Logique et raisonnement

De multiples façons de penser ?

Didier Lesesvre

Petit aperçu

- Mathématiques et logique
  - Types de raisonnement
  - Raisonnement inférentiel
  - Logique et théorèmes
  - Logique formelle
- Didactique et activités
  - Programmes et situations-problèmes
  - Différents raisonnements
  - Différentes activités
  - Problèmes pour apprendre et pour chercher

Dans les programmes

Les six compétences du socle

- Communiquer
- Raisonner
- Calculer
- Représenter
- Modéliser
- Chercher

La compétence raisonner

Les six compétences du socle

- Communiquer
- **Raisonner**
- Calculer
- Représenter
- Modéliser
- Chercher

Chacune des étapes de résolution d'un problème (compréhension de l'énoncé et de la consigne, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au **raisonnement**, processus mental permettant d'**effectuer des inférences**.

On rappelle que « démontrer », c'est « donner à voir » les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent.

Document d'accompagnement, "Raisonner", Cycle 4

Programmes et documents officiels

Chacune des étapes de résolution d'un problème (compréhension de l'énoncé et de la consigne, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au **raisonnement**, processus mental permettant d'**effectuer des inférences**.

On rappelle que « démontrer », c'est « donner à voir » les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent.

Document d'accompagnement, "Raisonner", Cycle 4

Mais quels liens logiques ?

Quelques types de raisonnement

Les types de raisonnement

- Inductif
- Abductif
- Déductif
- Par l'absurde
- Contre-exemples
- Par récurrence, contraposition, analogie ...

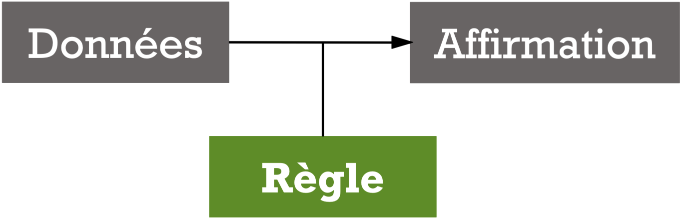
Les types de raisonnement

- Inductif
- Abductif
- Déductif
- Par l'absurde
- Contre-exemples
- Par récurrence, contraposition, analogie ...

"Il importe également de **ne pas cantonner la démarche de raisonnement à sa seule forme déductive** et de ne pas la limiter à un thème particulier des mathématiques (traditionnellement celui de géométrie), mais bien de la placer au cœur de toute activité mathématique." (Document d'accompagnement "Raisonner")

Raisonnement inductif

Raisonnement inductif : généraliser une propriété observée sur des cas particuliers. On part des faits et on en déduit une loi.



Constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on devine (par induction) que "A implique B" est vraie.

Raisonnement inductif

Raisonnement inductif : généraliser une propriété observée sur des cas particuliers. On part des faits et on en déduit une loi.

n	n^2-n+11
0	11
1	11
2	13
3	17
4	23
5	31
6	41
7	53

11; 13; 17; 23; 31; 41; 53 sont des nombres premiers

n^2-n+11 est toujours un nombre premier

Constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on devine (par induction) que "A implique B" est vraie.

Attention : la conclusion n'est pas nécessairement vraie !

Raisonnement inductif – exemples

Jules est un chat, il miaule

Lulu est un chat, il miaule

On peut induire que « si Y est un chat alors il miaule »

Raisonnement inductif – exemples

Jules est un chat, il miaule

Lulu est un chat, il miaule

On peut induire que « si Y est un chat alors il miaule »

Cependant, même si la généralisation tient un rôle déterminant elle ne peut à elle seule conduire à des inductions sûres :

ce rectangle est rouge

ce losange est rouge

Conclusion (induction) le propriété cherchée est d'être rouge

Raisonnement inductif – exemples

Jules est un chat, il miaule

Lulu est un chat, il miaule

On peut induire que « si Y est un chat alors il miaule »

Cependant, même si la généralisation tient un rôle déterminant elle ne peut à elle seule conduire à des inductions sûres :

ce rectangle est rouge

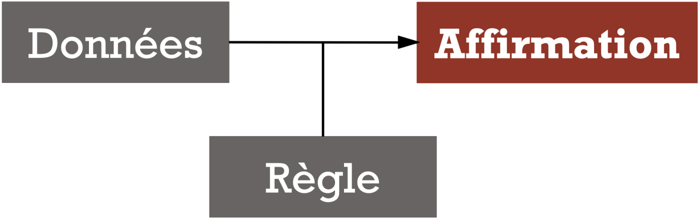
ce losange est rouge

Conclusion (induction) le propriété cherchée est d'être rouge

C'est par la spécialisation que l'élève va pouvoir exclure des exemples du groupe. En se confrontant à plus d'exemples, il faut raffiner, **revoir ses hypothèses**. (cf. Britt-Mari Barth)

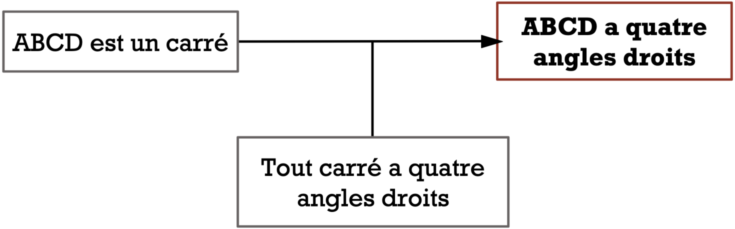
Raisonnement déductif

Raisonnement déductif : on part d'une loi et on en déduit des faits. Le raisonnement déductif fonctionne par des **syllogismes**.



Raisonnement déductif

Raisonnement déductif : on part d'une loi et on en déduit des faits. Le raisonnement déductif fonctionne par des **syllogismes**.



Raisonnement déductif – exemples

Tous les êtres humains sont mortels

Je suis un être humain

Conclusion (déduction) : Je suis un mortel

Raisonnement déductif – exemples

Tous les êtres humains sont mortels

Je suis un être humain

Conclusion (déduction) : Je suis un mortel

Dès la maternelle des travaux sont effectués par la résolution de problèmes pour construire un raisonnement déductif correct tel que le jeu du portrait :

Raisonnement abductif

Raisonnement abductif : présumer une cause plausible d'un résultat observé. On part d'une de faits et de connaissance de lois et on devine des causes probables.

