

Systemes de numération

De nombreuses visions du nombre

Didier Lesesvre

Petit aperçu

- le concept de nombre
- représentations du nombre
- systèmes de numération
- systèmes historiques
- notre système
- les grands nombres
- didactique de la numération
- quelques autres systèmes

Le concept de nombre

Le nombre... ?



Qu'est-ce qu'un nombre ?

Le nombre : un concept abstrait

Un concept **abstrait**

Le nombre : un concept abstrait

Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)

Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)
- ordre dans une progression (ordinal)

Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)
- ordre dans une progression (ordinal)
- abstraction d'autres données (classe d'équivalence)

Un concept **abstrait**

- taille d'une collection (cardinal)
- ordre dans une progression (ordinal)
- abstraction d'autres données (classe d'équivalence)
- très longue histoire

Le concept selon Vergnaud

Le concept selon Vergnaud

Composante "Techniques"

Ensemble des résultats connus et des techniques (savoir-faire), des procédures qui permettent de travailler avec ce concept.

Composante "Problèmes"

Ensemble des problèmes qu'il permet de résoudre efficacement.



Composante "Langages"

Ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de le représenter : mots, symboles, représentations schématiques...

Composante "Propriétés"

Ensemble de définitions, propriétés, théorèmes qui permettent de justifier les techniques utilisées.

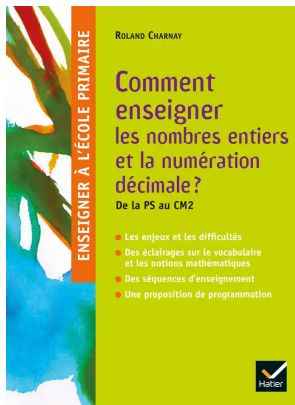
Dans l'enseignement

- Les **problèmes** nécessitent une **classification**, prenant en compte les structures mathématiques sous-jacentes
- Les **propriétés** permettent une meilleure **connaissance** du concept et des justifications
- Les **techniques** rendent le concept **opérateur**, peuvent être routinisées ou réfléchies
- Le **langages** a un objectif de **communication**, mais aussi opératoire et de support intermédiaire

Le cas des **nombre**s entiers naturels

- **Problèmes** : exprimer des quantités, repérer un point sur une droite, anticiper le résultat d'action...
- **Propriétés** : zéro plus petit nombre, successeur/prédécesseur, transitivité de $<$, ...
- **Techniques** : dénombrement, opérations posées
- **Langages** : verbal, analogique, chiffré

Le nombre : une référence didactique



Le nombre : une référence historique

GEORGES IFRAH

HISTOIRE UNIVERSELLE DES CHIFFRES

L'INTELLIGENCE DES HOMMES
RACONTÉE PAR LES NOMBRES ET LE CALCUL



BOUQUINS

ROBERT LAFFONT

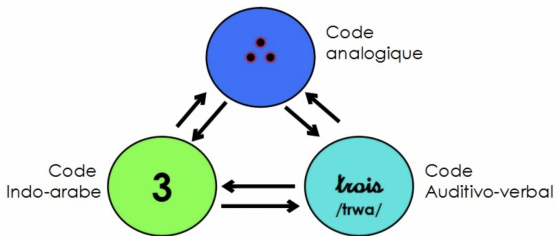
Représentations du nombre

Des représentations du nombre

Nos représentations du nombre cachent déjà un **triple code** :

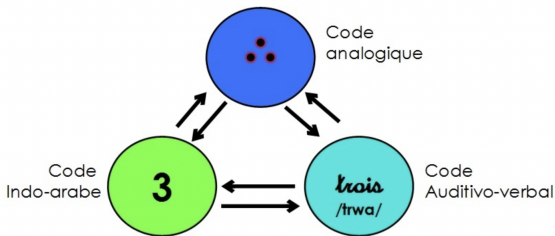
Des représentations du nombre

Nos représentations du nombre cachent déjà un **triple code** :



Des représentations du nombre

Nos représentations du nombre cachent déjà un **triple code** :



... et chacun de ces codes peut être déjà très riche ! (constellations variées, symboles différents des chiffres, autres langues, etc.)

Les traductions sont difficiles dans **toutes** les directions :

- connaître le chiffre sans le relier au nombre
- contrôler la taille d'une collection sans savoir l'énoncer
- connaître la comptine numérique sans savoir écrire en chiffre...

