pour traduire :

108 = ?

MOBUGABU = ?

# Le bibi-binaire de Bobby Lapointe

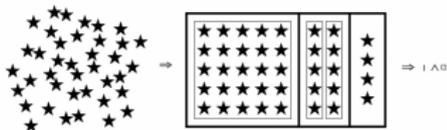
Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Hexadécimal [0-9A-F]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	
Répartition		0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
Notation bibi-binaire																	
Prononciation	HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI	

# Les Cincfiles (CRPE Lille)

## Exercice 1 – Numération (CRPE Académie de Lille, 2005) L'écriture des nombres chez les Cincfiles

Dans la tribu des Cincfiles, on a une manière particulière de compter. Lors d'un voyage dans cette tribu, un chercheur a ramené un certain nombre d'observations qu'il a retranscrites dans un carnet. Voici ce qu'il a noté sur la manière de compter des Cincfiles :

- C'est une numération de position;
- Il n'y a que 5 symboles pour noter les nombres :
  - qui correspond à notre 0
  - ∩ qui correspond à notre 1
  - ∧ qui correspond à notre 2
  - ∇ qui correspond à notre 3
  - qui correspond à notre 4.
- Une observation :



- Des exemples de transcriptions :

∩ ∇	□ ∧	∧ • □	∥ ∇ □
8	22	54	169

1. En expliquant votre démarche :
    - a) Transcrire dans notre système de numération le nombre noté par les Cincfiles « □ □ □ ».
    - b) Transcrire dans le système Cincfile le nombre que nous notons « 273 ».
  2. Sans passer par une transcription dans notre système de numération décimale et en justifiant votre réponse, écrire :
    - a) le nombre qui précède le nombre « ∇ □ • » dans le système Cincfile;
    - b) le nombre qui suit le nombre « ∧ □ □ » dans le système Cincfile.
- Ces deux derniers nombres seront donnés en écriture Cincfile.

Merci !

---

Des questions ?