Il fonctionne selon le schéma suivant : pour démontrer que B est vraie, sachant que "A implique B" est vraie, on conclut que A est (probablement) vraie.

Raisonnement abductif – exemples

Il y avait un sac de billes sur la table

Le sol est jonché de billes

Conclusion (par abduction) : ce sont les billes du sac

Raisonnement abductif – exemples

Il y avait un sac de billes sur la table

Le sol est jonché de billes

Conclusion (par abduction) : ce sont les billes du sac

Le manque de goût est un symptôme du Covid

Julie manque de goût

Conclusion (par abduction) : Julie a le Covid

Raisonnement abductif – exemples

Il y avait un sac de billes sur la table

Le sol est jonché de billes

Conclusion (par abduction) : ce sont les billes du sac

Le manque de goût est un symptôme du Covid

Julie manque de goût

Conclusion (par abduction) : Julie a le Covid

C'est le mode de raisonnement du **diagnostic médical**

Abduction et chaînage arrière

Le raisonnement abductif est notamment utilisé sous forme d'une analyse remontante, encore appelé **chaînage arrière**.

À partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou plusieurs propriétés (conditions suffisantes) qui, si elle(s) étaient établie(s), permettrai(en)t d'atteindre le résultat par application d'un théorème identifié.

Abduction et chaînage arrière

Le raisonnement abductif est notamment utilisé sous forme d'une analyse remontante, encore appelé **chaînage arrière**.

À partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou plusieurs propriétés (conditions suffisantes) qui, si elle(s) étaient établie(s), permettrai(en)t d'atteindre le résultat par application d'un théorème identifié.

On substitue alors momentanément au problème de départ un (ou plusieurs) nouveau(x) problème(s) consistant à établir ces conditions intermédiaires.

Disjonction de cas

Partitionner **tous** les cas possibles et étudier les propriétés

Disjonction de cas

Partitionner **tous** les cas possibles et étudier les propriétés

Exemple

Si n est pair, $n(n^2+3)$ est pair

Si n est impair, $n(n^2+3)$ est pair

Conclusion (par disjonction de cas) : $n(n^2+3)$ est pair

Raisonnement par l'absurde

Principe du **tiers exclu** : une propriété ne peut être vraie **et** fausse

Raisonnement par l'absurde

Principe du **tiers exclu** : une propriété ne peut être vraie **et** fausse

Démarche

On **suppose** que ce qu'on veut prouver est faux

On cherche ce qui découle de cette supposition

On obtient une **absurdité**

Conclusion : la supposition était fausse, et ce qu'on voulait prouver est donc vrai

Raisonnement par l'absurde

Principe du **tiers exclu** : une propriété ne peut être vraie **et** fausse

Démarche

On **suppose** que ce qu'on veut prouver est faux
On cherche ce qui découle de cette supposition
On obtient une **absurdité**

Conclusion : la supposition était fausse, et ce qu'on voulait prouver est donc vrai

Exemple : 0 n'a pas d'inverse

Supposons que c'était le cas
Il existerait un réel a tel que $0 \times a = 1$
on aboutirait alors à l'égalité $0 = 1$ (contradiction)

Conclusion (par l'absurde) : 0 n'a pas d'inverse

Le contre-exemple

On considère une affirmation du type

P : « pour tout x, la propriété $P(x)$ est vraie »

Le contre-exemple

On considère une affirmation du type

P : « pour tout x, la propriété $P(x)$ est vraie »

- pour montrer que P est vraie, il faut la vérifier pour **tous** les x
- pour montrer que P est fausse, il suffit de montrer qu'elle n'est pas vérifiée pour **un** x (contre-exemple)

Le contre-exemple

On considère une affirmation du type

P : « pour tout x, la propriété $P(x)$ est vraie »

- pour montrer que P est vraie, il faut la vérifier pour **tous** les x
- pour montrer que P est fausse, il suffit de montrer qu'elle n'est pas vérifiée pour **un** x (contre-exemple)

"tous les chats sont blancs"

Faux : il existe un chat noir

"deux rectangles de même aire ont le même périmètre"

Faux : il existe des contre-exemples (exercice !)

Le raisonnement inférentiel

Le modèle aristotélicien

La philosophie de la logique commence avec l'*Organon* d'Aristote

Déduction et inférences

Le modèle est le **syllogisme** aristotélicien :

la propriété A est vraie

si A est vraie, alors B est vraie

Conclusion (par syllogisme) : B est vraie

Déduction et inférences

Le modèle est le **syllogisme** aristotélicien :

la propriété A est vraie

si A est vraie, alors B est vraie

Conclusion (par syllogisme) : B est vraie

De manière **symbolique** :

A

$A \Longrightarrow B$

B

Syllogismes – exemples

tous les hommes sont mortels

Socrate est un homme

Socrate est mortel

Syllogismes – exemples

tous les hommes sont mortels

Socrate est un homme

Socrate est mortel

tous les carrés sont des losanges

ABCD est un carré

ABCD est un losange

Syntaxe et sémantique

Ce syllogisme **respecte la règle**, donc est valide :

Les herbivores mangent de la viande

Les vaches sont des herbivores

Les vaches mangent de la viande

Syntaxe et sémantique

Ce syllogisme **respecte la règle**, donc est valide :

Les herbivores mangent de la viande

Les vaches sont des herbivores

Les vaches mangent de la viande

La suite de phrases est valide d'un point de vue logique mais fausse d'un point de vue sémantique. Selon Piaget les enfants ne sont pas capables de passer outre la fausseté sémantique avant l'âge de 12 ans, lors du stade des "opérations formelles".

Syntaxe et sémantique

Ce syllogisme **respecte la règle**, donc est valide :

Les herbivores mangent de la viande

Les vaches sont des herbivores

Les vaches mangent de la viande

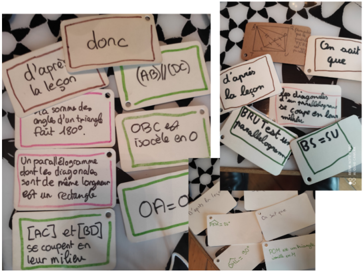
La suite de phrases est valide d'un point de vue logique mais fausse d'un point de vue sémantique. Selon Piaget les enfants ne sont pas capables de passer outre la fausseté sémantique avant l'âge de 12 ans, lors du stade des "opérations formelles".