Les difficultés de traduction

Les traductions sont difficiles dans **toutes** les directions :

- connaître le chiffre sans le relier au nombre
- contrôler la taille d'une collection sans savoir l'énoncer
- connaître la comptine numérique sans savoir écrire en chiffre...

Ce travail de traduction se fait **tout au long du primaire**

La pertinence en fonction de la situation

Jongler entre différents aspects permet d'enrichir les **procédures** :

- pour dénombrer on *peut* préférer le code analogique

La pertinence en fonction de la situation

Jongler entre différents aspects permet d'enrichir les **procédures** :

- pour dénombrer on *peut* préférer le code analogique
- pour calculer on *peut* préférer le code chiffré

La pertinence en fonction de la situation

Jongler entre différents aspects permet d'enrichir les **procédures** :

- pour dénombrer on *peut* préférer le code analogique
- pour calculer on *peut* préférer le code chiffré
- pour communiquer on *peut* préférer le code auditivo-verbal...

Systemes de numération

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

Quel objectif ?

- Représenter

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

Quel objectif ?

- Représenter
- Communiquer

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

Quel objectif ?

- Représenter
- Communiquer
- Calculer

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

Quel objectif ?

- Représenter
- Communiquer
- Calculer

Un système de numération permet de **représenter** les nombres

Quel objectif ?

- Représenter
- Communiquer
- Calculer

... et le faire de manière univoque, compacte et efficace !

Attention !

Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

Remarques

- un nombre peut n'avoir qu'un seul chiffre

Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

Remarques

- un nombre peut n'avoir qu'un seul chiffre
- attention au langage courant, par exemple "chiffrer"

Attention !

« Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »

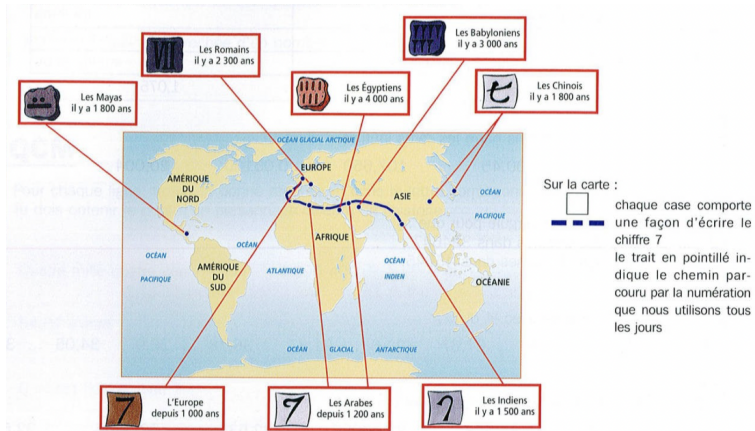
Ce sont des **graphèmes**, parties atomiques d'un langage

Remarques

- un nombre peut n'avoir qu'un seul chiffre
- attention au langage courant, par exemple "chiffrer"
- un numéro fait partie d'une série (téléphone, INSEE, etc.)

Systemes historiques

Une longue histoire



Mésopotamienne archaïque

Système sexagésimal (objets discrets)								
Symbole								
Valeur	36000	3600	600	60	10	1	1/2 ou 1/10	
Système SE de mesure de capacité de graines								
Symbole								
Valeur		1800	180	60	6	1	1/5	1/10
Système bisexagésimal (produits consommables)								
Symbole								
Valeur	7200	1200	120	60	10	1	1/2	

Mésopotamienne cunéiforme



Valeur	36000	3600	600	60	10	1
Symbole						

Mésopotamienne cunéiforme

Valeur	36000	3600	600	60	10	1
Symbole						

		unités									
		...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
dizaines	0...		┆	┆┆	┆┆┆	┆┆┆┆	┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	1... <	<	<┆	<┆┆	<┆┆┆	<┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆┆┆	<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	2... <<	<<	<<┆	<<┆┆	<<┆┆┆	<<┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	3... <<<	<<<	<<<┆	<<<┆┆	<<<┆┆┆	<<<┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	4... <<<<	<<<<	<<<<┆	<<<<┆┆	<<<<┆┆┆	<<<<┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆
	5... <<<<<	<<<<<	<<<<<┆	<<<<<┆┆	<<<<<┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆	<<<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆

