Les tables de multiplication

Un nouvel espoir

Didier Lesesvre

Aperçu

Plan du cours

- **algorithme** de multiplication : justifications et didactique
- **tables de multiplication** : programmes, histoire et astuces
- **critères de divisibilité** : programmes et règles
- typologie des **problèmes multiplicatifs** de Vergnaud

Plan du cours

- **algorithme** de multiplication : justifications et didactique
- **tables de multiplication** : programmes, histoire et astuces
- **critères de divisibilité** : programmes et règles
- typologie des **problèmes multiplicatifs** de Vergnaud

Ce qu'il faut en retenir

- des possibilités alternatives pour les élèves en difficulté
- des idées pour faire des activités et exercices
- la compréhension mathématique sous-jacente

Un peu d'histoire

Histoire des tables de multiplication

-4000 : tables babyloniennes, en base 60

-300 : tables chinoises en bambou

1er siècle avant JC : table de multiplication grecque

Histoire des tables de multiplication

-4000 : tables babyloniennes, en base 60

-300 : tables chinoises en bambou

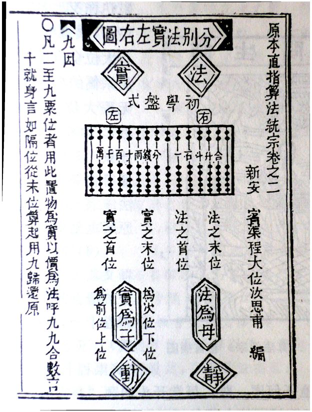
1er siècle avant JC : table de multiplication grecque

Ailleurs dans le monde....

- Aux États-Unis, elles vont jusqu'à 12
- En Chine, elles ont une importance fondamentale

La plus ancienne table de multiplication

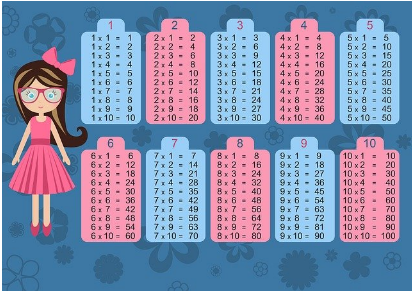
Tsinghua Bamboo Slips, 305 BC



Nine-nine song, XVIᵉ siècle

Les tables de multiplication

Des représentations contemporaines



	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	12	19	24	2B	36	41	48	53	5A	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
A	18	26	34	42	50	5A	68	76	84	92	A0
B	1A	29	38	47	56	65	74	83	92	A1	B0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	100

Programmes

Attendus et programmes

Deux objectifs

- donner un sens à l'opération
- être capable de calculer

Attendus et programmes

Deux objectifs

- donner un sens à l'opération
- être capable de calculer

Multiplications dans les programmes

- **CE1** : sens des multiplications
- **CE2** : algorithme de calcul posé
- **CM2** : multiplications avec des décimaux

Attendus et programmes

Tables de multiplication

- **CP** : moitiés et doubles
- **CE1** : tables de 2, 3, 4, 5, 10
- **CE2** : tables de 6, 7, 8, 9, 100

Attendus et programmes

Tables de multiplication

- **CP** : moitiés et doubles
- **CE1** : tables de 2, 3, 4, 5, 10
- **CE2** : tables de 6, 7, 8, 9, 100

Critères de divisibilité

- **CM1** : par 2, 5, 10
- **CM2** : par 3, 9

Quelques remarques

Idée : avoir des automatismes

- accélérer le calcul
- libérer la réflexion
- travailler la mémoire
- comprendre la structure des nombres

Algorithmes de multiplication

Comment calculer sans (trop) réfléchir ?

Rappels sur la numération décimale

Un nombre écrit sous **forme décimale** $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ signifie

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \times 1$$

Rappels sur la numération décimale

Un nombre écrit sous **forme décimale** $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ signifie

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \times 1$$

Exemples

- $13 = 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 13 \times 10 + 3$
- $1789 = 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

Difficulté cachée

Les algorithmes de multiplication posée reposent sur... la **distributivité** (qui est au programme de 5e !)

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Difficulté cachée

Les algorithmes de multiplication posée reposent sur... la **distributivité** (qui est au programme de 5e !)

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

En effet,

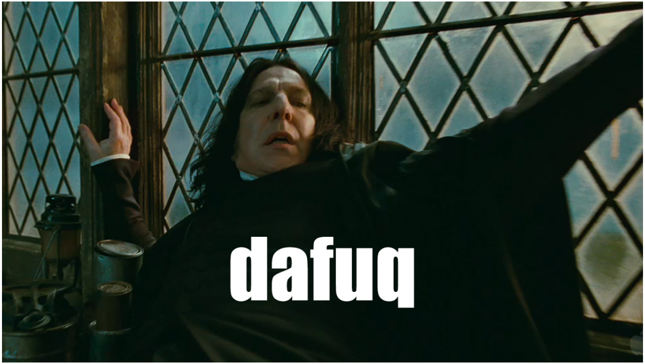
$$72 \times 38 = (70+2)(30+8) = 70 \times 30 + 70 \times 8 + 2 \times 30 + 2 \times 8$$