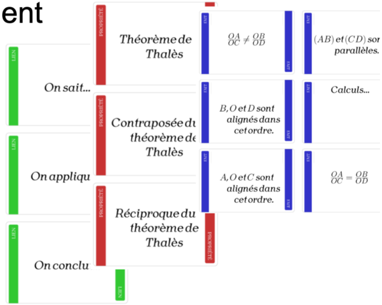
Il faut distinguer validité (syntaxique) et vérité (sémantique)

Raisonnement matérialisé par des cartes

Mise en place et déroulement

Découverte du jeu - Règles





Création d'un set de cartes par les élèves

Limites du syllogisme

John Stuart Mill : **en pratique**, un syllogisme déductif est rarement applicable sans une part (plus ou moins escamotée) d'**induction**.

Ainsi, le célèbre syllogisme

Tous les hommes sont mortels

Socrate est un homme

Socrate est mortel

repose sur la validité de la prémisse « les hommes sont mortels », qui n'est pas vérifiable. Par conséquent, le syllogisme classique est lui-même un **paralogisme**.

Paralogismes : le gruyère

Paralogisme : raisonnement par syllogisme qui est **faux**

Plus il y a de fromage, plus il y a de trous

Plus il y a de trous, moins il y a de fromage

Plus il y a de fromage, moins il y a de fromage

Paralogismes : le gruyère

Paralogisme : raisonnement par syllogisme qui est **faux**

Plus il y a de fromage, plus il y a de trous

Plus il y a de trous, moins il y a de fromage

Plus il y a de fromage, moins il y a de fromage

Problème : Le "fromage" admet deux sens différents selon la prémisse : son volume (apparence extérieure) dans la première, et son volume réel (sans les trous) pour la seconde.

Paralogismes : le gruyère

Quelques dangers

Implication et conséquence

"Si A alors B" ne signifie **pas** "A donc B" !

Implication et conséquence

"Si A alors B" ne signifie **pas** "A donc B" !

Dans "A donc B", on a deux informations (sous-entendues) :

- A est vraie
- si A est vraie, alors B est vraie

Implication et conséquence

"Si A alors B" ne signifie **pas** "A donc B" !

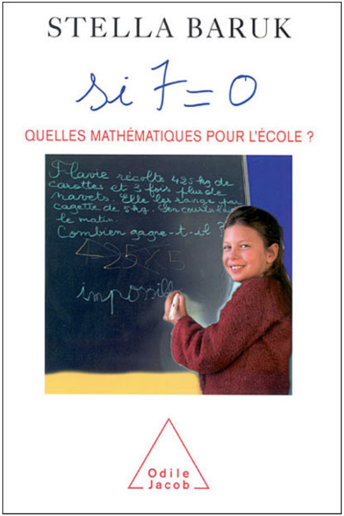
Dans "A donc B", on a deux informations (sous-entendues) :

- A est vraie
- si A est vraie, alors B est vraie

Dans "Si A alors B", on ne suppose rien sur la vérité de A ou B

- si je gagne au loto, alors je partirai en voyage
- si vous avez fini, alors vous pouvez sortir
- si $7 = 0$, alors $1 = 0$

Si $7 = 0$


STELLA BARUK
si 7 = 0
QUELLES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE ?
Odile
Jacob

Symboles $\Longrightarrow$, etc.

Symboles logiques : $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$, etc.

Symboles $\Longrightarrow$, etc.

Symboles logiques : $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$, etc.

Attention : n'utilisez **jamais** ces symboles !

Symboles $\Longrightarrow$, etc.

Symboles logiques : $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$, etc.

Attention : n'utilisez **jamais** ces symboles !

- jamais avec les élèves (ils ne sont jamais définis)
- jamais au concours (vous allez vous tromper)

Symboles $\Longrightarrow$, etc.

Symboles logiques : $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$, etc.

Attention : n'utilisez **jamais** ces symboles !

- jamais avec les élèves (ils ne sont jamais définis)
- jamais au concours (vous allez vous tromper)

Exemple : Dans un problème, on a prouvé que ABCD est un carré. Il reste à conclure que ABCD est un rectangle.

- "Si ABCD est un carré $\Longrightarrow$ ABCD est un rectangle" **NON**
- "ABCD est un carré $\Longrightarrow$ ABCD est un rectangle" **NON**
- "ABCD est un carré donc ABCD est un rectangle"

Symboles $\Longrightarrow$, etc.

Symboles logiques : $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$, etc.

Attention : n'utilisez **jamais** ces symboles !

- jamais avec les élèves (ils ne sont jamais définis)
- jamais au concours (vous allez vous tromper)

Exemple : Dans un problème, on a prouvé que ABCD est un carré. Il reste à conclure que ABCD est un rectangle.

- "Si ABCD est un carré $\Longrightarrow$ ABCD est un rectangle" **NON**
- "ABCD est un carré $\Longrightarrow$ ABCD est un rectangle" **NON**
- "ABCD est un carré donc ABCD est un rectangle"

Vous utilisez $\Longrightarrow$ pour dire "donc", ce n'est **pas** sa signification !

La logique des théorèmes

Propositions et théorèmes

Une **proposition** est un énoncé logique dépendant de variables

- P : "l'élève est un garçon"
- Q : "$x + 1 = 0$

Propositions et théorèmes

Une **proposition** est un énoncé logique dépendant de variables

- P : "l'élève est un garçon"
- Q : "$x + 1 = 0$

Elle peut être vraie ou fausse en fonction des variables :

- P(paul) est vraie
- P(sophie) est fausse

Propositions et théorèmes

Une **proposition** est un énoncé logique dépendant de variables

- P : "l'élève est un garçon"
- Q : "$x + 1 = 0$

Elle peut être vraie ou fausse en fonction des variables :

- P(paul) est vraie
- P(sophie) est fausse
- Q(13) est fausse
- Q(-1) est vraie

Propositions et théorèmes

Une **proposition** est un énoncé logique dépendant de variables

- P : "l'élève est un garçon"
- Q : "$x + 1 = 0$

Elle peut être vraie ou fausse en fonction des variables :

- P(paul) est vraie
- P(sophie) est fausse
- Q(13) est fausse
- Q(-1) est vraie

Une proposition vraie pour toutes les variables est un **théorème**

Table de vérité

Table de vérité

On peut utiliser une table de vérité pour **visualiser** la valeur de vérité d'une proposition en fonction de ses variables