Mésopotamienne cunéiforme

Valeur	36000	3600	600	60	10	1
Symbole						

Quelques exemples : à vous de jouer

Valeur décimale	Écriture babylonienne cunéiforme	Décomposition en base 60
1		1×1
17		<input type="text"/>
44	<input type="text"/>	44×1
60	<input type="text"/>	$60 = 1 \times 60 + 0 \times 1$
85		<input type="text"/>
3600	<input type="text"/>	$3600 = 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 0 \times 1$
11327		<input type="text"/>
7000,2525	<input type="text"/>	$1 \times 60^2 + 56 \times 60 + 40 \times 1 + 15/60 + 9/60^2$

Quelques remarques

- système essentiellement additif

Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60

Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60
- lecture difficile, imbrication des caractères

Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60
- lecture difficile, imbrication des caractères
- grands nombres inaccessibles

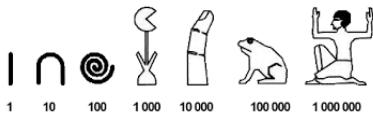
Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 60
- lecture difficile, imbrication des caractères
- grands nombres inaccessibles
- impossibilité de différencier 1 et 60

Hiéroglyphes égyptiens



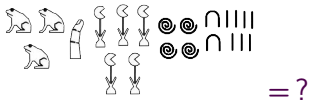
Hiéroglyphes égyptiens



	Unités	Dizaines	Centaines	Milliers	Dizaines de mille	Centaines de mille
1	▯	∩	☉	⋈	⋈	♁
2	▯▯	∩∩ ∩∩	☉☉	⋈⋈	⋈⋈	♁♁
3	▯▯▯	∩∩∩ ∩∩∩	☉☉☉	⋈⋈⋈	⋈⋈⋈	♁♁♁
4	▯▯▯▯	∩∩∩∩ ∩∩∩∩	☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈	⋈⋈⋈⋈	♁♁♁♁
5	▯▯▯▯ ▯▯	∩∩∩∩ ∩∩∩∩	☉☉☉☉ ☉☉	⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈	⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈	♁♁♁♁ ♁♁
6	▯▯▯▯ ▯▯▯▯	∩∩∩∩ ∩∩∩∩	☉☉☉☉ ☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	♁♁♁♁ ♁♁♁♁
7	▯▯▯▯▯ ▯▯▯	∩∩∩∩∩ ∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉ ☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	⋈⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	♁♁♁♁♁ ♁♁♁
8	▯▯▯▯▯▯ ▯▯▯▯▯	∩∩∩∩∩∩ ∩∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉☉ ☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	⋈⋈⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	♁♁♁♁♁♁ ♁♁♁♁
9	▯▯▯▯▯▯ ▯▯▯▯▯	∩∩∩∩∩∩ ∩∩∩∩∩∩	☉☉☉☉☉☉ ☉☉☉☉	⋈⋈⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	⋈⋈⋈⋈⋈⋈ ⋈⋈⋈⋈	♁♁♁♁♁♁♁ ♁♁♁♁

Hiéroglyphes égyptiens

Quelques exemples : à vous de jouer



$$1362 = ?$$

$$234 = ?$$

Quelques remarques

- système essentiellement additif

Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10

Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10
- lecture plus explicite, mais très longue

Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10
- lecture plus explicite, mais très longue
- plusieurs écritures possibles de 12 (IUI, UII, IIU)

Quelques remarques

- système essentiellement additif
- notion de paquets, base 10
- lecture plus explicite, mais très longue
- plusieurs écritures possibles de 12 (IUI, UII, IIU)
- grands nombres inaccessibles

Numération romaine

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1'000

$$XVI = 10 + 5 + 1 = 16$$

$$XIV = 10 + (5 - 1) = 14, \text{ car I est inférieur à V}$$

$$DIX = 500 + (10 - 1) = 509, \text{ car I est inférieur à X}$$

$$MMMMCMXCIX = 4\,999$$

MMMMDCCCLXXXVIII = 4888, nombre romain le plus long en quantité de symboles.

Numération romaine

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1'000

Quelques exemples : à vous de jouer

MMCIX = ?

CDIXV = ?

126 = ?

999 = ?