Notre algorithme habituel

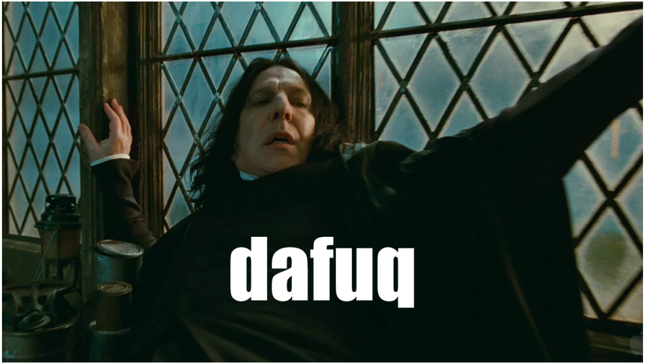
Notre algorithme habituel

$$
\begin{array}{r}
72 \\
\times\ 38 \\
\hline
576 \\
2160 \\
\hline
2736
\end{array}
$$

Notre algorithme habituel

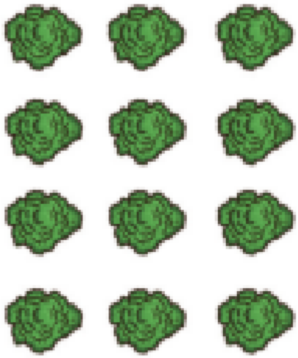


Notre algorithme habituel



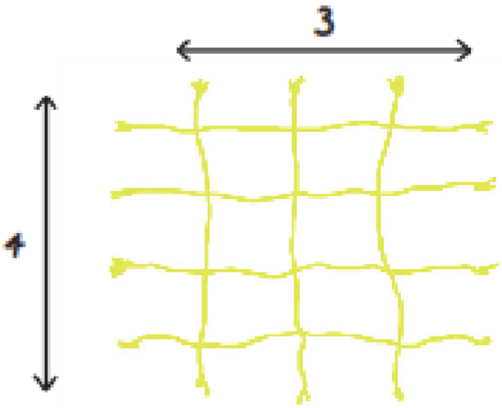
Comment amener, justifier, construire cet algorithme ?

Des salades et du sens



Construction du **sens** : artifice de l'addition ?

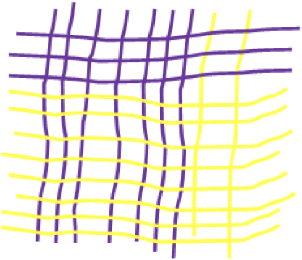
Des cordelettes pour modéliser



Vers une **abstraction**, mais encore **manipulable**

Des cordelettes distributives

Retour à 72×38



Jaune – Jaune :	8 x 2 =	16
Jaune – Mauve :	8 x 70 =	560
Mauve - Jaune :	30 x 2 =	60
Mauve - Mauve:	30 x 70 =	2 100
Total :		**2 736**

Deux méthodes à amener et à conceptualiser :

- compter les **intersections**
- garder en tête la signification des **cordes de 10**

Une multiplication posée en détails

$$
\begin{array}{r}
72 \\
\times\ 38 \\
\hline
16 \\
560 \\
60 \\
2100 \\
\hline
2736
\end{array}
$$

Les résultats intermédiaires rappellent le **sens**

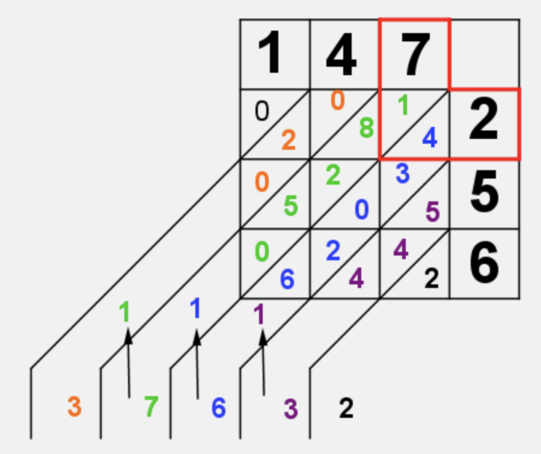
Retour aux sources

$$
\begin{array}{r}
72 \\
\times\ 38 \\
\hline
576 \\
2160 \\
\hline
2736
\end{array}
$$

D’autres méthodes ?

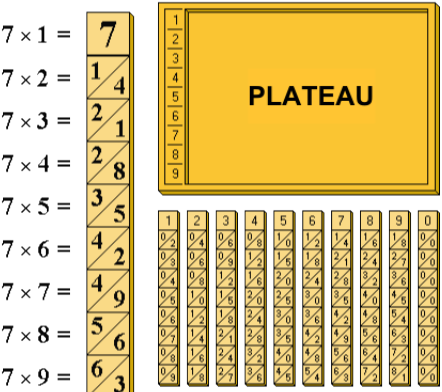
Un voyage à travers le temps et l’espace

Par jalousie (*per gelosia*)



Préparez vos tables de multiplication !