Exemple : P est la proposition "X ou Y est vraie"

X	Y	P
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table de vérité

On peut utiliser une table de vérité pour **visualiser** la valeur de vérité d'une proposition en fonction de ses variables

Exemple : P est la proposition "X ou Y est vraie"

X	Y	P
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemple : "Je réussis le concours ou je pars en vacances"

Négation

$\neg$ est le symbole logique « non »

La négation d'une propriété P est la propriété $\overline{P}$ qui est vraie si et seulement si P est fausse

Négation

$\neg$ est le symbole logique « non »

La négation d'une propriété P est la propriété $\overline{P}$ qui est vraie si et seulement si P est fausse

La table de vérité de $\neg P$ est *complémentaire* de celle de P

X	Y	P	$\neg P$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Implications, réciproques, contraposées

Implication : $A \implies B$ (« si A, alors B »)

Réciproque : $B \implies A$ (« si B, alors A »)

Contraposée : $\neg B \implies \neg A$ (« si non(B), alors non(A) »)

Conjonction : $\wedge$ (« et »)

Disjonction : $\vee$ (« ou »)

L'implication et la réciproque

L'implication et la réciproque ne sont **pas** équivalentes !

L'implication et la réciproque

L'implication et la réciproque ne sont **pas** équivalentes !

Exemples

- "si je suis un chat, alors je suis un animal" est vrai
- "si je suis un animal, alors je suis un chat" est faux

L'implication et la réciproque

L'implication et la réciproque ne sont **pas** équivalentes !

Exemples

- "si je suis un chat, alors je suis un animal" est vrai
- "si je suis un animal, alors je suis un chat" est faux
- "si je suis un carré, alors je suis un losange" est vrai
- "si je suis un losange, alors je suis un carré" est faux

L'implication et la contraposée

L'implication et la contraposée **sont** équivalentes !

L'implication et la contraposée

L'implication et la contraposée **sont** équivalentes !

Exemples

- "si je suis un chat, alors je suis un animal" est vraie
- "si je ne suis pas un animal, alors je ne suis pas un chat" est vraie

L'implication et la contraposée

L'implication et la contraposée **sont** équivalentes !

Exemples

- "si je suis un chat, alors je suis un animal" est vraie
- "si je ne suis pas un animal, alors je ne suis pas un chat" est vraie
- "si je suis un carré, alors je suis un losange"
- "si je ne suis pas un losange, alors je ne suis pas un carré"

Un petit exercice

■ **Énoncé**

NUL est un triangle tel que NU = 42 cm ; LU = 46 cm et LN = 62 cm.
Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

On sait que $42^2 + 46^2 \neq 62^2$

Un petit exercice

Énoncé

NUL est un triangle tel que NU = 42 cm ; LU = 46 cm et LN = 62 cm.
Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

On sait que $42^2 + 46^2 \neq 62^2$

Attention : on utilise le théorème de Pythagore, **pas** sa réciproque !

Logique formelle

ou comment calculer avec des raisonnements

La logique formelle

- permet de **"calculer"** avec le raisonnement
- est très utilisé en informatique théorique (thèse de Church, sécurité, lambda calcul, etc.)

Implication et tables de vérité

L'implication $A \implies B$ est **définie** comme $\neg A \vee B$

Implication et tables de vérité

L'implication $A \implies B$ est **définie** comme $\neg A \vee B$

A	B	$\neg A \vee B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implication et tables de vérité

L'implication $A \Longrightarrow B$ est **définie** comme $\neg A \vee B$

A	B	$\neg A \vee B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- A : je gagne au loto
- B : j'achète une maison

Retour sur les contraposées

Par définition, la contraposée est

$$\neg B \Longrightarrow \neg A$$

Retour sur les contraposées

Par définition, la contraposée est

$$\neg B \Longrightarrow \neg A$$

c'est-à-dire, par définition de l'implication,

$$\neg(\neg B) \vee \neg A \quad \text{i.e.} \quad B \vee \neg A \quad \text{i.e.} \quad A \Longrightarrow B$$

Retour sur les contraposées

Par définition, la contraposée est

$$\neg B \Longrightarrow \neg A$$

c'est-à-dire, par définition de l'implication,

$$\neg(\neg B) \vee \neg A \quad \text{i.e.} \quad B \vee \neg A \quad \text{i.e.} \quad A \Longrightarrow B$$

Conclusion : L'implication et sa contraposée sont équivalentes $\square$

Quelques symboles

$\forall$: « pour tout », quantificateur universel

$\exists$: « il existe », quantificateur existentiel

Quelques symboles

$\forall$: « pour tout », quantificateur universel

$\exists$: « il existe », quantificateur existentiel

Exemple : tout entier admet un entier qui lui est supérieur

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m > n$$

Calcul syntaxique

Quelle est la négation de

« Dans chaque école il y a des élèves dont tous les cahiers ont au moins une page rouge ainsi qu'une page bleue » ?

Calcul syntaxique

Quelle est la négation de

« Dans chaque école il y a des élèves dont tous les cahiers ont au moins une page rouge ainsi qu'une page bleue » ?

Traduction quantifiée

$$\forall E, \exists e \in E, \forall c \in C_e, (\exists p_1 \in C_e \text{ rouge}) \wedge (\exists p_2 \in C_e \text{ bleue})$$

Négation

$$\exists E, \forall e \in E, \exists c \in C_e, (\forall p_1 \in C_e \text{ non rouge}) \vee (\forall p_2 \in C_e \text{ non bleue})$$

La négation est donc

« Il existe une école dans laquelle chaque élève a un cahier dont aucune page n'est rouge ou aucune page n'est bleue »

Et au primaire ?

Les situations-problèmes et le raisonnement

Dès la maternelle

Dans les 5 domaines d'apprentissage :

- Construire les premiers outils pour **structurer sa pensée**
  - Évaluer et comparer des collections
  - Réaliser une collection dont le cardinal est donné
- **Explorer le monde**
  - Situer des événements vécus les uns par rapport aux autres
  - Ordonner une suite de photographies ou d'images

Résolution de problèmes

"La résolution de problèmes doit être au **cœur de l'activité mathématique** des élèves tout au long de la scolarité obligatoire."

Résolution de problèmes

"La résolution de problèmes doit être au **cœur de l'activité mathématique** des élèves tout au long de la scolarité obligatoire."