Quelques remarques

- système additif et soustractif

Quelques remarques

- système additif et soustractif
- notion de paquets, de 5 et de 10

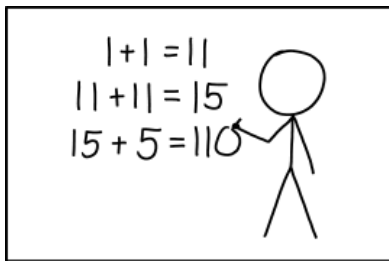
Quelques remarques

- système additif et soustractif
- notion de paquets, de 5 et de 10
- lectures très longues

Quelques remarques

- système additif et soustractif
- notion de paquets, de 5 et de 10
- lectures très longues
- grands nombres inaccessibles

Numération romaine



REMEMBER, ROMAN NUMERALS ARE ARCHAIC, SO ALWAYS REPLACE THEM WITH MODERN ONES WHEN DOING MATH.

On peut peut-être mieux faire...

Numération chinoise en bâtons

Série	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A							┌	┌┌	┌┌┌	┌┌┌┌
B		—	==	===	====	=====	└	└└	└└└	└└└└

La série A est utilisée pour les unités et les centaines

La série B est utilisée pour les dizaines et les milliers

Numération chinoise en bâtons

Série	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A							┌	┌┌	┌┌┌	┌┌┌┌
B		—	≡	≡≡	≡≡≡	≡≡≡≡	└	└└	└└└	└└└└

La série A est utilisée pour les unités et les centaines

La série B est utilisée pour les dizaines et les milliers

- 4 : ||||
- 72 : └ ||
- 256 : || ≡≡ ┌
- 308 : ||| ┌┌
- 1 007 : — ┌┌
- 81 753 : ┌┌┌ — ┌┌ ≡≡ |||
- 1,95 : | ≡≡ ||||

Numération chinoise en bâtons

Série	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A							┌	┌┌	┌┌┌	┌┌┌┌
B		—	==	≡	≡≡	≡≡≡	└	└└	└└└	└└└└

Quelques exemples : à vous de jouer

$$126 = ?$$

$$999 = ?$$

$$10008 = ?$$

Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification

Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification
- paquets de 10

Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification
- paquets de 10
- entrelacement de deux séries

Quelques remarques

- système positionnel : la place détermine la signification
- paquets de 10
- entrelacement de deux séries
- absence de caractères signifiante

Numération chinoise

一 二 三 四 五
1 2 3 4 5

六 七 八 九 十
6 7 8 9 10

十 百 千 万
10 100 1,000 10,000

Quelques exemples : à vous de jouer

$$126 = ?$$

$$999 = ?$$

$$18030 = ?$$

Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10

Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10
- système quasi-positionnel, puissance de 10 indiquées

Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10
- système quasi-positionnel, puissance de 10 indiquées
- très grands multiplicateurs

Quelques remarques

- notion de paquets, en base 10
- système quasi-positionnel, puissance de 10 indiquées
- très grands multiplicateurs
- lecture orale transparente, sans irrégularité

Notre système de numération

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

Notre numération

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

Et 99999999 ?

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

Et 99999999 ?

Deux grand principes

Que veut dire 7 ? comment l'expliquer à un enfant ?

Et 123 ?

Et 99999999 ?

Deux grand principes

- décimal
- positionnel

Principe décimal

Les nombres sont organisés en **paquets de 10** :

- dix unités font une dizaine
- dix dizaines font une centaine
- dix centaines font un millier...

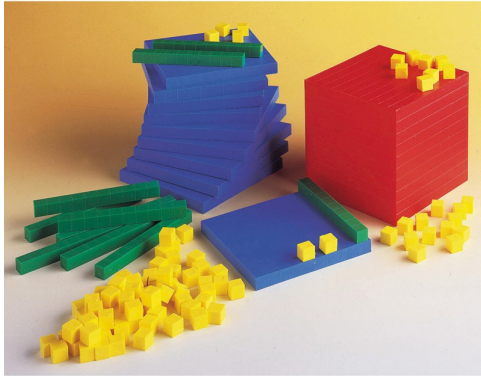
Principe décimal

Les nombres sont organisés en **paquets de 10** :

- dix unités font une dizaine
- dix dizaines font une centaine
- dix centaines font un millier...

Les grands nombres sont organisés par **paquets de 1000**

Principe décimal



Principe positionnel

La place du chiffre dans le nombre change sa valeur !