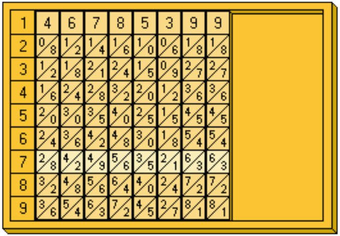
Les bâtons de Napier

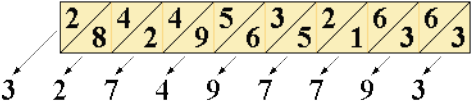


Bâtons de Napier

Les bâtons de Napier sont un outil de calcul basé sur les tables de multiplication et la numération de position

Les bâtons de Napier – un exemple

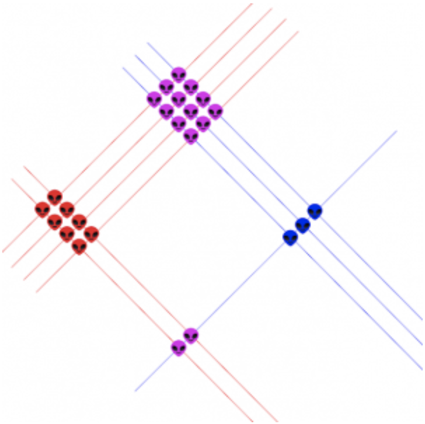




Le résultat de la multiplication se lit presque directement !

Méthode japonaise

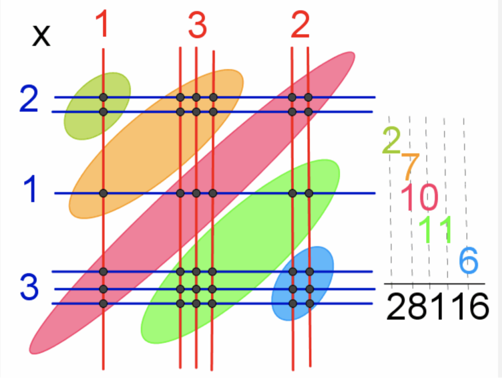
42×23



C'est la méthode des **cordelettes** !

Méthode japonaise

132×213



Avec seulement des divisions par 2

Avec seulement des divisions par 2

Multiplications avec les seules tables de 2

On divise un côté par 2, on multiplie l'autre par 2

Si on a un nombre impair à diviser, on lui retranche 1

On somme les lignes correspondant aux impairs

18	37
9	74
4	148
2	296
1	592

~~18~~	~~37~~
9	74
~~4~~	~~148~~
~~2~~	~~296~~
1	592

$$18 \times 37 = 666$$

Avec seulement des divisions par 2

Multiplications avec les seules tables de 2

On divise un côté par 2, on multiplie l'autre par 2

Si on a un nombre impair à diviser, on lui retranche 1

Preuve : Utilisez la décompositions en base 2 :

$$n = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{(2)} = a_n 2^n + \cdots a_1 2^1 + a_0 2^0$$

Défi : à vous de jouer ! $\square$

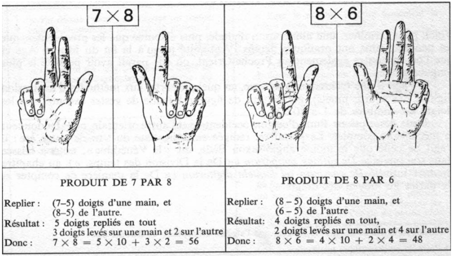
Tables de multiplications

Trucs, astuces... et la magie noire qui s'y cache

Esprit du cours

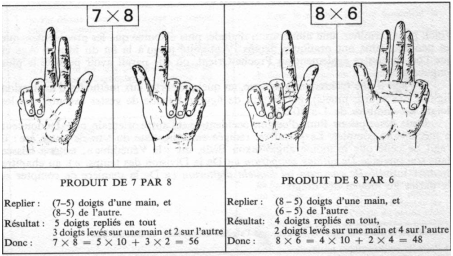
Attention : je ne connais pas mes tables de multiplication

Il existe des astuces, moyens mnémotechniques, ...



Attention : je ne connais pas mes tables de multiplication

Il existe des astuces, moyens mnémotechniques, ...



Objectif : comprendre ce qui est caché derrière, les propriétés des nombres et du calcul qui rendent valide ces recettes-miracles

Par 10, 100, etc.

Par 10, 100, etc.

Multiplication par 10, 100...

On ajoute le même nombre de zéros à la fin du nombre **entier**

Exemple : $4 \times 10 = 40$ ou $123 \times 100 = 12300$

Par 10, 100, etc.

Multiplication par 10, 100...

On ajoute le même nombre de zéros à la fin du nombre **entier**

Exemple : $4 \times 10 = 40$ ou $123 \times 100 = 12300$

Preuve : écriture décimale (en base 10) du nombre

$$n = a_n 10^n + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$$

Par 10, 100, etc.

Multiplication par 10, 100...