Un **problème** se caractérise par (Jean Brun) :

- une situation initiale et un but à atteindre
- une suite d'actions ou d'opérations nécessaire
- solution non disponible d'emblée mais à construire

Différents problèmes, différentes fonctions

Fonctions	PROBLÈMES POUR APPRENDRE			PROBLÈMES POUR CHERCHER
	Situation problème	Problème d'application directe	Problème de réinvestissement/ transfert	Problème ouvert
Types de problèmes	Problème dont la résolution vise la **construction d'une nouvelle connaissance** ou d'un nouvel aspect d'une connaissance antérieure.	Problème destiné à **s'entrainer** à maîtriser le sens d'une connaissance nouvelle.	Problème complexe nécessitant **l'utilisation de plusieurs connaissances** construites dans différents contextes.	Problème centré sur le **développement des capacités à chercher** : en général, les élèves ne connaissent pas la solution experte.

Raisonner en situation-problème

Les situations proposées doivent ménager à la fois

- des temps de recherche
- des temps d'expérimentation, permettant de conjecturer
- des temps de mise en commun, d'argumentation
- des temps de mise en forme (démonstrations, institutionnalisation)

Raisonner en situation-problème

Les situations proposées doivent ménager à la fois

- des temps de recherche
- des temps d'expérimentation, permettant de conjecturer
- des temps de mise en commun, d'argumentation
- des temps de mise en forme (démonstrations, institutionnalisation)

Énoncé bref, et éviter d'induire la démarche/solution !

Développer la pensée logique à la maternelle

- Pas de verbalisation
- Pas de raisonnement formel

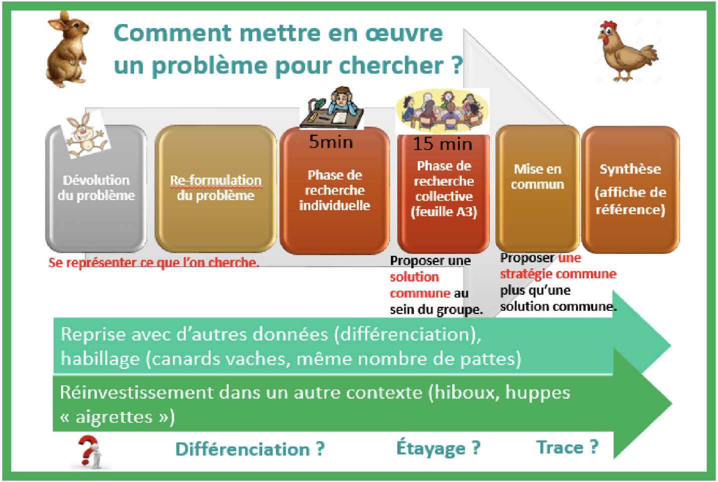
Développer la pensée logique à la maternelle

- Pas de verbalisation
- Pas de raisonnement formel

En proposant aux enfants des situations qui leur offrent l'occasion d'effectuer des tris, des rangements, des mises en relation, on les aide à structurer leurs représentations et à se dégager de leurs perceptions immédiates

Ces situations vécues dans la classe vont les obliger à focaliser leur attention sur tel ou tel aspect de l'objet, à privilégier la relation ou les relations entre les objets

Déroulement d'une séance "recherche"



Phases de la recherche

Phases de la recherche

- phase de **découverte**, d'identification
  - nécessaire à la dévolution
  - phase de manipulation libre pour s'approprier le matériel

Phases de la recherche

- phase de **découverte**, d'identification
  - nécessaire à la dévolution
  - phase de manipulation libre pour s'approprier le matériel
- phase de **recherche**
  - défi, autonomie : véritable activité de recherche mathématique
  - compréhensions nouvelles

Phases de la recherche

- phase de **découverte**, d'identification
  - nécessaire à la dévolution
  - phase de manipulation libre pour s'approprier le matériel
- phase de **recherche**
  - défi, autonomie : véritable activité de recherche mathématique
  - compréhensions nouvelles
- phase de **familiarisation**
  - utilise des savoirs partiellement/totalement acquis

Types de raisonnement

Exemples d'activités et de progressions

Trois types de raisonnement

Au primaire

- Par essais et ajustements
- Par exploration exhaustive (organisée)
- Par recours à la déduction

Les trois doivent être rencontrés **régulièrement**

Canards et vaches (CP)

Poules lapins	Solution et différenciation **:**
Un fermier a des poules et des lapins. En regardant tous les animaux, il voit 25 têtes et 66 pattes. **Combien le fermier a-t-il de lapins et combien a-t-il de poules ?**	**Solution niveau 1 :** 5 têtes et 14 pattes **soit 2 lapins et 3 poules** (très peu d'écart diminue la difficulté) **Solution niveau 2 :** 14 têtes et 44 pattes **soit 8 lapins et 6 poules** **Solution niveau 3** : 25 têtes et 66 pattes **soit 8 lapins et 17 poules** **Solution niveau 4 :** 29 têtes et 76 pattes **soit 9 lapins et 20 poules** (beaucoup d'écart augmente la difficulté)

Tirelire (CE2)

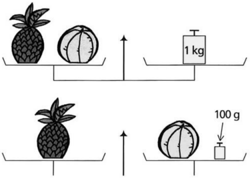
La tirelire Cycle 2	Solution et différenciation
Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces de monnaie. Il n'y a que des pièces de 1 euro et de 2 euros. Avec toutes ces pièces, je compte 50 euros. **Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?**	**14 pièces de 1 euro et 18 pièces de 2 euros** 14x1 + 18x2 = 14 + 36 = 50

Carrés et triangles (CM1)

Carrés triangles	solution
On dispose d'un jeu de cartes avec sur chaque carte soit un carré dessiné, soit un triangle dessiné. 12 cartes sont piochées. Le nombre total de côtés des cartes est compté par l'enseignant et annoncé « 41 ». **Trouver le nombre de cartes portant des carrés et le nombre de cartes portant des triangles.**	**5 carrés et 7 triangles** 5x4 + 7x3=20 + 21 = 41