Pour les égyptiens, IU = UI

Pour nous, 10 n'est pas 01

Photo de boulier

Numération décimale de position

$$324 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Diagram illustrating the decomposition of the number 324 into its place values:

- 3 (hundreds) $\times 10^2$
- 2 (tens) $\times 10^1$
- 4 (units) $\times 10^0$

Labels for place values:

- centaines (hundreds)
- dizaines (tens)
- unités (units)

Grands nombres

Numération des grands nombres

Comment lire 8736846068308764868036806 ?

Numération des grands nombres

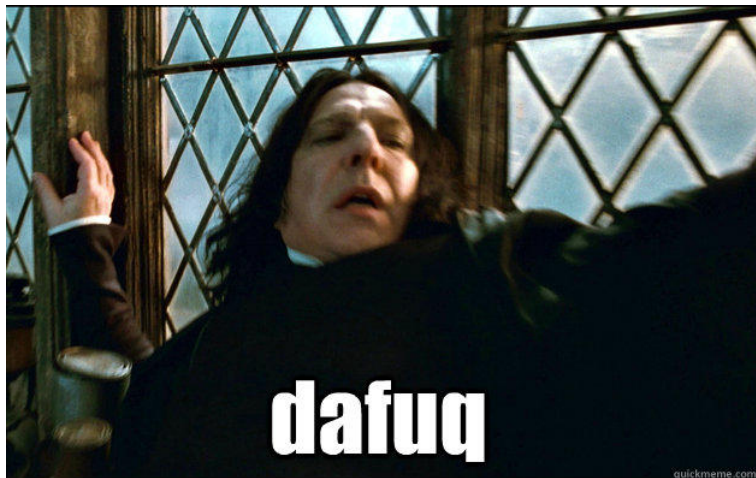
Comment lire 8736846068308764868036806 ?

Les grands nombres sont dénommés à chaque facteur **1000**

Il y a en français une **double échelle** :

- mille milliers font un million
- mille millions font un milliard
- mille milliard font un billion
- mille billions font un billiard...

Numération des grands nombres



Échelle des -ions

- un million de millions font un billion
- un million de billions font un trillion
- un million de trillions font un quadrillions...

Échelle des -iards

- un million de milliards font un billion
- un million de billiards font un trillion
- un million de trilliards font un quadrilliard...

Les paquets se font par 10... mais pourraient se faire par 2, 3, 16...

Autres bases

Les paquets se font par 10... mais pourraient se faire par 2, 3, 16...

En base b , un nombre s'écrit

$$\overline{a_n \cdots a_0} = [a_n \cdots a_0]_b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

Les paquets se font par 10... mais pourraient se faire par 2, 3, 16...

En base b , un nombre s'écrit

$$\overline{a_n \cdots a_0} = [a_n \cdots a_0]_b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

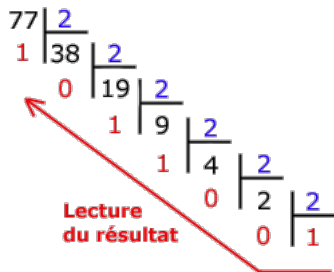
À vous de jouer !

Écrivez 77 en base 2

Écrivez 367 en base 5

Écrivez 2022 en base 2022

Bases et divisions euclidiennes



$$[77]_2 = [1001101]_2$$

Avantages du système positionnel

Avantages du système positionnel

- compact
- opératoire
- peu de symboles

Avantages du système positionnel

- compact
- opératoire
- peu de symboles

Inconvénients du système positionnel

Avantages du système positionnel

- compact
- opératoire
- peu de symboles

Inconvénients du système positionnel

- abstrait
- lecture non transparente
- problème du zéro

Définition : $10^n = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$

Multiplication : $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$

Puissances : $(10^n)^m = 10^{mn}$

Le cœur de nos algorithmes de calcul

Les algorithmes de calcul reposent fondamentalement sur les propriétés du système positionnel !

Le cœur de nos algorithmes de calcul

Les algorithmes de calcul reposent fondamentalement sur les propriétés du système positionnel !

Exercice : pourquoi ?