On ajoute le même nombre de zéros à la fin du nombre **entier**

Exemple : $4 \times 10 = 40$ ou $123 \times 100 = 12300$

Preuve : écriture décimale (en base 10) du nombre

$$n = a_n 10^n + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$$

$$10n = a_n 10^{n+1} + \cdots + a_1 10^{1+1} + a_0 10^{0+1} + 0 \times 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0 0}$$

Par 10, 100, etc.

Multiplication par 10, 100...

On ajoute le même nombre de zéros à la fin du nombre **entier**

Exemple : $4 \times 10 = 40$ ou $123 \times 100 = 12300$

Preuve : écriture décimale (en base 10) du nombre

$$n = a_n 10^n + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$$

$$10n = a_n 10^{n+1} + \cdots + a_1 10^{1+1} + a_0 10^{0+1} + 0 \times 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0 0}$$

$$10^k n = a_n 10^{n+k} + \cdots + a_1 10^{1+k} + a_0 10^{0+k} + 0 \times 10^{k-1} + \cdots + 0 \times 10^0$$

Par 10, 100, etc.

Multiplication par 10, 100...

On ajoute le même nombre de zéros à la fin du nombre **entier**

Exemple : $4 \times 10 = 40$ ou $123 \times 100 = 12300$

Preuve : écriture décimale (en base 10) du nombre

$$
\begin{aligned}
n &= a_n 10^n + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0} \\
10n &= a_n 10^{n+1} + \cdots + a_1 10^{1+1} + a_0 10^{0+1} + 0 \times 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0 0} \\
10^k n &= a_n 10^{n+k} + \cdots + a_1 10^{1+k} + a_0 10^{0+k} + 0 \times 10^{k-1} + \cdots + 0 \times 10^0 \\
&= \overline{a_n \cdots a_1 a_0 \underbrace{0 \cdots 0}_{\text{k zéros}}} \quad \square
\end{aligned}
$$

Par 10, 100, etc.

Multiplication par 10, 100...

On ajoute le même nombre de zéros à la fin du nombre **entier**

Exemple : $4 \times 10 = 40$ ou $123 \times 100 = 12300$

Preuve : écriture décimale (en base 10) du nombre

$$n = a_n 10^n + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$$

$$10n = a_n 10^{n+1} + \cdots + a_1 10^{1+1} + a_0 10^{0+1} + 0 \times 10^0 = \overline{a_n \cdots a_1 a_0 0}$$

$$10^k n = a_n 10^{n+k} + \cdots + a_1 10^{1+k} + a_0 10^{0+k} + 0 \times 10^{k-1} + \cdots + 0 \times 10^0$$

$$= \overline{a_n \cdots a_1 a_0 \underbrace{0 \cdots 0}_{\text{k zéros}}} \quad \square$$

- intérêt de la notation positionnelle
- transposition aux autres bases
- attention aux **décimaux** !

Calcul réfléchi

Le **calcul réfléchi** est un calcul utilisant consciemment des propriétés des nombres et des opérations ($\neq$ algorithmes)

Calcul réfléchi

Le **calcul réfléchi** est un calcul utilisant consciemment des propriétés des nombres et des opérations ($\neq$ algorithmes)

Propriétés souvent utilisées

- numération positionnelle
- commutativité $a \times b = b \times a$
- distributivité $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- décomposition additive par 5 ou 10
- identités remarquables
- etc.

Par 9, pour les nombres à un chiffre

Par 9, pour les nombres à un chiffre

Multiplication par 9 : valeur de $9 \times k$

Dizaines : données par $k - 1$

Unités : données par le complément à 9 de k

Avec les mains : plier le doigt numéro k.

Les doigts avant sont les dizaines, les doigts après sont les unités : on « lit » le résultat sur les mains

Exemple : $9 \times 7 = 63$

Par 9, pour les nombres à un chiffre

Multiplication par 9 : valeur de $9 \times k$

Dizaines : données par $k - 1$

Unités : données par le complément à 9 de k

Avec les mains : plier le doigt numéro k.

Les doigts avant sont les dizaines, les doigts après sont les unités : on « lit » le résultat sur les mains

Exemple : $9 \times 7 = 63$

Preuve : on utilise $9 = 10 - 1$ et on développe

$$\begin{aligned} 9 \times k &= (10-1) \times k = 10k - k = 10(k-1) + (10-k) \\ &= \overline{(k-1)(10-k)} \quad \square \end{aligned}$$

Par 9, pour les nombres à un chiffre

Multiplication par 9 : valeur de $9 \times k$

Dizaines : données par $k - 1$

Unités : données par le complément à 9 de k

Avec les mains : plier le doigt numéro k.