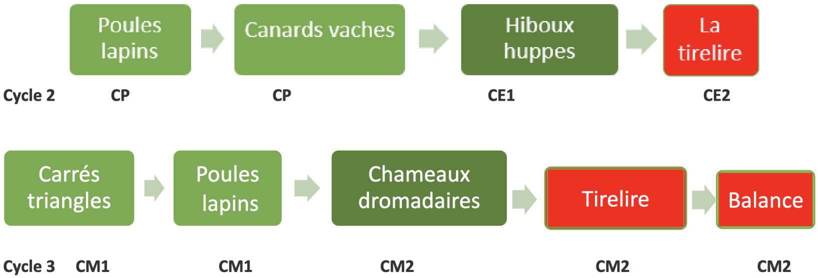
Par essais et ajustements

Balance et poids (CM2)

La balance	solution
Qwang a réalisé les deux pesées suivantes. **Combien pèse chaque objet ?**  	**L'ananas pèse 550 grammes** **Le ballon pèse 450 grammes** 550 + 450 = 1000

Par essais et ajustements

Résolution par essais et ajustements
(2 équations à 2 inconnues)



Par exploration exhaustive

Nombres avec 1, 2 et 4 (CE1)

<table>
<tr><th>Tous les nombres avec 1, 2 et 4</th><th>Solution</th></tr>
<tr><td>Construis tous les nombres possibles avec les chiffres 1, 2 et 4.
Attention l’écriture ne doit contenir qu’une seule fois chaque chiffre.</td><td>
<table><tr><th>1</th><th>2</th><th>4</th></tr></table>
<table><tr><th>12</th><th>21</th><th>41</th></tr><tr><td>14</td><td>24</td><td>42</td></tr></table>
<table><tr><th>124</th><th>214</th><th>412</th></tr><tr><td>142</td><td>241</td><td>421</td></tr></table>
</td></tr>
</table>

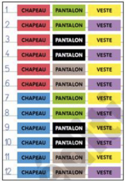
Par exploration exhaustive

Poignées de mains (CE1)

Les poignées de main	Solution
Quatre amis se rencontrent et se serrent la main. **Combien de poignées de main se donnent-ils ?**	 **6 possibilités**

Par exploration exhaustive

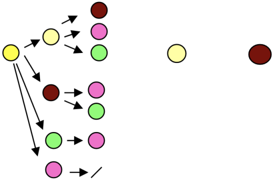
Costumes du clown (CE2)

Les costumes du clown	Solution
Pour se déguiser, un clown dispose de : - 2 chapeaux (un rouge, un bleu) ; - 2 vestes (une violette, une jaune) ; - 3 pantalons (un marron, un noir, un vert) **Combien de costumes*différents le clown peut-il faire ?** (* un costume, c'est un chapeau, une veste et un pantalon.)	**12 tenues** 

1	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
2	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
3	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
4	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
5	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
6	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
7	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
8	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
9	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
10	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
11	CHAPEAU	PANTALON	VESTE
12	CHAPEAU	PANTALON	VESTE

Par exploration exhaustive

Boules de glace (CM1)

Les glaces	Solution
Trouve tous les mélanges possibles de glaces à **trois boules différentes**, avec **cinq parfums** : citron, vanille, chocolat, fraise, pomme.	 **10 possibilités :**

Par exploration exhaustive

Cycle 2

Tous les nombres à 2 chiffres → Tous les nombres avec 1 et 2 et 4 → Les poignées de main → Les costumes du clown → Poules renards vipères

Cycle 3

Les glaces → Le blason de la cabane → Cornet de glace → Les tenues

Par recours à la déduction

Code secret (CE2)

Le code secret

Monsieur Laissou a un coffre-fort dont le code secret est composé de 3 chiffres différents. Mais il a oublié le code secret et il n'a pas réussi à ouvrir son coffre. Voilà les 5 essais qu'il a faits.

1er essai	**123**	→ Aucun chiffre n'était correct.
2e essai	**612**	→ Un seul chiffre était correct mais il était mal placé.
3e essai	**456**	→ Un seul chiffre était correct et il était bien placé.
4e essai	**574**	→ Un seul chiffre était correct et il était bien placé.
5e essai	**849**	→ Un seul chiffre était correct et il était bien placé.

Avec les informations données ci-dessus, monsieur Laissou peut retrouver son code secret.

Quel est le code secret du coffre-fort de monsieur Laissou ?

Solution

1	1	1
2	2	2
3	3	3
6	1	2
	6	6
4	5	6
5	7	4
8	4	9

Solution : 876

Par recours à la déduction

Poignées de mains (CM2)

Où suis-je ?

L'homme derrière moi a un plus grand chapeau que celui de Théo. Celui qui se tient devant moi ne s'appelle pas Max et son chapeau est plus petit que celui de Lucas.

Peux-tu me dire où je suis placé ainsi que Théo, Lucas et Max ?

Solution

	1	2	3	4
Moi	x	x	o	x
Lucas	x	x	x	o
Théo	x	o	x	x
Max	o	x	x	x

Des points de vigilance

Dévolution

L'enseignant doit constituer un milieu et assurer la **dévolution** du problème. Il propose aux élèves une situation porteuse de sens, liée à un obstacle repéré et surmontable, qui suscite un questionnement. Ce questionnement peut déboucher sur différentes stratégies et réponses recevables qui permettent à l'enseignant de faire émerger une règle, une loi ou un concept.

Dévolution

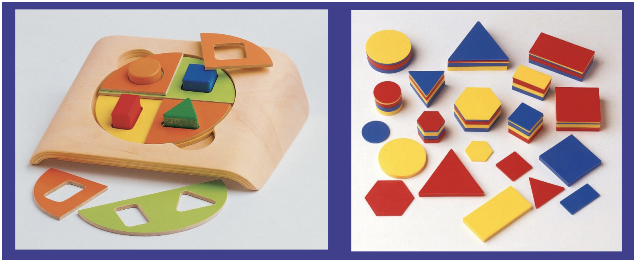
L'enseignant doit constituer un milieu et assurer la **dévolution** du problème. Il propose aux élèves une situation porteuse de sens, liée à un obstacle repéré et surmontable, qui suscite un questionnement. Ce questionnement peut déboucher sur différentes stratégies et réponses recevables qui permettent à l'enseignant de faire émerger une règle, une loi ou un concept.