En informatique

Système binaire

Système **binaire** : système de numération en **base 2**

Les chiffres sont appelés **bits** (binary digits) : 0 et 1

Système binaire

Système **binaire** : système de numération en **base 2**

Les chiffres sont appelés **bits** (binary digits) : 0 et 1

Intérêt : modélise très bien

- l'électronique numérique
- les valeurs de vérité

Système binaire

Système **binaire** : système de numération en **base 2**

Les chiffres sont appelés **bits** (binary digits) : 0 et 1

Intérêt : modélise très bien

- l'électronique numérique
- les valeurs de vérité

Exemples : $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$, $11 + 1 = 100$, etc.

Système hexadécimal

Système **hexadécimal** : en **base 16**

Système hexadécimal

Système **hexadécimal** : en **base 16**

Intérêts

- écritures bien plus compactes que le binaire
- traiter les bits par paquets de 4

Système hexadécimal

Système **hexadécimal** : en base 16

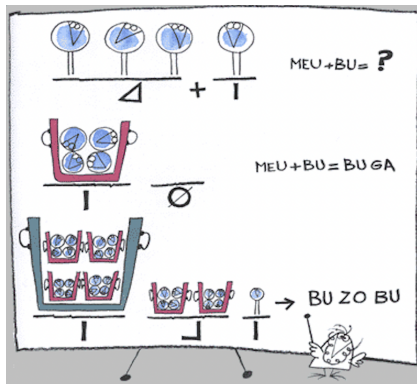
Intérêts

- écritures bien plus compactes que le binaire
- traiter les bits par paquets de 4

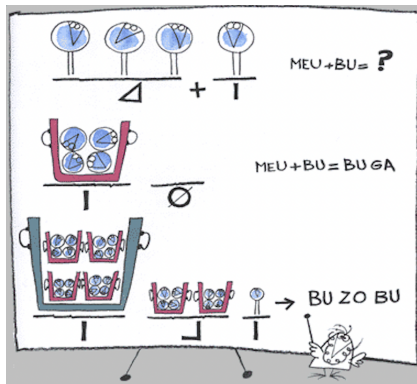
Exemple : $\overline{15AACF7}^1_6 = \overline{1010110101010110011110111}^2$

D'autres systèmes ?

Numération Shadok



Numération Shadok



Vous avez toutes les informations pour traduire :

108 = ?

MOBUGABU = ?

Le bibi-binaire de Bobby Lapointe

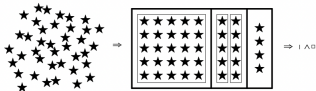
Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexadécimal [0-9A-F]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Répartition	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 1 1	0 1 1 0	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 0 0	0 1 1 1	0 1 1 0	0 1 1 1	0 1 1 0	0 1 1 1
Notation bibi-binaire	○	∩	∪	∩	∪	∩	∪	∩	∪	∩	∪	∩	∪	∩	∪	∩
Prononciation	HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI

Les Cincfiles (CRPE Lille)

Exercice 1 – Numération (CRPE Académie de Lille, 2005) L'écriture des nombres chez les Cincfiles

Dans la tribu des Cincfiles, on a une manière particulière de compter. Lors d'un voyage dans cette tribu, un chercheur a ramené un certain nombre d'observations qu'il a retranscrites dans un carnet. Voici ce qu'il a noté sur la manière de compter des Cincfiles :

- C'est une numération de position;
- Il n'y a que 5 symboles pour noter les nombres :
 - qui correspond à notre 0
 - ∩ qui correspond à notre 1
 - ∧ qui correspond à notre 2
 - ∇ qui correspond à notre 3
 - ◻ qui correspond à notre 4.
- Une observation :



- Des exemples de transcriptions :

∩ ∇	◻ ◻ ∧	∧ • ◻	∥ ∇ ◻
8	22	54	169

1. En expliquant votre démarche :
 - a) Transcrire dans notre système de numération le nombre noté par les Cincfiles « ◻ ◻ ◻ ».
 - b) Transcrire dans le système Cincfile le nombre que nous notons « 273 ».
2. Sans passer par une transcription dans notre système de numération décimale et en justifiant votre réponse, écrire :
 - a) le nombre qui précède le nombre « ∇ ◻ • » dans le système Cincfile;
 - b) le nombre qui suit le nombre « ∧ ◻ ◻ » dans le système Cincfile.

Ces deux derniers nombres seront donnés en écriture Cincfile.

Merci !

Des questions ?