Les doigts avant sont les dizaines, les doigts après sont les unités : on « lit » le résultat sur les mains

Exemple : $9 \times 7 = 63$

Preuve : on utilise $9 = 10 - 1$ et on développe

$$
\begin{aligned}
9 \times k &= (10-1) \times k = 10k - k = 10(k-1) + (10-k) \\
&= \overline{(k-1)(10-k)} \quad \square
\end{aligned}
$$

- utilisation des compléments à 10
- transpose aux autres bases, i.e. mains à b doigts

Avec les doigts

Avec les doigts

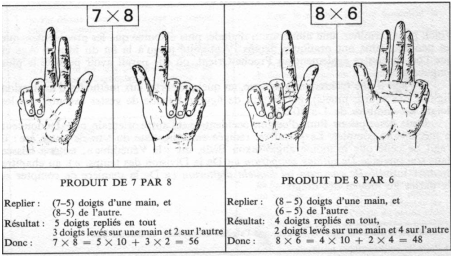
Multiplication par 6, 7, 8, 9 i.e. $5 + k$

Replier k doigts

Dizaines : additionner les doigts repliés

Unités : multiplier les doigts levés

Exemple : $7 \times 8 = 56$



Avec les doigts

Multiplication par 6, 7, 8, 9 i.e. $5 + k$

Replier k doigts

Dizaines : additionner les doigts repliés

Unités : multiplier les doigts levés

Exemple : $7 \times 8 = 56$

Preuve : on développe $(5 + x) \times (5 + y)$

$$(5 + x)(5 + y) = 10(x + y) + (5 - x)(5 - y) \quad \square$$

Attention : Il faut s'assurer que $0 \leqslant (5 - x)(5 - y) \leqslant 9$! (et sinon ?)

Par 11, nombres à deux chiffre

Par 11, nombres à deux chiffre

Multiplication par 11

Écarter les deux chiffres, et mettre la somme au milieu

Exemple : $11 \times 16 = 176$

Par 11, nombres à deux chiffre

Multiplication par 11

Écarter les deux chiffres, et mettre la somme au milieu

Exemple : $11 \times 16 = 176$

Peut aussi marcher avec d'autres nombres : $11 \times 721 = 7931$

Preuve : on développe avec $11 = 10 + 1$

$$\begin{aligned} 11 \times \overline{ab} &= (10+1) \times (10a + b) \\ &= 100 \times a + (10 \times a + 10 \times b) + 1 \times b \\ &= 100a + 10(a+b) + b = \overline{a(a+b)b} \quad \square \end{aligned}$$

Par 11, nombres à deux chiffre

Multiplication par 11

Écarter les deux chiffres, et mettre la somme au milieu

Exemple : $11 \times 16 = 176$

Peut aussi marcher avec d'autres nombres : $11 \times 721 = 7931$

Preuve : on développe avec $11 = 10 + 1$

$$\begin{aligned} 11 \times \overline{ab} &= (10+1) \times (10a + b) \\ &= 100 \times a + (10 \times a + 10 \times b) + 1 \times b \\ &= 100a + 10(a+b) + b = \overline{a(a+b)b} \quad \square \end{aligned}$$

Attention : Il faut s'assurer que $0 \leqslant a + b \leqslant 9$! (et sinon ?)

Les carrés de nombres terminant par 5

Les carrés de nombres terminant par 5

Calcul de $\overline{n5}^2$

Le résultat se termine par 25

Les centaines sont données par $n(n+1)$

Exemple : $135^2 = \overline{(13 \times 14)25} = 18225$

Les carrés de nombres terminant par 5

Calcul de $\overline{n5}^2$

Le résultat se termine par 25

Les centaines sont données par $n(n+1)$

Exemple : $135^2 = \overline{(13 \times 14)25} = 18225$

Preuve : on utilise l'écriture décimale

$$\overline{n5}^2 = (10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25 \quad \square$$

Les carrés de nombres terminant par 5

Calcul de $\overline{n5}^2$

Le résultat se termine par 25

Les centaines sont données par $n(n+1)$

Exemple : $135^2 = \overline{(13 \times 14)25} = 18225$

Preuve : on utilise l'écriture décimale

$$\overline{n5}^2 = (10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25 \quad \square$$

Exercice : Que dire des nombres se terminant par 125 ?

Méthodes de Tachtenberg

D'autres « recettes » existent !

- **multiplication par 3**
  Soustraire le dernier chiffre à 10, le multiplier par deux et ajouter 5 s'il est impair
- **multiplication par 5**
  La moitié du voisin de droite, + 5 si le chiffre est impair. Si le multiplicande est impair, recopier 5, s'il est pair recopier 0.
- **multiplication par 7**
  Doubler chaque chiffre et ajouter la moitié du voisin de droite, + 5 si le chiffre est impair.
- etc.

Méthodes de Tachtenberg

D'autres « recettes » existent !

- **multiplication par 3**
  Soustraire le dernier chiffre à 10, le multiplier par deux et ajouter 5 s'il est impair
- **multiplication par 5**
  La moitié du voisin de droite, + 5 si le chiffre est impair. Si le multiplicande est impair, recopier 5, s'il est pair recopier 0.
- **multiplication par 7**
  Doubler chaque chiffre et ajouter la moitié du voisin de droite, + 5 si le chiffre est impair.
- etc.

Défi : sauriez-vous justifier ces règles ?

Calcul modulaire

Ou comment rendre rigoureux "3=0" ?