L'élève doit **s'approprier le questionnement**

- par le matériel (orienté ou ouvert), posant le problème
- par l'exposition, momentanée ou non, du résultat attendu
- par la formulation d'une consigne (plus qu'orale !)
- par une situation inductive/d'interpolation

Dévolution

L'enseignant doit constituer un milieu et assurer la **dévolution** du problème. Il propose aux élèves une situation porteuse de sens, liée à un obstacle repéré et surmontable, qui suscite un questionnement. Ce questionnement peut déboucher sur différentes stratégies et réponses recevables qui permettent à l'enseignant de faire émerger une règle, une loi ou un concept.

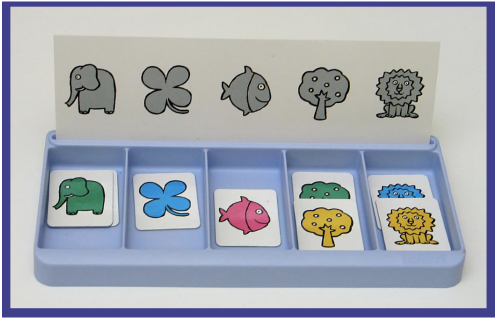


Dévolution

L'enseignant doit constituer un milieu et assurer la **dévolution** du problème. Il propose aux élèves une situation porteuse de sens, liée à un obstacle repéré et surmontable, qui suscite un questionnement. Ce questionnement peut déboucher sur différentes stratégies et réponses recevables qui permettent à l'enseignant de faire émerger une règle, une loi ou un concept.

Dévolution

L'enseignant doit constituer un milieu et assurer la **dévolution** du problème. Il propose aux élèves une situation porteuse de sens, liée à un obstacle repéré et surmontable, qui suscite un questionnement. Ce questionnement peut déboucher sur différentes stratégies et réponses recevables qui permettent à l'enseignant de faire émerger une règle, une loi ou un concept.



Favoriser l'engagement

- par la mise en valeur d'un **défi à relever**
- par le **droit à l'erreur**, la valorisation des procédures

Différencier les activités

Ajuster avec les **variables didactiques**

- Le modèle restera visible ou non
- Le nombre d'empilements
- Les pièces utilisée (détails à abstraire)
- Les pièces disponibles

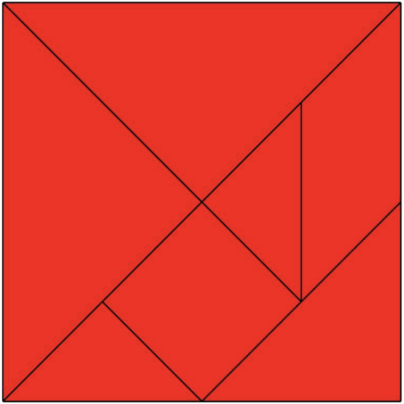
Exemples d'activités

Types de problèmes

- des problèmes « pour apprendre »
- des problèmes « pour chercher »

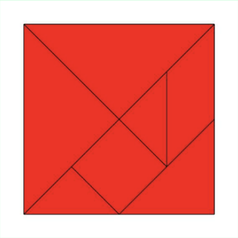
Tangram

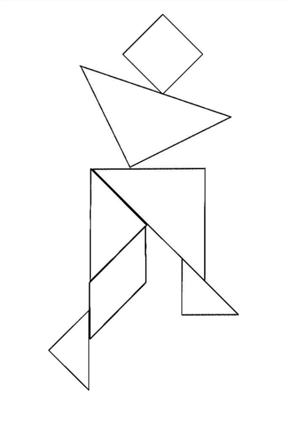
Tangram



Tangram : une dissection particulière du carré

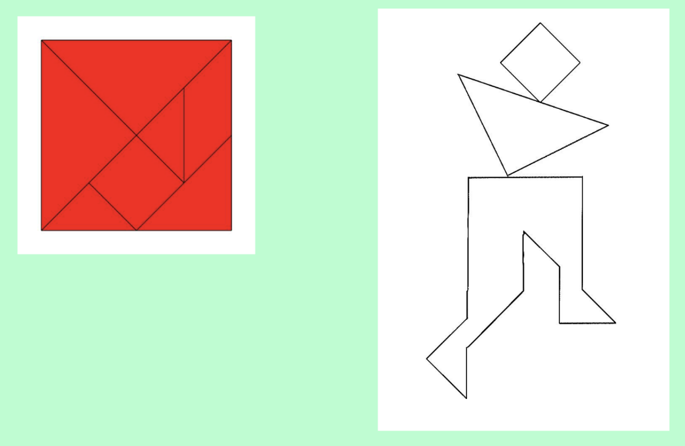
Tangram





Situation d'**apprentissage**

Tangram



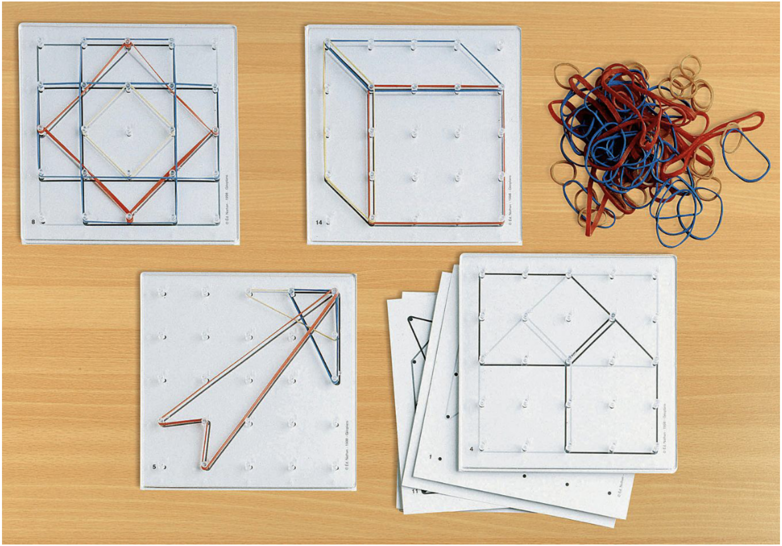
Situation de **recherche**

Variables didactiques

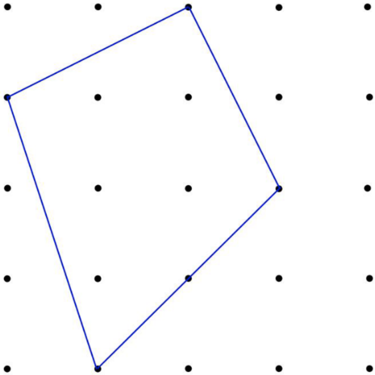
- Nombre de pièces
- Modèle accessible
- Complexité du modèle
- Séparation, lignes