Rappels sur le calcul modulaire

Calcul modulaire

Raisonner modulo *truc*, c'est raisonner « à *truc* près » i.e. on considère *truc* comme valant zéro en plus des règles usuelles :

$$a \equiv b \mod k \quad \text{si} \quad k \mid a - b$$

i.e. si a et b diffèrent d'un multiple de k, ou encore que a et b sont égaux « à k près »

Exemples naturels

- les heures sur un cadran : modulo 12
- les minutes sur un cadran : modulo 60
- la parité : modulo 2
- numéro INSEE : modulo 97

Le jeu de Nim

Le jeu de Nim

- chacun retire 1, 2 ou 3 bâtons
- celui retirant le dernier a perdu

Le jeu de Nim

- chacun retire 1, 2 ou 3 bâtons
- celui retirant le dernier a perdu

On peut toujours faire en sorte que 4 bâtons exactement soient retirés après deux coups.

Le jeu de Nim

- chacun retire 1, 2 ou 3 bâtons
- celui retirant le dernier a perdu

On peut toujours faire en sorte que 4 bâtons exactement soient retirés après deux coups.

Stratégie gagnante : On peut gagner dès que $n \equiv 1 \mod 4$

Population des caméléons

Population des caméléons

Sur une île, les caméléons peuvent prendre trois couleurs : rouge, vert ou jaune. Lorsque deux d'entre eux, de couleurs différentes, se rencontrent, ils prennent immédiatement la troisième couleur.

Se peut-il qu'à un moment donné ils aient tous la même couleur ?

La solution modulaire

Prenons le cas de

- $J = 17$ caméléons jaunes
- $R = 24$ caméléons rouges
- $B = 28$ caméléons bleus

La solution modulaire

Prenons le cas de

- $J = 17$ caméléons jaunes
- $R = 24$ caméléons rouges
- $B = 28$ caméléons bleus

Les modifications possibles sont du type

$$(J, R, B) \mapsto (J + 2, R - 1, B - 1)$$

La solution modulaire

Prenons le cas de

- $J = 17$ caméléons jaunes
- $R = 24$ caméléons rouges
- $B = 28$ caméléons bleus

Les modifications possibles sont du type

$$(J, R, B) \mapsto (J + 2, R - 1, B - 1)$$

L'ensemble $\{J, R, B\}$ demeure **invariant** modulo 3

La solution modulaire

Prenons le cas de

- $J = 17$ caméléons jaunes
- $R = 24$ caméléons rouges
- $B = 28$ caméléons bleus

Les modifications possibles sont du type

$$(J, R, B) \mapsto (J + 2, R - 1, B - 1)$$

L'ensemble $\{J, R, B\}$ demeure **invariant** modulo 3

Conclusion : Puisque $J \equiv 2$, $R \equiv 0$ et $B \equiv 1$ modulo 3, une seule des populations peut arriver à zéro !

Propriétés du calcul modulaire

Esprit : les congruences se comportent presque « comme l'égalité »

Propriétés du calcul modulaire

Esprit : les congruences se comportent presque « comme l'égalité »

- on a toujours $a \equiv a$
- si $a \equiv b$ alors $b \equiv a$
- si $a \equiv b$ et $b \equiv c$ alors $a \equiv c$
- si $a \equiv b$ et $c \equiv d$, alors $a + c \equiv b + d$
- si $a \equiv b$ et $c \equiv d$, alors $a \times c \equiv b \times d$
- si $a \equiv b$ alors $k \times a \equiv k \times b$...

Critères de divisibilité

Les critères… et enfin des explications

Critère de divisibilité par 2

Critère de divisibilité par 2

Critère de divisibilité par 2

Le chiffre des unités est divisible par 2 (i.e. pair)

Exemple : 1764 est pair, 2021 est impair

Critère de divisibilité par 2

Critère de divisibilité par 2

Le chiffre des unités est divisible par 2 (i.e. pair)

Exemple : 1764 est pair, 2021 est impair

Preuve : on raisonne modulo 2, toutes les puissances de 10 sont paires, donc seule la première compte :

$$\begin{aligned}\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots a_1 \times 10 + a_0 \\ &\equiv a_n \times 0 + \cdots + a_1 \times 0 + a_0 \mod 2 \\ &\equiv a_0 \mod 2 \quad \square\end{aligned}$$

Critère de divisibilité par 3

Critère de divisibilité par 3

Critère de divisibilité par 3

La somme des chiffres est divisible par 3

Exemple : 2022 est divisible par 3, mais pas 2021

Critère de divisibilité par 3

Critère de divisibilité par 3

La somme des chiffres est divisible par 3

Exemple : 2022 est divisible par 3, mais pas 2021

Preuve : Modulo 3, les puissances de 10 valent 1, donc

$$\begin{aligned}
\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots a_1 \times 10 + a_0 \\
&\equiv a_n \times 1 + \cdots + a_1 \times 1 + a_0 \times 1 \mod 3 \\
&\equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \mod 3 \quad \square
\end{aligned}$$

Critère de divisibilité par 4

Critère de divisibilité par 4

Critère de divisibilité par 4

Les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4

Exemple : 1868 est divisible par 4, mais pas 2022

Critère de divisibilité par 4

Critère de divisibilité par 4

Les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4

Exemple : 1868 est divisible par 4, mais pas 2022

Preuve : Modulo 4, 100 est nul ainsi que les suivants, donc seuls les chiffres devant les facteurs 1 et 10 comptent :

$$\begin{aligned}
\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots a_1 \times 10 + a_0 \\
&\equiv a_n \times 0 + \cdots + a_2 \times 0 + \overline{a_1 a_0} \mod 4 \\
&\equiv \overline{a_1 a_0} \mod 4 \quad \square
\end{aligned}$$

Un exemple de situation de recherche

2 . **7** . : **4**

milliers centaines dizaines unités

A. Trouve (et écris) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.

B. Remplace le 7 des dizaines par d'autres chiffres (1, 2, 3, ...);

- Combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ?