Géoplan

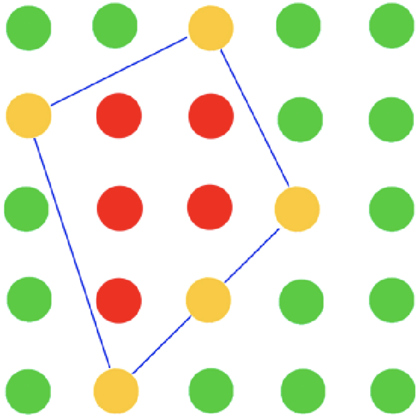
Géoplan



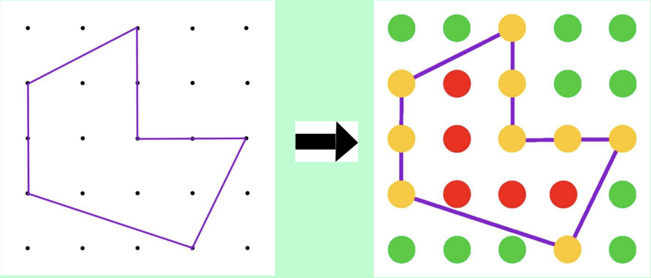
Géoplan



Géoplan

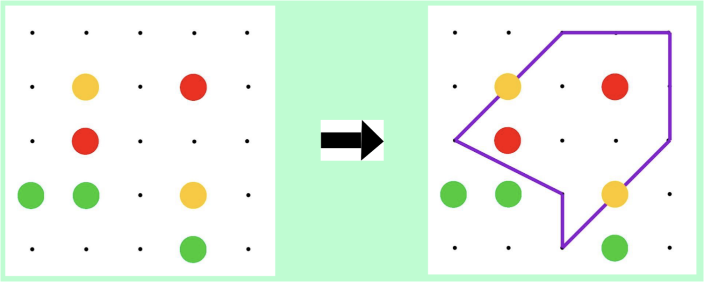


Géoplan



Problème « pour apprendre »

Géoplan



Géoplan

Variables didactiques

- le nombre de couleurs de perles en jeu : 2 ou 3
- le nombre de perles placées
- la position des perles sur le géoplan
- la position relative des perles

Quelques situations

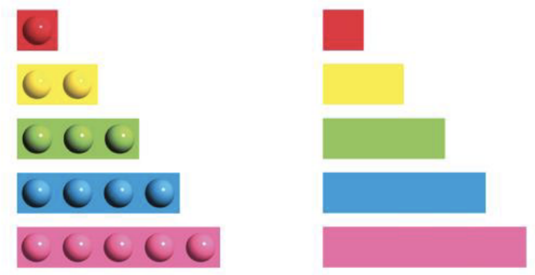
Dès la maternelle

- aparier
- trier
- classer
- ranger

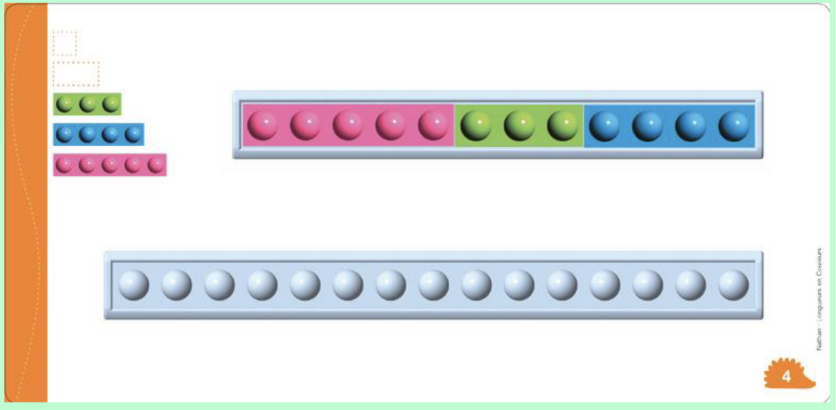
Attention : ne pas les confondre !

Jeu qui est-ce ? (Cycle 1)

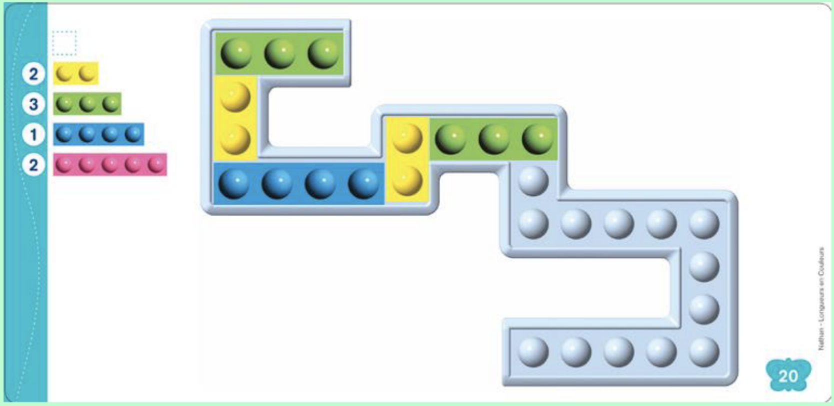
Une activité pour les grandeurs et les mesures



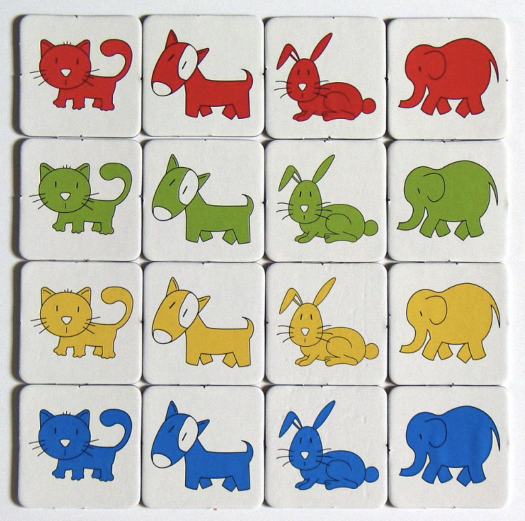
Une activité pour les grandeurs et les mesures



Une activité pour les grandeurs et les mesures



Une activité d'accueil



Merci !

Des questions ?