Essaie d'énoncer des lois.

Note : pour B, utilise une calculatrice de poche ou bien travaille avec deux autres camarades et répartissez-vous la tâche.

Figure 1 : énoncé de la situation Charrière (1991), p.214.

Un exemple de situation...

En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre, peux-tu savoir si ce nombre possède ou ne possède pas certains diviseurs ?

Figure 3 : exercice 19, p. 48, livre de l'élève 6ème année

Un exemple de situation...

Or ce *truc* est la partie visible du critère, qui reste magique si l'on ne peut approcher les maths qui se trouvent cachées derrière. Le dessin renforce encore cette idée.

Critère de divisibilité par 5

Critère de divisibilité par 5

Critère de divisibilité par 5

Le dernier chiffre est divisible par 5 (i.e. 5 ou 0)

Exemple : 2025 est divisible par 5, mais pas 5553

Critère de divisibilité par 5

Critère de divisibilité par 5

Le dernier chiffre est divisible par 5 (i.e. 5 ou 0)

Exemple : 2025 est divisible par 5, mais pas 5553

Preuve : modulo 5, 10 est nul donc seul le dernier chiffre compte

$$\begin{aligned}
\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots a_1 \times 10 + a_0 \\
&\equiv a_n \times 0 + \cdots + a_1 \times 0 + a_0 \mod 5 \\
&\equiv a_0 \mod 5 \quad \square
\end{aligned}$$

Critère de divisibilité par 6

Critère de divisibilité par 6

Critère de divisibilité par 6

Il doit être divisible par 2 et par 3

Par le *théorème chinois*, puisque 2 et 3 sont premiers entre eux et $6 = 2 \times 3$, il suffit de vérifier la divisibilité par 2 et par 3.

Critère de divisibilité par 10

Critère de divisibilité par 10

Critère de divisibilité par 10

Le dernier chiffre doit être 0

Exemple : 2010 est divisible par 10, mais pas 10003

Critère de divisibilité par 10

Critère de divisibilité par 10

Le dernier chiffre doit être 0

Exemple : 2010 est divisible par 10, mais pas 10003

Preuve : les puissances de 10 sont nulles modulo 10, hormis 10^0

$$\begin{aligned}
\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots a_1 \times 10 + a_0 \\
&\equiv a_n \times 0 + \cdots + a_1 \times 0 + a_0 \mod 10 \\
&\equiv a_0 \mod 10 \quad \square
\end{aligned}$$

Critère de divisibilité par 10

Critère de divisibilité par 10

Le dernier chiffre doit être 0

Exemple : 2010 est divisible par 10, mais pas 10003

Preuve : les puissances de 10 sont nulles modulo 10, hormis 10^0

$$\begin{aligned}\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots a_1 \times 10 + a_0 \\ &\equiv a_n \times 0 + \cdots + a_1 \times 0 + a_0 \mod 10 \\ &\equiv a_0 \mod 10 \quad \square\end{aligned}$$

Extension : divisible par 10^k si les k derniers chiffres sont 0

Un peu de démystification

Tous ces critères reposent sur le système **décimal** de position

On a $10 = 2 \times 5$, donc 2 et 5 ont des statuts particuliers

Un peu de démystification

Tous ces critères reposent sur le système **décimal** de position

On a $10 = 2 \times 5$, donc 2 et 5 ont des statuts particuliers

Combien de chiffres ?

Le critère de divisibilité de $2^a \times 5^b$ nécessite de regarder les $\max(a, b)$ derniers chiffres.

Exercice : Sauriez-vous le justifier ?

Preuve par 9

Preuve par 9

Preuve par 9

La somme des chiffres est inchangée par addition

Exemple : 35426+1242=36668, somme des chiffres : 29

C'est une condition **nécessaire**, mais non suffisante (permutation des chiffres, différence par un multiple de 9, etc.)

Preuve par 9

Preuve par 9

La somme des chiffres est inchangée par addition

Exemple : 35426+1242=36668, somme des chiffres : 29

C'est une condition **nécessaire**, mais non suffisante (permutation des chiffres, différence par un multiple de 9, etc.)

Preuve : les puissances de 10 sont 1 modulo 9

$$\begin{aligned}
\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \\
&\equiv a_n \times 1 + \cdots + a_1 \times 1 + a_0 \mod 9 \\
&\equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \mod 9 \quad \square
\end{aligned}$$

Preuve par 9

La somme des chiffres est inchangée par addition

Exemple : 35426+1242=36668, somme des chiffres : 29

C'est une condition **nécessaire**, mais non suffisante (permutation des chiffres, différence par un multiple de 9, etc.)

Preuve : les puissances de 10 sont 1 modulo 9

$$\begin{aligned}\overline{a_n \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \\ &\equiv a_n \times 1 + \cdots + a_1 \times 1 + a_0 \mod 9 \\ &\equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \mod 9 \quad \square\end{aligned}$$

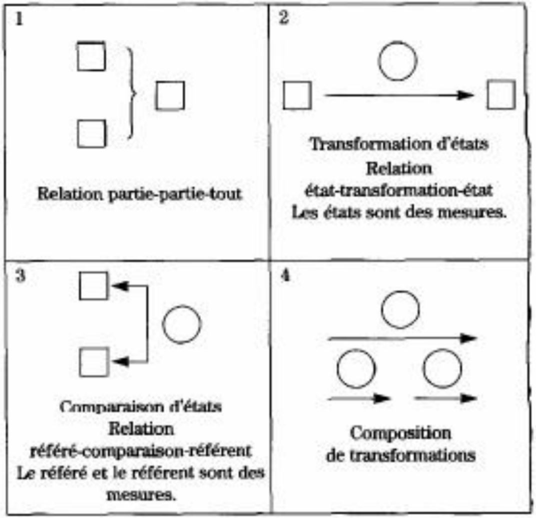
Similairement, **preuve par 11 :** car $10 \equiv -1 \mod 11$, donc la somme est alternée

Problèmes multiplicatifs

La typologie de Vergnaud

Typologie de Vergnaud

Catégorisation des problèmes additifs et soustractifs



Typologie de Vergnaud

Objectif : fournir aux enseignants des données suffisantes pour appréhender de manière exhaustive l'ensemble des catégories des problèmes additifs et multiplicatifs à proposer aux élèves

Deux types de problèmes

- problèmes ternaires
- problèmes quaternaires

Problèmes ternaires

- ***n* fois plus/moins**
  - Pierre a 15 billes, Paul en a trois fois plus

Problèmes ternaires

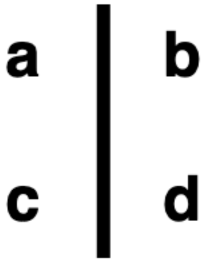
- **n fois plus/moins**
  - Pierre a 15 billes, Paul en a trois fois plus
- **produit cartésien** $A \times B$
  - On a trois entrées et 4 plats, combien de repas/combinaisons ?

Problèmes ternaires

- n **fois plus/moins**
  - Pierre a 15 billes, Paul en a trois fois plus
- **produit cartésien** $A \times B$
  - On a trois entrées et 4 plats, combien de repas/combinaisons ?
- **configuration rectangulaire**
  - la largeur du terrain fait x m, la longueur fait y m, quelle est la surface ?

Problèmes quaternaires

Correspondent essentiellement aux problèmes de **quatrième proportionnelle**, dans un sens ou dans l'autre, dans une situation de proportionnalité



Ils sont de **quatre types**

Multiplication

1	a
b	?

Si 1 boîte vaut a, combien valent b boîtes ?

Multiplication

1	a
b	?

Si 1 boîte vaut a, combien valent b boîtes ?

1 Une compagnie organise des voyages.
Combien de personnes peut-elle transporter…

a. dans 9 bus de 44 places ?

Division-quotition

"Quel est le nombre de parts ?"

1	a
?	c

Si 1 boîte vaut a, combien de boîtes valent c ?

Division-quotition

"Quel est le nombre de parts ?"

1	a
?	c

Si 1 boîte vaut a, combien de boîtes valent c ?

b. La semaine dernière, il a récolté 150 œufs chaque matin. Le dimanche, il les a vendus dans des boites de 6.
Combien de boites d'œufs a-t-il vendues dimanche dernier ?

Division-partition

"Quelle est la valeur d'une part ?"

1	?
b	c

Si b boîtes valent c, combien vaut 1 boîte ?

Division-partition

"Quelle est la valeur d'une part ?"

1	?
b	c

Si b boîtes valent c, combien vaut 1 boîte ?

28 oiseaux sont placés dans 4 cages différentes.
Combien y a-t-il d'oiseaux par cage ?

4 x ? = 28 28 : 4 = 7
Il y a 7 oiseaux par cage

Quatrième proportionnelle

a	b
c	?

Si a boîtes valent b, combien valent c boîtes ?

Quatrième proportionnelle

a	b
c	?

Si a boîtes valent b, combien valent c boîtes ?

<u>Exercice n°3 :</u> Dans un immeuble, les charges payées sont proportionnelles à la surface au sol de la propriété pour chacun des propriétaires. Trouver la valeur de x, y et de z du tableau des charges de quelques propriétaires.

Surface au sol en m²	x	61,2	y	72,9
Montant des charges (€)	82,32	171,36	189,00	z

Merci !

Des questions ?